

設備配置による不均質な相互結合網構築の ヒューリスティック手法の検討

當山 孝義

日本工業大学電気電子工学科

1. はじめに

並列計算システムの性能はプロセッサ (PE) の性能とともに PE 間を接続する相互結合網の性能に依存する. 本研究では, 低速通信路からなる相互結合網の形状を変えずに一部の通信路を高速なものに入れ替えることで不均質な相互結合網を構築する. この不均質な相互結合網の通信性能は高速通信路の数と位置に依存する.

最適化問題のひとつに設備配置問題がある[1]. 本研究では高速通信路を設備と考え, 設備配置問題を利用する. 設備の評価指標として全対距離和を用いる. 筆者は一般形状の相互結合網に全対距離和が小さくなるよう木形状の設備を配置するヒューリスティック手法を提案した[2].

本稿では, 本手法では, 任意の定数 g について, g 以下のサイズの最適設備は求まるが $g+1$ 以上のサイズの最適設備は求まらないネットワークが存在することを示す.

2. 相互結合網と設備配置

図 1 のように相互結合網をネットワークで表す. ネットワークの各辺の長さはその辺を通る通信の通信レイテンシ, コストはその辺を設備に含めるときの費用とする. 設備はネットワークの部分木である. 設備のサイズは設備に含まれる辺のコストの総和であり, 設備のコストを表す. 設備のサイズはある数 s 以下とする.

全対距離和 $CP(F)$ はネットワーク上の 2 つのノードの組合せ全てに対するノード間の距離の総和である. 但し, その 2 ノード各々と設備との距離の和が 2 ノード間の距離より小さい場合は前者を用いる. すなわち次式で表される.

$$CP(F) = \sum_{v_i, v_j} \min(d(v_i, v_j), d(v_i, F) + d(v_j, F))$$

但し, v_i, v_j はネットワークのノード, F は設備, $d(v_i, v_j)$ は v_i と v_j 間の距離, $d(v_i, F)$ は v_i と F 間の距離である.

同一サイズの設備のうち全対距離和が最小となるものを最適設備と呼ぶ.

3. ヒューリスティックアルゴリズム

図 2 に[2]で提案した手法を示す. ネットワー

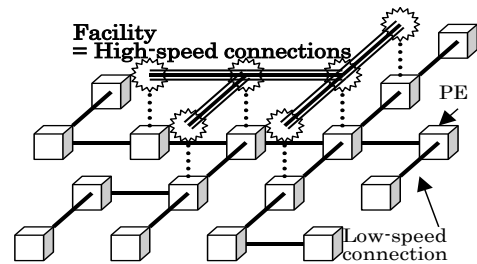


図 1. 設備配置による不均質な相互結合網

- (1) コスト $c(e) \leq s$ となる辺のうち, その辺のみを設備としたときに効率 $EF(\phi, F)$ が最大となるものを求める. そのような設備の集合を FF とする,
- (2) 初期設備の集合 FF の各々の設備 F に対し以下の(3)~(8)を実行する. そして得られた設備のうち最も全対距離和が小さいものを選択する.
設備 $F=(V', E')$, $V'=\{v_1, v_2\}$, $E'=\{e\}$, $e=(v_1, v_2)$ とする, F のサイズ $S(F)=c(e)$ である.
- (3) 各ノード v から F までの距離 $d(v, F)$ を求める. すなわち $d(v, F)=\min(d(v, v_1), d(v, v_2))$.
- (4) F の隣接ノードと F のノード間の辺のうち, それを F に追加しても指定サイズ s を超えないものの集合 $N(F)$ を求める. すなわち $N(F)=\{e=(u, v) \in E: u \in V(F), v \notin V(F), c(e)+S(F) \leq s\}$.
- (5) $N(F)$ の全ての辺 $e=(u, v)$, $u \notin V(F)$ に対して, 全対距離和の減少量 $DCP(F, F+u)$ を求める. そして効率 $EF(F, F+u)$ が最大となるノード u' を探す. このときの e を e' とする.
- (6) F にノード u' を追加する. F のサイズ $S(F+u')=S(F)+c(e')$ とする. また各ノード v に対する距離 $d(v, F+u')$ を求める.
- (7) $N(F)$ から辺 e' , $N(F)$ に含まれる辺で $F+u'$ に追加したら指定サイズを超えるもの, および $N(F)$ に含まれる辺で両端とも $F+u'$ に含まれるものを削除する. そして, u' を端点として F に含まれない辺 $e=(u', v)$ で, $F+u'$ にノード v を追加しても指定サイズ s を超えない場合, $N(F)$ に辺 e を追加する. すなわち $N(F+u')=N(F)-\{e'\}-\{e: e \in N(F), c(e)+S(F+u') > s\}-\{e=(v, w): v, w \in F+u'\}+\{e=(u', v): v \notin V(F+u'), c(e)+S(F+u') \leq s\}$.
- (8) $N(F)$ が空でなければ上記(5)に移動する.

図 2. ヒューリスティックアルゴリズム

ク $G=(V, E)$ のノード数は n , 辺の数は m とする. 各ノード v は重み $w(v)$ を, 各辺 e は長さ $l(e)$ とコスト $c(e)$ を持つ. ノード v_i と v_j 間の距離を $d(v_i, v_j)$ とする. ノード v と部分木 T 間の距離 $d(v, T)$ は, v から T の最も近いノードまでの距離

である．部分木 T に， T に隣接するノード u と T, u 間を接続する辺 e を追加したものを $T+u$ で表す．また部分木 T に， T の葉 u と u を端点とする辺 e を除去したものを $T-u$ で表す．設備 F はサイズ $S(F) \leq s$ である部分木である．設備 F を配置したときのノード v_i, v_j 間の最短距離 $cd(v_i, v_j)$ を， v_i, v_j 間の距離と， v_i と F 間と v_j と F 間の距離の和の小さいほうとする．すなわち $cd(v_i, v_j, F) = \min(d(v_i, F) + d(v_j, F), d(v_i, v_j))$ とする． F の全対距離和 $CP(F) = \sum_{v_i, v_j \in V} w(v_i) \cdot w(v_j) \cdot cd(v_i, v_j, F)$ である．設備 F_1 を除去して設備 F_2 を配置した時の全対距離和の減少量 $DCP(F_1, F_2) = CP(F_1) - CP(F_2)$ となる．また全対距離和の減少量を F_1 と F_2 のサイズ差で割ったものを効率 $EF(F_1, F_2) = DCP(F_1, F_2) / \{S(F_2) - S(F_1)\}$ とする．なお，初期状態に設備 F を配置する場合の効率は $EF(\phi, F)$ である．

4. q スター木の r 完全結合ネットワーク

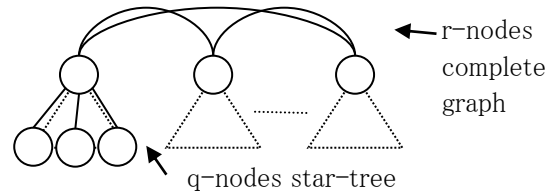


図 3. q スター木の r 完全結合ネットワーク

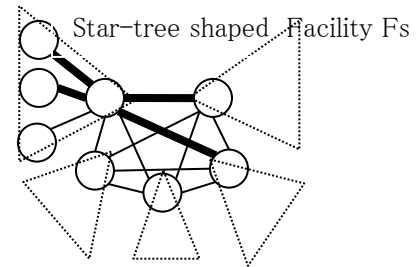


図 4. q - r ネットワーク上のスター木形状の設備

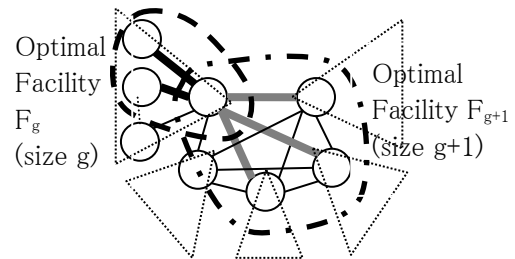


図 5. q - r ネットワーク上のサイズ g とサイズ $g+1$ の最適設備 F_g, F_{g+1}

図 3 に q ノードのスター木 r 個のそれぞれの根を完全結合したネットワークを示す．これを q スター木の r 完全結合ネットワーク (q - r ネットワーク) と名付ける．ノード数 $n=qr$ である．

5. q - r ネットワークの性質

簡単化のため，ネットワークの各辺の長さとコスト，各ノードの重みが 1 の場合を検討する．

(1) q - r ネットワークの設備を F とする． F の辺のうち完全結合網上の辺の数を t とする．このとき， F に隣接するスター木上の辺 e_1 ，完全結合網上の辺 e_2 に対して以下が成り立つ．

$$DCP(F, F+e_1) = qr-1, DCP(F, F+e_2) = tq^2.$$

(2) q - r ネットワーク上の最適設備の 1 つは，設備のサイズが $q+r-2$ 以下の場合，完全結合網上のノードを根とするスター木 F_s になる (図 4)． F_s による全対距離和削減量 $DCP(\phi, F)$ は以下のようになる．

$$DCP(\phi, F) = (qr-1)(g-h) + q^2h(h+1)/2$$

但し， g は F_s のサイズ， h は F_s に含まれる完全結合網の辺の数である．

(3) 任意の整数 g に対し， $q=4g$ ， $r=2g^2+3g$ ，ノード数 $n=8g^3+12g^2$ の q - r ネットワークを考える．サイズ $1 \sim q$ の最適設備はスター木上の辺のみからなる木であり，サイズ $g+1 \sim 2g^2+3g-1$ の最適設備は完全結合網上の辺のみからなる木である

(図 5)．サイズ $2g^2+3g$ 以上の最適設備は完全結合網上の $2g^2+3g-1$ 個の辺 (完全結合網の全域木) と，残りはスター木上の任意の辺からなる．

6. 本手法における最適設備

本手法は効率 $EF(F, F+u)$ が最大となる辺をグリーディに選択するので，任意の整数 g に対し，上記(3)のネットワークでは，サイズ g 以下の最適設備は求まるがサイズ $g+1 \sim n-8g+1$ の最適設備は求まらない (サイズ $n-8g+2$ 以上の最適設備は偶然に求まる)．

なお，本手法を複数の辺の効率を用いて選択するよう改良しても最適設備は得られないと思われる．

7. まとめ

本手法で任意の定数 g についてサイズ g 以上の最適設備が求まらないネットワークがあることを示した．

参考文献

- 1) Z. Drezner and H. W. Hamacher Eds., Facility Location -Application and Theory-, Springer-Verlag (2002).
- 2) 当山，設備配置による不均質な相互結合網構築のヒューリスティック手法に関する検討，第 75 回情報処理学会全国大会講演論文集第 1 分冊，pp. 275-276 (2013)．