## 大域照明問題解法のための フォトンマッピングの効率化に関する研究

渡部  $心^{1,\dagger 1}$  池田 翔<sup>1</sup> 玉木 徹<sup>1</sup> Raytchev Bisser<sup>1</sup> 金田 和文<sup>1</sup>

概要:本論文では Adaptive MCMC Progressive Photon Mapping (AMCMCPPM) の改善手法を提案 する. AMCMCPPM では,通常のモンテカルロ法を用いた Photon Mapping が苦手とするシーン,す なわちフォトン経路の可視性が低いシーンを,マルコフ連鎖モンテカルロ法を用いることによって頑健 に扱うことができる.また,マルコフ連鎖における提案分布のサイズを,目標採択率という基準に従って シーンに応じて自動的に調整することができる.しかしオリジナルの論文で採用されている目標採択率は 多くのシーンでは適切ではないと考えられる.また,提案分布のサイズが全ての次元に対して等しく設定 されているため,小さな提案分布を用いる場合にサンプル列の相関が高くなってしまい推定結果の悪化を 招いてしまう.そこで本論文では,実験により適切な目標採択率を求め,オリジナルの目標採択率よりも 高い値によってアルゴリズムが効率化されることを示す.また,フォトントレーシングによる経路構築の 際,低次元に限定した変異を行うことで,相関を減らし結果を改善する手法を提案する.実験では通常の Photon Mapping にとって困難なシーン程,提案手法が効率化に貢献することを確認した.

### Optimization of Photon Mapping for Solving a Global Illumination Problem

WATANABE SHIN<sup>1,†1</sup> IKEDA SHO<sup>1</sup> TAMAKI TORU<sup>1</sup> RAYTCHEV BISSER<sup>1</sup> KANEDA KAZUFUMI<sup>1</sup>

#### 1. はじめに

あらゆるシーンにおいて効率的かつ頑健な大域照明手法 の開発は、コンピュータグラフィックスの分野において長 年の研究課題である.大域照明を計算するアルゴリズムの 多くはモンテカルロ法を用いてレンダリング方程式 [1] を 解く.このモンテカルロレイトレーシングに分類される手 法は、ジオメトリの複雑性にあまり影響を受けない点や、 あらゆる反射特性が扱える利点から主流の手法となって いる.

Metropolis Light Transport [2] は、マルコフ連鎖モンテ カルロ法 (MCMC) を大域照明問題に適用した手法である. ある寄与の大きな経路に似た経路は同様に大きな寄与を持 つ,という洞察のもと,経路を毎回サンプルし直すのでは なく,前回の経路にわずかな変異を加えることによって経 路を生成する.これによって前述のような一般的に困難と 考えられるシーン設定を頑健にレンダリングすることが可 能となる.

しかし, Metropolis Light Transport などを含む統計的 に不偏な手法において, 効率的に計算することが非常に難 しい光の経路が存在する.光源から出た光が鏡面反射 (透 過)し, 拡散面に当たり, 再び鏡面に反射して視点に届く ような経路 (SDS パスと呼ばれる)がこれに相当する.こ の経路は非常に身近に存在する.何故なら現実の多くの光 源は発光体がガラスのような鏡面透過を起こす物質に囲ま れているためである.したがって, このような経路を効率 的に計算できない場合, 写実的な画像生成において非常に 不利になる.

Progressive Photon Mapping (PPM) [3] は統計的に偏り のある手法であるが, SDS パスを効率的に扱うことのでき

広島大学 大学院 工学研究科 情報工学専攻 Department of Information Engineering, Graduate School of Engineering, Hiroshima University

<sup>&</sup>lt;sup>†1</sup> 現在, (株) ソニー・コンピュータエンタティンメント Presently with Sony Computer Entertainment Inc.

る手法である. PPM は光源から多くの経路追跡を行い, 衝 突点に関する情報をフォトンマップとして記録する. 視点 からもレイトレースを行い, 衝突点周囲の照明情報をフォ トンマップから計算する. しかし, フォトンマップの構築 段階において, 視点から見えている範囲を考慮していない ため, シーン全体に対してごく一部のみを見ている場合な どに非効率なアルゴリズムになってしまう.

Adaptive MCMC PPM (AMCMCPPM) [6] は MCMC を PPM に適用した手法であり,光源からの経路の可視性 を目的分布としたマルコフ連鎖を実行することにより前 述のようなシーンも頑健に扱うことができる. MCMC で は適切なサイズの提案分布を用いることが推定結果の素 早い収束にとって重要であるが,適切なサイズは問題依存 であり,ユーザーがパラメーターを調整する必要がある. AMCMCPPM では,アルゴリズムの過程において適応的 に提案分布のサイズを調整することによってパラメーター 調整の不要なアルゴリズムとなっている.

AMCMCPPM ではパラメーター自動調整のための基準 として目標採択率と呼ばれる値が設定されている.本稿で は、オリジナルの論文における目標採択率の設定値が多く のシーンにおいて適切ではないことを実験によって確かめ、 より良い値を求める.また、光源からの経路追跡の際に低 次元に限定した変異を行うことで、マルコフ連鎖のサンプ ル間の相関を低減し推定結果を改善する手法を提案する.

本論文の構成を次に示す.第2節で従来手法のアルゴリ ズムについて概説する.第3節では提案手法について説明 する.第4節は提案手法と従来手法との比較を行い,そし て第5節にてまとめと今後の課題について述べる.

#### 2. 関連研究

#### 2.1 Photon Mapping

Photon Mapping [4] は2段階のアルゴリズムである.第 一段階では、光源からエネルギーを持ったフォトンを射出 し、確率的に経路を追跡するフォトントレーシングを十分 な回数繰り返し行う.その際に各衝突点における座標や フォトンの入射方向などの情報をフォトンマップとして記 録する.第二段階では、視点からレイをトレースし衝突点 において、ある半径中で密度推定を行い輝度を推定する. より多くのフォトンをトレースし、小さい探索範囲に多く のフォトンとすることで Photon Mapping の推定精度を向 上させられる.しかし、Photon Mapping の推定精度はメ モリ容量に制限されてしまう.

#### 2.2 Progressive Photon Mapping

Progressive Photon Mapping (PPM) [3] は Photon Mapping の推定精度がメモリ容量に制限されてしまう問題を解 決した手法である. PPM ではまず視点からレイトレース を行い, 衝突点を記録する. 次にフォトントレーシングパ



図 1: モンテカルロレイトレーシングでは, primary sample space 中の点が経路に対応づけられる. また, primary sample space 中で近い点は同じ手法を用いた場合, 似た経路を形成すると考えられる.

スを実行し、フォトンマップを構築,記録した各衝突点で 密度推定を行いフォトン数や放射束の情報などの統計量を 記録する.統計量の記録後にはフォトンマップを破棄し, 新たなフォトントレーシングパスを実行し,統計量の更新 を行う.更新の際には探索半径の縮減を行う.半径内に記 録されたフォトン数が繰り返しの度に増加するという条件 を満たすように縮減することで,極限的には無限小の半径 に無限個のフォトンを有限のメモリで実現できる.

#### 2.3 Primary Sample Space

モンテカルロレイトレーシングに属する手法は確率的に 光輸送経路を構築する.この際,視点や光源からのレイの 出射位置や方向,物体表面での反射方向などはそれぞれ, いくつかの [0,1]の乱数を用いて決定される.そのためあ る経路の構築には多くの [0,1]の乱数が用いられる.これ は超立方体中のある座標値を経路空間へと対応づけてい ると考えることができ,この超立方体を primary sample space[5] と呼ぶ.一般的に同じ手法を用いて経路を構築す る場合, primary sample space 中で近い点は,経路空間で も似た経路を形成すると考えられる (図 1).

#### 2.4 Adaptive MCMC Progressive Photon Mapping

PPM は、フォトントレーシング処理において視点から見 えている範囲を考慮していないため、シーンのごく一部を 見ているような場合、ほとんどのフォトン経路のトレース が無駄な計算となってしまう. AMCMCPPM [6] は PPM に MCMC の考えを導入することによって、そのような困 難なシーンのレンダリングを頑健に行える.

AMCMCPPM ではまず視点からのレイトレーシングを 行い,計測点を記録する.続くフォトントレーシングパス では,既存のフォトン経路に対して primary sample space 中の座標値にわずかな変異を加えることで,新たな経路候 補を生成する.その際,各衝突点において近傍の計測点を 探索し,1つでも寄与できた場合は採択,できなかった場 合は棄却する.すなわち,フォトン経路が計測点に対して 可視である場合は1,不可視である場合は0となる二値関 数を MCMC における目的分布とする.このシンプルな目



図 2: AMCMCPPM ではフォトン経路の可視性を目的 分布とする.フォトン経路の可視分布を primary sample space 内で考えることができる.緑の経路は可視だが,赤 色の経路は不可視である.

的分布によってマルコフ連鎖が局所的なピークに捕らえら れることはないものの, primary sample space 中で0をと る広い領域の内部に値が1である「島」を形成し得る.サ ンプルがこの島に入ってしまうと大きな変異が実行されな い限り島から出ることができず,推定結果の悪化を招く. AMCMCPPMでは,フォトン経路の可視性を目的分布と したマルコフ連鎖に加えて,一様分布を目的分布としたマ ルコフ連鎖を同時に扱い,2つのマルコフ連鎖の間でサン プルの交換を行う(レプリカ交換法).これによって一部の 領域にサンプル列が捕らえられることが無くなる.

MCMC では、既存のサンプルに変異を加えて新たなサ ンプル候補を生成、適切なルールのもと採択もしくは棄却 を行うことで、ランダムウォークが目的分布に比例して分 布する.変異の適切な大きさはシーン依存のパラメーター であり、大きすぎる変異は棄却確率が高くサンプル列の相 関が増加する.一方で小さすぎる変異もまたサンプル列の 相関が強くなり、いずれの場合も推定結果の悪化を招く. AMCMCPPM は、マルコフ連鎖の過程における変異の採 択率から適応的に変異サイズを調整し、シーンに依存せず 適切な変異を行うことができる.具体的には変異サイズを 次の式で調整する.

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \gamma_i (A_i - A^*) \tag{1}$$

ここで, $\theta_i$ は*i*番目のマルコフ連鎖における変異サイズ を表しており,初期変異サイズ $\theta_1 = 1$ である. $\gamma_i = 1/i$ で,変異サイズの適応が極限では行われないようにするた めの項で,目的分布をそのままにしておくために必要で ある.  $A_i$ は*i*番目の連鎖を終えた時点での採択率, $A^*$ は 目的採択率である. Hachisuka らは目的採択率は 23.4%が 良い値だと述べている [6]. この式は採択率が高すぎる場 合 ( $A_i - A^* > 0$ )は変異サイズが小さすぎると判断し,サ イズを増加させることを表している. 同様に採択率が低 すぎる場合 ( $A_i - A^* < 0$ )は変異サイズが大きすぎると 判断し,サイズを減少させる. この変異サイズを用いて primary sample space 中のサンプル点の座標の変化量を次 のように決定する.

$$\Delta u = \operatorname{sgn}(2\xi_0 - 1)\xi_1^{\frac{1}{\theta_i} + 1}$$

ここで $\xi_0, \xi_1$  は [0,1]の一様乱数である.  $\theta_i = \infty$ の場合は primary sample space 中で一様分布からサンプリングし直 すことに相当し,  $\theta_i = 0$ の場合は全く変異が行われずに同 じ場所にサンプル点が留まる. AMCMCPPM では変化量  $\Delta u$ を primary sample space 中のサンプル点の座標の全て の次元に適用する. すなわち現状のサンプル点  $u_0$  に対して 変異されたサンプル点は  $u_1 = (u_{0,1} + \Delta u_1, u_{0,2} + \Delta u_2, ...)$ として計算される.

#### 3. 提案手法

#### 3.1 目標採択率の変更による AMCMCPPM の効率化

AMCMCPPM では、どのようなシーンが設定された場 合でも,(1)式に従い採択率を制御することで,変異サイ ズを適応的に変化させ、頑健なレンダリングを可能として いる.変異サイズ制御の基準として目標採択率が設定され ている. 目標採択率が高すぎる場合, 変異量が小さくなり 過ぎ,MCMCのサンプル空間の探索が遅くなってしまう. 逆に目標採択率が低すぎる場合,変異量が大きくなり過ぎ, 変異が棄却される確率が高くなり、これも同様にサンプル 空間の探索が遅くなってしまう. MCMC では可分である 関数を目標分布とする場合 23.4%が最適な目標採択率であ る [7] とされており、不可分な関数に関しても同じ値が実用 上うまくはたらくことが示されている [8]. AMCMCPPM では同様に23.4%という値が目標採択率に採用されている が、AMCMCPPM では一様分布とレプリカ交換を行うこ とによってサンプル空間の効率的な探索を可能としている ため、より高い目標採択率がうまくはたらくと予想される.

# 3.2 低次元に限定した変異による AMCMCPPM の効率化

AMCMCPPM では、Photon Mapping が苦手とするシーン、すなわちシーン全体に対して小さな領域を見ている場合や、わずかに開いたドアのような狭い領域を通過する光が重要になるシーン、これらのシーンを効率的に計算するために MCMC を用いている。MCMC を用いることで、一度構築された有効なフォトン経路に小さな変異を加えることによって、同様に有効なフォトン経路が構築されやすくなっている。しかし小さな変異は、新たなフォトン経路が前回の経路に対して高い相関を持つことを意味し、高い相関が推定結果の悪化を招くことが Ashikhmin らによって示されている [9]. オリジナルのアルゴリズムでは、経路を構築するための primary sample space 中の新たな点 *u*<sub>1</sub> を次式のように決定する.

#### $\boldsymbol{u}_1 = (u_{0,1} + \Delta u_1, u_{0,2} + \Delta u_2, \dots, u_{0,k} + \Delta u_k)$

ここで $u_{0,k}$ は前回の点のk次元目の座標値, $\Delta u_k$ はk次元目に対する変異幅である。全ての次元の変異幅は同じサイズ調整パラメーターを用いて決定されている。しかし上



図 3: わずかな領域を通過する光が重要となるシーン. このようなシーンの場合,変異が重要となるのは部屋に フォトンが入射する段階までである.



図 4: 提案手法ではその他の AMCMCPPM と同様に前 回の経路 (破線) に変異を加えて新たな経路 (実線) を生 成するが,可視性を獲得できれば (赤点),続く経路の構 築では一様分布を用いる.

述のシーンを考えると、小さな変異を加えるのはフォトン 経路の途中までで十分であることがわかる (図 3). つまり フォトン経路の構築において、一度重要な領域を通過して 経路が可視となれば、その先の構築は大きな変異を用いる ほうが良い.可視であるフォトン経路の中でも、例えば多 くの計測点に寄与する経路の価値を大きく考えることもで き、その場合にはフォトン経路全体に対する変異が重要と なる.しかし、AMCMCPPM ではマルコフ連鎖が一部の 領域に捕らえられることを防ぐために、可視であるフォト ン経路は全て同じ価値であるとみなされる.

提案手法では,前回のフォトン経路に変異を加えて新たな経路を構築する際に,一つでも計測点に寄与できれば,続く経路の構築では一様分布を用いる(図4). primary sample space 中で,*i*次元目の値までで可視性が獲得できた場合,続く次元は一様乱数で値が決定される.

 $\boldsymbol{u}_1 = (u_{0,1} + \Delta u_1, ..., u_{0,i} + \Delta u_i, \xi_{i+1}, \xi_{i+2}, ..., \xi_k)$ 

ここで, ξ は一様乱数である.これによって前回の経路との相関を低減し推定結果を改善する.3.1 節では,AMCM-CPPM では高めの採択率が良いことを述べた.より高い 採択率をとることは,小さな変異を行うことを意味する が,この低次元のみに変異を行う手法を組み合わせること によってさらなる推定結果の改善が期待される.

#### 4. 実験と結果

オリジナルの AMCMCPPM のアルゴリズムと,前節の 提案手法を適用したアルゴリズムを実装した.全てのシー ンは次に示す環境でレンダリングした.全てのシーンはス ペクトラルレンダリングを用いてレンダリングし,後述す る RMS 誤差比較では結果のスペクトル画像をディスプレ イに表示するために RGB に変換したものを用いた.マル コフ連鎖を並列処理することは困難であるため,独立した AMCMCPPM のアルゴリズムを8スレッド並列で走らせ, 各スレッド1パスあたり 100,000 フォトンのトレーシング を行い,全ての平均を結果画像としている.フォトン探索 における初期半径はおおよそ画像上で4ピクセル程度にな るように設定した.半径削減のパラメーターαは2/3 [10] と設定した.

まずは 3.1 節に関する実験として、シーン 1(図 5)、シー ン 2(図 7)、シーン 3(図 9) それぞれにおいて、目標採択率 を 10%、20%、40%、60%、80%、90%に設定してレンダリン グを行い、結果画像の RMS 誤差を比較した.シーン 1、2 は AMCMCPPM 以外の手法ではレンダリングが困難で あるため、リファレンス画像は AMCMCPPM を用いて、 シーン 1 は約 47,000 秒、シーン 2 は約 57,000 秒かけて作 成した.シーン 3 は Bidirectional Path Tracing を用いて 約 80,000 秒かけて作成した.

図6より,シーン1では目標採択率が60%が最良の推 定結果となっていることがわかる.図8より,シーン2で は80%が最良の推定結果となっているが60%も近い精度 が得られている.図10より,シーン3では60%が最良の 推定結果となっている.また,いずれのシーンにおいても 10%や90%といった極端な目標採択率では推定結果が悪化 していることがわかる.これらの結果より,60%程度の目 標採択率とすることで安定して良い推定結果が得られるこ とがわかる.

なお,これら3つのシーンでは,一様分布からのサンプ リングで有効な経路が生成される割合が異なっている.レ ンダリング開始後300秒の時点で,シーン1は約0.022%, シーン2では約24%,シーン3は0.014%である.AMCM-CPPMでは,一様分布から有効なフォトン経路のサンプリ ングに成功した場合は変異を行わないため,一様分布から 有効な経路がとりやすいシーン3では目標採択率による差 が少なくなっている.

次に 3.2 節で提案した手法に関する実験として,同じ目 標採択率に設定した場合の,従来手法の結果と,提案手 法を適用した結果の RMS 誤差を比較した.目標採択率と してオリジナルの 23.4%と上記実験で良い結果の得られた 60%の 2 パターンを実験した.すなわち全体で4 パターン のレンダリングを行った.実験結果のグラフ (図 11-13) で は,目標採択率だけ記述された線が従来手法を,LM と記 述された線が提案手法を表している.

それぞれのグラフより表1に結果をまとめた.目標採択 率 60%に設定された従来手法が 600 秒かけて生成した画像 の RMS 誤差に,同じ目標採択率の提案手法が到達するレ ンダリング時間を計測し,その削減率を2列目に示した. また,オリジナルの手法,すなわち目標採択率が 23.4%に 表 1: 低次元に限定した変異を行う提案手法に関する実験結果.2列目は,目標採択率 60%に設定された従来手法が 600 秒かけて生成した画像の RMS 誤差に,同じ目標採択率の提案手法が到達するレンダリング時間を計測し,その削減率 を示している.3列目は,目標採択率 23.4%の従来手法の 600 秒時点での RMS 誤差に,目標採択率 60%の提案手法が 到達するレンダリング時間を計測し,その削減率を示している.4列目は,一様分布から有効なフォトン経路がサンプ リングできる割合を示している.

シーン	目標採択率 60%	23.4%のオリジナルとの比較	一様分布からの
	削減率		サンプルが有効な割合
1	30%	55%	0.022%
2	0%	36%	24%
3	15%	83%	0.014%



図 5: シーン 1. 部屋の外に配置された面光源の光が天井 のガラスを通して部屋を照らしている.

設定された従来手法で、同様に 600 秒かけた時点の RMS 誤差に目標採択率 60%の提案手法が到達する時間を計測 し、その削減率を3列目に示した.シーン1では提案手法 により、同じ目標採択率 60%に設定された従来手法に対し て約30%の高速化に成功した.シーン3においても差は小 さくなるが高速化に成功している. 唯一シーン2では,提 案手法により高速化が実現されていない.シーン2はその 他のシーンに比べ、一様分布から有効な経路がサンプリン グしやすいため、変異によって経路を生成する機会が少な く, また変異サイズも大きくなるためサンプル列の相関が もともと小さく提案手法の効果が小さくなったと考えられ る. 目標採択率が 23.4%のオリジナルの手法と, 60%の提 案手法を比較すると、いずれのシーンにおいても 30%以上 の計算時間の削減が実現されている.表1には示していな いが,目標採択率を23.4%に設定した場合の提案手法と従 来手法の比較は、全てのシーンにおいてほとんど差が生じ なかった.低い目標採択率の場合は変異サイズが大きくな るようにはたらくため,これも同様にサンプル列の相関が もともと小さかったためと考えられる.全体的な傾向とし て,提案手法は一様分布からのサンプリングが困難なシー ンほど有効にはたらくことが言える.

#### 5. まとめと今後の課題

本論文では,オリジナルの AMCMCPPM が目標採択率 として設定している 23.4%が多くのシーンで最適ではない ことについて述べ,60%程度の目標採択率が効率的である





図 6: シーン 1 において目標採択率を変更したときの RMS 誤差の比較.

図 7: シーン 2. 部屋の右側外にある指向性光源の光が壁 の穴を通過し,左に配置された鏡で反射,さらにガラス のうさぎを通過することで複雑な集光模様が生じている.



図 8: シーン 2 において目標採択率を変更したときの RMS 誤差の比較.

ことを実験によって確かめた.また高い目標採択率に設定 することでサンプル列の相関が増加し,推定結果が悪化す る可能性があるが,フォトン経路の可視性に重要なのは一 部のセグメントのみであるという洞察のもと,低次元に限 定した変異を提案し,実験でその効果を確かめた.



図 9: シーン 3. シーン全体に対して非常に小さい領域を 見ている例.通常のフォトントレーシングでは視界に対 して有効なフォトン経路がほとんど生成されず,推定結 果の分散が大きくなってしまう.



図 10: シーン 3 において目標採択率を変更したときの RMS 誤差の比較.



図 11: シーン1において,目標採択率を23.4% / 60%に 設定した場合,低次元に限定した変異を行う提案手法を 適用しなかった / 適用した (LM) 場合それぞれの組み合 わせの RMS 誤差の比較.



図 12: シーン2において,目標採択率を23.4% / 60%に 設定した場合,低次元に限定した変異を行う提案手法を 適用しなかった / 適用した (LM) 場合それぞれの組み合 わせの RMS 誤差の比較.



図 13: シーン 3 において,目標採択率を 23.4% / 60%に 設定した場合,低次元に限定した変異を行う提案手法を 適用しなかった / 適用した (LM) 場合それぞれの組み合 わせの RMS 誤差の比較.

今後の課題としては次のことが挙げられる.今回は実験 的に適切な目標採択率の値を求めたが,シーン毎に最適な 値を設定するための,理論や洞察に基づいた目標採択率の 決定方法の開発がある.また,今回の提案手法のように, 次元毎に異なる変異サイズを導入する考えは他の MCMC を用いた手法にも応用できると考えられるため,例えばメ トロポリス光輸送法やその発展手法への応用も興味深い.

#### 参考文献

- KAJIYA, J. T. 1986. The rendering equation. ACM SIGGRAPH 1986, vol. 20, 143-150.
- [2] VEACH, E., AND GUIBAS, L. J. 1997. Metropolis light transport. ACM SIGGRAPH 1997, 65-76.
- [3] HACHISUKA, T., OGAKI, S., AND JENSEN, H. W. 2008. Progressive photon mapping. ACM Trans. Graph. 27, 5, Article 130.
- [4] JENSEN, H. 1996. Global illumination using photon maps. *Rendering Techniques '96*, 21-30.
- [5] CSABA, K., SZIRMAY, K. L., GYORGY, A., FERENC, C. 2002. A Simple and Robust Mutation Strategy for the Metropolis Light Transport. *Comput. Graph.* 21, 3, 531-540
- [6] HACHISUKA, T., AND JENSEN, H. W. 2011. Robust adaptive photon tracing using photon path visibility. ACM Trans. Graph. 30, 114:1-114:11.
- [7] ROBERTS, G. O., GELMAN, A., AND GILKS, W. R. 1997. Weak convergence and optimal scaling of random walk metropolis algorithms. *Ann. Appl. Probab.* 7, 1, 110-120.
- [8] ROSENTHAL, J. S., BROOKS, S., GELMAN, A., JONES, G., AND L. MENG, X. 2008. Optimal proposal distributions and adaptive MCMC. *MCMC Handbook*.
- [9] ASHIKHMIN, M., PREMOZE, S., SHIRLEY, P., SMITS, B. 2001. A variance analysis of the metropolis light transport algorithm. *Comput. Graph.* 25, 2, 287-294.
- [10] KNAUS, C., AND ZWICKER, M. 2011. Progressive photon mapping: A probabilistic approach. ACM Trans. Graph. 30, 25:1-25:13.