テクニカルノート

代数方程式に対する高次 Pomentale 法の収束特性

鈴木智博[†] 杉浦洋[††]

1 変数代数方程式に対する反復法について，次数の高い反復法ほど反復列の挙動が安定しているという傾向がある．本論文では，任意次数の反復法が構成できる Pomentale 法についてこの経験則に理論的な根拠を与える．

Convergence Property of Higher Order Pomentale's Method for Algebraic Equations

Tomohiro Suzuki[†] and Hiroshi Sugiura[††]

In general, an iterative method of higher order has the tendency to generate a stable iterative sequence. The purpose of this paper is to give the theoretical basis to this empirical rule with Pomentale's method of which the iterative method of an arbitrary order of convergence can be constructed.

1. はじめに

本論文では，代数方程式

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \quad (a_n \neq 0) = \prod_{i=1}^{s} (z - z_i)^{n_i} \tag{1}$$

を扱う．ただし，$n_i \geq 1$ は根 z_i の代数的重複度であり，$n = \sum_{i=1}^{s} n_i$ である．

なんらかの単独型反復法を φ で表し，z を初期値とした反復列を $\{\varphi^\nu(z)\}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ で表す．ただし，$\varphi^0(z) := z, \varphi^1(z) := \varphi(z), \varphi^2(z) := \varphi \circ \varphi(z), \ldots$ である．$f(z)$ の任意の根を ξ とし，$\zeta^{(\nu)} := \varphi^\nu(z) - \xi$ とする．$p \geq 1$ に対して，

$$|\zeta^{(\nu+1)}| = \mathcal{O}(|\zeta^{(\nu)}|^p) \tag{2}$$

ならば，その反復法は p 次収束であるという．ξ が単根のとき，Newton 法 $(\varphi(z) = z - f(z)/f'(z))$ は ξ の近傍で二次収束，Halley 法 $(\varphi(z) = z - f(z)/\{f'(z) - f(z)f''(z)/(2f'(z))\})$ は三次収束の反復法である．

一般に，高次の単独型反復法を代数方程式に適用した場合，数値解を得るまでの反復回数が初期値や方程式の次数に影響されにくい，反復列が根と無関係な周期軌道に収束してしまうことが少ないという性質を持つ．また，次数の高い反復法ほど初期値に最も近い根に収束する傾向がある．我々はこれらを "安定した収束特性" と呼ぶ．

文献 4) には，任意次数の反復法である Nourein 法[1)] について，次数が高くなるほど，これが安定した収束特性を持つことの理論的な根拠が示されている．ただし，ここで扱われたのは単根のみを持つ代数方程式であった．今回，Nourein 法と同じ任意次数の反復法である Pomentale 法[2)] について重複根を含む代数方程式 (1) に対して文献 4) と同様の解析を行い，根の重複度と反復法の収束次数の関係についても議論する．

2. 単調一次収束領域

Pomentale 法の収束特性を解析するためのいくつかの定義を示す．

定義 2.1（相対距離）
点 z の根 z_i に対する相対距離を以下で定義する．

$$d_i(z) = \max_{j \neq i} \frac{|z - z_i|}{|z - z_j|} \tag{3}$$

定義 2.2（Apollonius 円，Apollonius 比）
ある根 z_i，z_j $(j \neq i)$ と α $(0 < \alpha \leq 1)$ に対して，集合

† 山梨大学
University of Yamanashi
†† 南山大学
Nanzan University

$$A(z_i, z_j, \alpha) = \left\{ z : \frac{|z - z_i|}{|z - z_j|} < \alpha \right\} \tag{4}$$

を根 z_i，z_j を定点とした Apollonius 円という．また α を Apollonius 比という．

定義 2.3（Apollonius 領域）
集合

$$A(z_i, \alpha) = \bigcap_{j \neq i} A(z_i, z_j, \alpha) \tag{5}$$

を z_i の Apollonius 領域という．

以上の定義より，

$$A(z_i, \alpha) = \{z : d_i(z) < \alpha\} \tag{6}$$

である．

定義 2.4（Voronoi 領域）
以下を満たす領域 $V(z_i)$ を z_i を母点とした Voronoi 領域という．

$$V(z_i) = \left\{ z : \frac{|z - z_i|}{|z - z_j|} < 1 \, , \, j \neq i \right\} \tag{7}$$

以降では，代数方程式の次数 $n \geq 2$，反復法の次数 $p \geq 2$ を仮定する．反復法 φ による反復列が根 z_i に収束するような初期値の集合$\boldsymbol{U}(z_i) = \{z \,|\, \lim_{\nu \to \infty} \varphi^{\nu}(z) = z_i\}$ を z_i への収束範囲[3] と呼ぶ．また，$\boldsymbol{U}(z_i)$ の開核を z_i への収束領域 $U(z_i)$ と呼ぶ．$U(z_i)$ の連結成分で z_i を含むものを直接収束領域 $U_0(z_i)$ という．直接収束領域内の点を初期値とした反復列は直接収束領域内を動き，根 z_i に収束する．我々は安定な収束を保証する初期値の集合として，直接収束領域の部分集合である単調一次収束領域を定義する．

定義 2.5（単調一次収束領域）
式 (8) を満す収束率 c $(0 \leq c < 1)$ が存在する点 $z \in U_0(z_i)$ 全体の集合を，根 z_i への単調一次収束領域 $D(z_i) \subset U_0(z_i)$ という．

$$d_i(\varphi^{k+1}(z)) \leq c d_i(\varphi^k(z)) \;\; (k \geq 0) \tag{8}$$

いま，簡単のため反復のインデックスを省略し，$\zeta_i := \varphi^{\nu}(z) - z_i$，$\tilde{\zeta}_i := \varphi^{\nu+1}(z) - z_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ と書く．領域 $A(z_i, \alpha)$ が単調一次収束領域に含まれるための十分条件は，任意の j $(1 \leq j \leq s, j \neq i)$ と α' $(0 \leq \alpha' < \alpha)$ に対し，c $(0 \leq c < 1)$ が存在して，

$$z \in A(z_i, \alpha') \Rightarrow |\tilde{\zeta}_i / \tilde{\zeta}_j| \leq c |\zeta_i / \zeta_j| \tag{9}$$

が成立することである．

3. Pomentale 法

$f(z)$ の対数微分を z_0 $(\neq z_i, i = 1, \ldots, s)$ で Taylor 展開する．

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \sum_{i=1}^{s} \left\{ \frac{-n_i}{z_i - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{z_i - z_0} \right)^k \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z_0)(z - z_0)^k \end{aligned} \tag{10}$$

ただし，

$$c_k(z) = \sum_{i=1}^{s} \frac{-n_i}{(z_i - z)^{k+1}} \tag{11}$$

である．$(f'(z)/f(z))^{(k)} = k!\, c_k(z)$ を用いて，代数方程式に対する Pomentale 法は

$$\varphi(z) = z + \frac{c_{p-2}(z)}{c_{p-1}(z)} \quad (p \geq 2) \tag{12}$$

で定義される p 次収束の反復法である．

いま，$p \geq 2$，N を正定数として，以下の方程式を考える．

$$N \alpha^{p-1} = \frac{1 - \alpha}{1 + 3\alpha} \tag{13}$$

これについて，以下の補題が成り立つ．

補題 3.1 方程式 (13) は区間 $(0, 1)$ に唯一の実解 α_p を持つ．また，$0 \leq \alpha < \alpha_p$ において，

$$N \alpha^{p-1} < \frac{1 - \alpha}{1 + 3\alpha} \tag{14}$$

である．したがって，α_p は p について単調増加で，$\lim_{p \to \infty} \alpha_p = 1$．
(証明は文献 4) の補題 5.1 のものを参照)

次の定理は，p 次 Pomentale 法と，それに対応する Apollonius 比 α_p の関係を示す．

定理 3.1 $N = N_i := (n - n_i)/n_i$ とした方程式 (13) の区間 $(0, 1)$ における唯一の実解を α_p とすると，$A(z_i, \alpha_p)$ は根 z_i に対する p 次 Pomentale 法の単調一次収束領域に含まれる．また，

$$\begin{aligned} A(z_i, \alpha_2) \subset A(z_i, \alpha_3) \subset \cdots \\ \subset A(z_i, 1) = V(z_i) \end{aligned} \tag{15}$$

である．

証明 式 (9) を $i = 1$，$j = 2$ について示す．任意の i，j $(i \neq j)$ についても同様に証明できる．

$z \in A(z_1, \alpha')$ $(0 < \alpha' < \alpha_p)$ とする．式 (11) より，

$$c_{p-1}(z) = \sum_{i=1}^{s} \frac{-n_i}{(-\zeta_i)^p} = \frac{-n_1(1 + \Delta_p)}{(-\zeta_1)^p} \tag{16}$$

$$c_{p-2}(z) = \frac{-n_1(1 + \Delta_{p-1})}{(-\zeta_1)^{p-1}} \tag{17}$$

を得る．ただし，

$$\Delta_k = \sum_{i=2}^{s} \frac{n_i}{n_1} \left(\frac{\zeta_1}{\zeta_i} \right)^k \tag{18}$$

である．これより，

$$\tilde{\zeta}_1 = \zeta_1 + \frac{c_{p-2}(z)}{c_{p-1}(z)} = \zeta_1 - \frac{1+\Delta_{p-1}}{1+\Delta_p}\zeta_1 \ ,$$
$$\tilde{\zeta}_2 = \zeta_2 + \frac{c_{p-2}(z)}{c_{p-1}(z)} = \zeta_2 - \frac{1+\Delta_{p-1}}{1+\Delta_p}\zeta_1 \ ,$$
$$\frac{\tilde{\zeta}_1}{\tilde{\zeta}_2} = \frac{(\Delta_p - \Delta_{p-1})(\zeta_1/\zeta_2)}{(1+\Delta_p) - (1+\Delta_{p-1})(\zeta_1/\zeta_2)}$$

補題 3.1 の不等式 (14) で，$N = N_1$ とし，$0 < \lambda < 1$ を，

$$N\alpha'^p = \lambda\frac{\alpha'(1-\alpha')}{1+3\alpha'}$$

で定める．これにより，

$$\begin{aligned}|\Delta_p| &\le \sum_{i=2}^{s}\frac{n_i}{n_1}\left|\frac{\zeta_1}{\zeta_i}\right|^p < N\alpha'^p \\ &= \lambda\frac{\alpha'(1-\alpha')}{1+3\alpha'} < \frac{\alpha'(1-\alpha')}{1+3\alpha'}, \qquad (19)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\Delta_{p-1}| &\le \sum_{i=2}^{s}\frac{n_i}{n_1}\left|\frac{\zeta_1}{\zeta_i}\right|^{p-1} < N\alpha'^{p-1} \\ &= \lambda\frac{(1-\alpha')}{1+3\alpha'} < \frac{(1-\alpha')}{1+3\alpha'} \qquad (20)\end{aligned}$$

と評価できる．式 (19)，(20) より，

$$\begin{aligned}&|1-(\zeta_1/\zeta_2)-\Delta_p-(\zeta_1/\zeta_2)\Delta_{p-1}| \\ &\quad > (1-\alpha') - |\Delta_p| - \alpha'|\Delta_{p-1}| \\ &\quad > \frac{(1-\alpha')(1+\alpha')}{1+3\alpha'} > 0\end{aligned}$$

これらを用いて，

$$\begin{aligned}\left|\frac{\tilde{\zeta}_1}{\tilde{\zeta}_2}\right| &\le \frac{|\Delta_p|+|\Delta_{p-1}|}{1-\alpha'-|\Delta_p|-\alpha'|\Delta_{p-1}|}\left|\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right| \\ &\le \frac{\lambda\frac{\alpha'(1-\alpha')}{1+3\alpha'}+\lambda\frac{1-\alpha'}{1+3\alpha'}}{1-\alpha'-\lambda\frac{\alpha'(1-\alpha')}{1+3\alpha'}-\lambda\frac{\alpha'(1-\alpha')}{1+3\alpha'}}\left|\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right| \\ &\le \frac{(1+\alpha')\lambda}{1+3\alpha'-2\alpha'\lambda}\left|\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right| = c\left|\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right| \qquad (21)\end{aligned}$$

ここで，

$$c = \frac{(1+\alpha')\lambda}{1+3\alpha'-2\alpha'\lambda}$$

である．そして，$0 < \lambda < 1$ より，

$$0 < c = \frac{(1+\alpha')\lambda}{1+3\alpha'-2\alpha'\lambda} < \frac{1+\alpha'}{1+3\alpha'-2\alpha'} = 1$$

である．

後半部分は，補題 3.1 より明らか． （証明終）

図 1 に $n = 6$ の代数方程式の重複度 n_i =1，2，3 の根に対する Pomentale 法の次数と Apollonius 比の関係を示す．

この図より，Pomentale 法の次数の増加にともなう

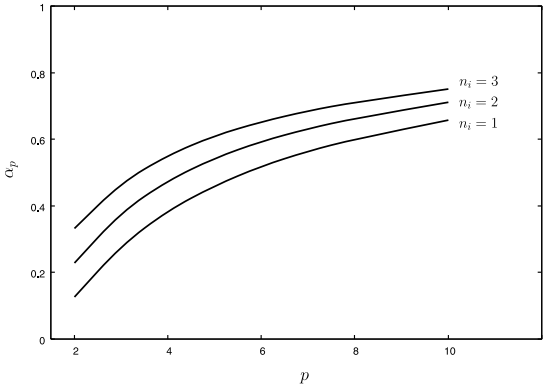

図 1 Pomentale 法の次数と Apollonius 比
Fig. 1 Order of convergence and Apollonius ratio (Pomentale's method).

Apollonius 比の変化の様子が分かる．また，根の重複度 n_i が大きい方が広い Apollonius 領域を持つことが分かる．

次に，$f_1(z) = (z-z_1)^{n_1}(z-z_2)^{n_2}(z-z_3)^{n_3}$ に対して，収束次数，収束領域，Apollonius 領域と根の重複度の関係を**図 2** に示す．ただし，$z_1 = 1+i$，$z_2 = -1+i$，$z_3 = -i$，$n_1 = 1$，$n_2 = 2$，$n_3 = 3$ とする．図 2 における Pomentale 法の次数は上から順に 2，4，8 である．また，f_1 の根は $\times$ ，各根の Apollonius 領域の境界は実線，収束領域は濃淡を付けた影付きで示されている．各根への収束領域は，反復停止条件として $|f(\varphi^\nu(z))| < 10\epsilon_M$ または $\nu \ge 30$，収束先の判定として $|\varphi^\nu(z) - z_i| < 10^{-4}$ を用いた．

この図より，各根への収束領域，Apollonius 領域は次数が低いとき（$p = 2$）には根の重複度に応じてその広さは大きく異なるが，次数の増加にともなって大きな違いは見られなくなり，$p = 8$ ではすでに収束領域が Voronoi 領域に近くなっている．

4. ま と め

重複根を持つ一変数代数方程式に対して，任意次数の反復法である Pomentale 法について文献 4) と同様の解析を行った．その結果，Nourein 法と同様に，Pomentale 法でも次数の増加にともない Apollonius 領域が広がり，Voronoi 領域に漸近することを示した．これは，安定した収束を保証する単調一次収束領域が次数の増加とともに拡大することを意味する．

また，根の重複度との関係は，n_i が大きい方が広い Apollonius 領域を持つことが分かった．ただし，定理 3.1 より，$p \to \infty$ の極限においては根の重複度に関係なくその収束領域は Voronoi 領域に等しい．

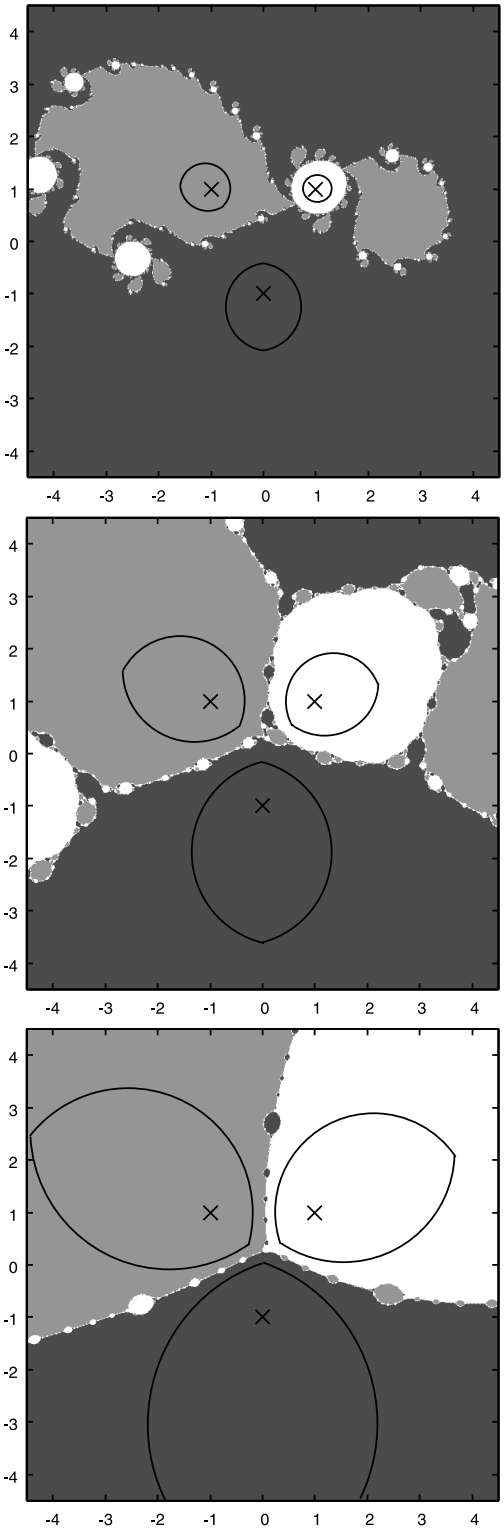

図 2 Pomentale 法（$p = 2, 4, 8$）による f_1 の根への収束領域と Apollonius 領域

Fig. 2 Convergence region and Apollonius region of roots of f_1 with Pomentale's method ($p = 2, 4, 8$).

参 考 文 献

1) Nourein, A.W.: Root determination by use of Padé approximants, *BIT*, Vol.16, pp.291–297 (1976).
2) Pomentale, T.: A class of iterative method for holomorphic functions, *Numer. Math.*, Vol.18, No.3, pp.193–203 (1971).
3) 佐藤幸平：1 変数複素有理反復法の収束範囲の形状について，情報処理学会論文誌，Vol.19, No.8, pp.722–729 (1978).
4) 鈴木智博，杉浦　洋：代数方程式に対する高次 Nourein 法の収束特性，情報処理学会論文誌，Vol.46, No.10, pp.2505–2512 (2005).

(平成 17 年 11 月 15 日受付)
(平成 18 年 1 月 6 日採録)

鈴木　智博（正会員）

1966 年生．1989 年山梨大学工学部卒業．1991 年山梨大学大学院工学研究科修了．同年山梨大学工学部電子情報工学科助手．1998 年山梨大学工学部コンピュータ・メディア工学科助手．博士（学術）．非線形方程式の数値解法，精度保証付き数値計算に興味を持つ．日本応用数理学会会員．

杉浦　　洋（正会員）

1952 年生．1975 年名古屋大学理学部数学科卒業．1978 年名古屋大学大学院理学研究科数学専攻修士課程修了．1981 年名古屋大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程満了．1982 年名古屋大学大学工学部助手．2003 年名古屋大学大学情報科学研究科助教授．2004 年より南山大学数理情報学部教授．工学博士．関数近似，代数方程式と精度保証に興味を持つ．日本応用数理学会会員．