

ランダムウォーク電源網解析の高速化に向けた 節点解析順序の検討

岡崎 剛^{1,a)} 廣本 正之¹ 佐藤 高史¹

概要: 半導体プロセス微細化と低電源電圧化により、電源網における IR ドロップ解析の重要性が増している。解析法の一つにモンテカルロ法で電圧近似値を求めるランダムウォーク (RW) 法があり、その並列性の高さから注目を集めている。RW 法では節点電圧を順次求める。その際の節点の解析順が性能に大きな影響を与えることが知られているが、適切な順番については十分な検討がなされていない。そこで本稿では、RW 法における節点解析順序について検討する。解析順の一例として、電圧源を回路内に均等に分布させて効率的に処理時間を減らすことを考える。検討したこの四分割中心とランダムな解析順番を解析に要する総歩数の観点で実験的に評価し、ランダムな解析順の方が数%処理時間が短く、十分妥当であることを確認できた。

1. はじめに

近年、電子機器の電力削減のために LSI の低電源電圧化が進んでいる。また、半導体プロセスの微細化によって配線抵抗が増加する一方、電流密度は増大している。そのため、電源網における電圧降下の影響が大きくなり、LSI の性能低下の要因の一つとなっている。例えば、文献 [1], [2] では、10% の電圧降下が動作周波数を 6%、電力消費を 18% 悪化させたという報告がなされている。LSI の性能を保証するためには高品質な電源網を設計する必要がある。設計した電源網の品質評価には、電源網内の各節点に供給される電源電圧が十分であるかを解析する電源網解析が用いられる。半導体技術の進歩とともに電源網の規模は増大し続けているため、電源網解析に要する時間やメモリ使用量が問題となっており、高速で省メモリな線形回路解析手法が求められている。

線形回路解析は一般に、以下の連立一次方程式を解くことに帰着される。

$$Ax = b \quad (1)$$

ここで、 A はコンダクタンス行列、 b は電流源ベクトル、 x は変数である回路内の節点電位を表す。式 (1) の一般的な解法として、大きく分けて 2 通りのアプローチがある。1 つ目は、LU 分解法に代表される直接法である。これは A の逆行列を求めることで精度よく節点電位 x を得る手法で

ある。この手法の利点は有限回の計算で真の解を求められることであるが、一方で、大規模な回路解析では処理時間が指数関数的に増加することが問題となる [3]。2 つ目は、ヤコビ法に代表される反復法である。これは適当な初期値ベクトル x_0 に対して行列計算を繰り返すことで、ベクトルと真の解の間の誤差を小さくしていく手法である。この手法は、 A の疎行列性を利用できるためにメモリ効率が良いという利点があるが、一方で、収束までに必要な反復回数は行列 A によって決まり、条件が悪い場合には解が収束しない。また、直接法、反復法はいずれも、高効率な並列化が難しいという課題がある。

計算機の性能向上に伴って、線形回路解析をモンテカルロ法により解くランダムウォーク (RW) 法が注目されている [4]。式 (1) を直接扱わずに、乱数を用いて統計的に解の近似値を得るこの手法は、並列性が高く、省メモリであり、特定の節点のみの解析が可能、インクリメンタルな解析が可能といった、大規模な電源網解析に向けた性質を持っている。一方で、時間と精度のトレードオフが存在し、高精度な解を求めるには長い解析時間を必要とする課題があった。解析を高速化するため、重点的サンプリングを適用することで高精度な解を高速に求める準ゼロ分散 (Quasi-zero variance, QZV) 推定が提案されている [5]。これは、全節点の粗い解析と確率の変更を繰り返す手法で、結果的には特定の節点を単独で解析するときより高速に全節点を解析できる。

準ゼロ分散推定の適用により、ランダムウォーク法は大幅に高速化されているが、さらなる高速化が出来る可能性

¹ 京都大学大学院情報学研究科

^{a)} paper@easter.kuee.kyoto-u.ac.jp

がある。そのアプローチの一例として、最適な節点の解析順序を求めることが挙げられる。ランダムウォーク法は節点を単独で解析できるが、複数の節点電位を求めたい場合は解析済みの節点を電位既知の節点として利用すると以降の節点解析を高速化できる。よって、準ゼロ分散推定を用いるときのように回路全体を解析する場合、節点を解析していく順序が最終的な性能に大きく影響を与えられ考える。ランダムな順序とすることで解析時間の安定化を図ることが良いとする文献もあるが [6]、ランダムな解析順がどの程度妥当であるのか、解析順の改善で期待される性能向上等については、十分な検討がなされていない。

本稿では、ランダムな解析順の妥当性を実験的に評価する。まず、高速化の観点から好ましい節点の選び方について検討し、ランダムよりも性能が高いと期待できる解析順の例として四分割中心を挙げる。次に、これとランダムな解析順を簡単な回路や実際の電源網解析ベンチマークに適用し、ランダムな解析順の妥当性を数値的に評価する。

本稿の構成は次の通りである。まず 2 章で RW 法について説明する。次に 3 章で最適解析順序の推測が困難であることを説明し、高速化が期待できる四分割中心について述べる。4 章で規則的な回路や実際のベンチマーク回路を用いて、四分割中心とランダムの性能比較を行い、最後に 5 章でまとめる。

2. ランダムウォーク法による線形回路解析

2.1 ランダムウォーク法

ランダムウォーク法による線形回路解析の原理と手順について説明する [4], [6]。抵抗、電圧源、電流源からなる回路において、ある節点 i に対するキルヒホフの電流則から以下の式が得られる。

$$v_i = \sum_j \frac{g_{i,j}}{\sum_l g_{i,l}} v_j + \frac{I_i}{\sum_l g_{i,l}} \quad (2)$$

ここで $g_{i,j}$ は節点 i, j 間に接続されたコンダクタンス、 v_i は節点 i の電位、 I_i は節点 i に接続する電流源の電流を表す。ランダムウォーク法を用いて節点電位 v_i を求める手順は、以下の通りである。

- I. サンプル番号 k を $k = 1$ とする。
- II. 節点 i にサンプル k を置き、以下の規則に従って電圧源が接続されている節点まで移動させる。一連の処理で得られる得点 x_k を記録する。ただし、 x_k の初期値は 0 とする。
 - (a) 現在地 t に電圧源が接続されている場合、その電圧値 v_t を x_k に加算して移動を終了する。
 - (b) そうでなければ、 x_k に $I_t / \sum_l g_{t,l}$ を加算する。
 - (c) 節点 t の隣接節点 j に確率 $P_{t,j}$ で移動する。確率 $P_{t,j}$ は以下の式で与えられる。

$$P_{t,j} = \frac{g_{t,j}}{\sum_l g_{t,l}} \quad (3)$$

- III. k 個のサンプルの得点 $x_1, \dots, x_k$ の平均値が収束していれば処理を終了する。そうでなければ $k = k + 1$ とし、処理 II を繰り返す。

ランダムウォーク法による線形回路解析では、式 (2) の第 1 項を確率 $P_{i,j}$ で得点 v_j が得られる試行の期待値として求め、第 2 項を加えることで v_i を求める。ただし、隣接節点 j の電位は、節点 j に電圧源が接続されている場合を除き未知であるため、電圧源が接続されている節点まで確率 $P_{t,j}$ からサンプルを移動させ続ける必要がある。節点 i から十分な数のサンプルを使ったランダムウォークを行えば、サンプル得点の平均値がその節点の電位 v_i に収束することが証明されている [6]。

以上のように、ランダムウォーク法は特定の節点のみを任意の精度で解析することが可能である。もし複数の節点電位を計算したい場合は、以下のように解析時間の短縮が可能である。ランダムウォーク法では、回路中に存在する電圧源が増えればサンプル移動のゴールが増えるため、1 サンプルあたりの平均移動回数は小さくなる。よって、既に解析を終えた節点の電位を電圧源として扱うことで、以降の節点解析での移動回数を削減し、処理時間を短縮できる。解析順が後の節点ほど解析済の節点電位に含まれる誤差の影響を受けるおそれがあるが、実際には電圧源に含まれる誤差は打ち消しあって影響はあまり大きくならない [6]。

2.2 重点的サンプリングによる準ゼロ分散推定

重点的サンプリングとは、モンテカルロ法の高速度手法の一つである [7]。重点的サンプリングでは、サンプルを発生させる確率密度 f を代替確率密度 g に変更する。確率密度を変えるとモンテカルロ法で求まる推定値は異なるが、重み関数 $W(x) = f(x)/g(x)$ を乗じることでそのバイアスを補正できる。サンプル得点の分散が小さいほど少ないサンプル数で高精度な推定値が計算できるため、重点的サンプリングでは代替確率密度 $g(x)$ の選び方が重要である。

そこで、重点的サンプリングを用いてランダムウォーク法のサンプル移動確率を変更することを考える。節点 i から j への理想的な代替移動確率 $Q_{i,j}$ は

$$Q_{i,j} = \frac{P_{i,j}v_j}{\sum_l P_{i,l}v_l} = \frac{P_{i,j}v_j}{v_i} \quad (4)$$

である。電位が 0 の節点に対する振る舞いに気を付ける必要があるが、これは全節点に電圧オフセットを加えることで解決できる。重み付き得点は $v_j(P_{i,j}/Q_{i,j}) = \sum_l P_{i,l}v_l$ となり、どの経路を用いても同じ得点が得られる。このとき、理論上は 1 回のサンプリングで正確な推定値が得ることができる。これをゼロ分散推定と呼ぶ。しかし、 $Q_{i,j}$ を求めるためには全隣接節点の真の電位 v_l が必要であり、も

し v_l が既知であれば、 v_i は式 (2) を用いて 1 回の計算で求められるため、実際の解析での実用性はない。

そこで、準ゼロ分散推定が提案されている。準ゼロ分散推定では、真の電位 v_l の代わりに粗く求めた推定値 $\hat{v}_l$ を用いて近似的にゼロ分散を達成する [5]。 $\hat{v}_l$ は、少数のサンプルを節点 l からランダムウォークさせることで求められる。式 (4) で求められる代替移動確率 $\hat{Q}_{i,j}$ は、

$$\hat{Q}_{i,j} = \frac{P_{i,j}\hat{v}_j}{\sum_l P_{i,l}\hat{v}_l} \quad (5)$$

となる。推定値 $\hat{v}_l$ が真値でなくとも十分に高精度であれば、代替移動確率 $\hat{Q}_{i,j}$ とそのときの重みを用いることによってサンプル得点の分散は減少する。分散が減少することによって、少ないサンプルを用いた場合でも節点電位の推定値がより高精度になる。より高精度な推定値を用いて代替移動確率 $\hat{Q}_{i,j}$ を求め直せば、分散はさらに減少する。このように、少ないサンプル数を用いたランダムウォーク法による電位の推定と、その電位を用いた移動確率の変更を繰り返すことによって、推定値の精度を効率的に向上させることができる。以上をまとめると、準ゼロ分散推定を用いるランダムウォーク法の手順は以下になる。

1. 節点あたり M サンプルを用いて全節点の電位を粗く求める。
2. 各節点の推定電位を用いて、式 (5) を用いて移動確率を変更する。
3. 収束判定を行い、収束していれば終了、収束していなければ 1 へ戻る。

準ゼロ分散推定を用いて分散を小さくするためには、全節点において移動確率の変更を行う必要がある。よって、粗い電位推定を全節点に対して行わねばならず、準ゼロ分散推定を用いるときは特定の節点のみの解析ができない。しかし、たとえある特定の節点の電位のみが必要であったとしても、従来のランダムウォーク法で一節点解析するより粗い全節点解析を繰り返しながら準ゼロ分散推定の方が結果的に高速に解析できる。図 1 にランダムウォーク法で一節点を解析したときと、準ゼロ分散推定を用いて全節点を解析したときの標準誤差を示す。横軸は処理時間であり、準ゼロ分散推定では最大の標準誤差を用いている。準ゼロ分散を用いると時間に対して線形に標準誤差の桁が低下し、通常のランダムウォーク法と比較して高精度解析では圧倒的に収束が速いことがわかる。

2.3 ランダムウォーク法における節点解析順序

2.1 節で述べたように、ランダムウォーク法の大きな特徴として、特定の節点を単独で解析できることが挙げられる。しかし、2.2 節で説明した準ゼロ分散推定を用いる場合は、回路全体を解析することが必須となる。複数節点の解析では、先に解かれる節点ほど平均移動回数が多く、解

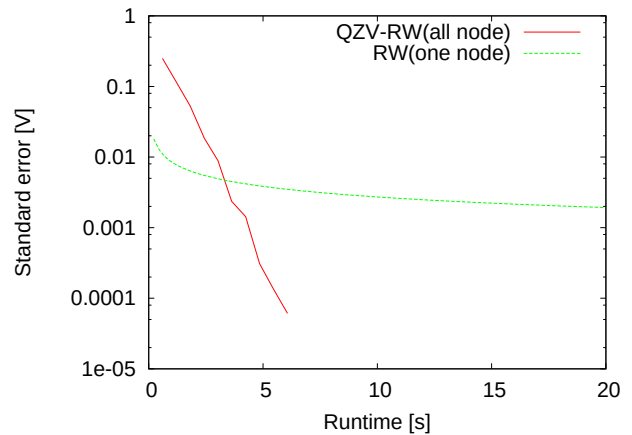


図 1 準ゼロ分散推定ランダムウォーク法の収束性

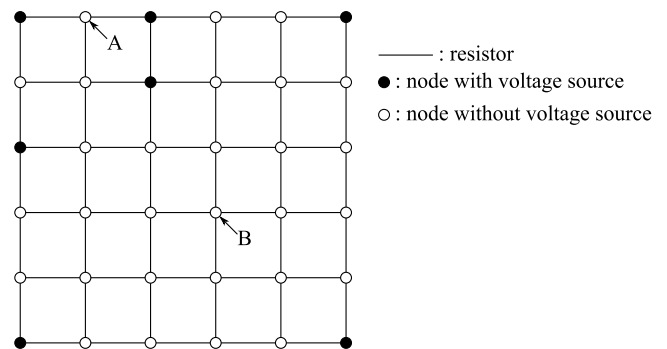


図 2 解析節点の選び方の例

析順が後であるほど平均移動回数は少なくなる。この時、解析済みの節点の位置が変われば以後の節点電圧計算に要する歩数が変わるため、解析順は性能に大きく影響を与える。この解析順について、[6] では性能を安定させるためランダムにしている。しかし、ランダムがどの程度妥当であるのか、解析順を工夫することでどこまで高速化が可能であるのかについて、未だ十分に検討されていない。

3. 節点解析順の検討

本節では、ランダムウォーク法の節点解析順について検討する。2.3 節で述べた通り、ランダムウォーク法の節点解析順は、全節点の解析に要する歩数の総和 (総歩数) に影響する。最適な解析順とは、総歩数を最小にする解析順序である。これを与えるためには、節点数 N の回路解析において k ($1 < k < N$) 番目の節点を以下の観点に基づき決定する必要がある。

- (α) 1, ..., $k-1$ 番目の節点が電圧源に接続されている回路において、自身の解析にかかる歩数の期待値がより小さい。
- (β) 自身に電圧源が接続されることで、以降 $k+1, \dots, N$ 番目の節点解析にかかる総歩数の期待値をより小さくする。

2 つの観点を完全に満たす節点は存在せず、どちらの要件

が重要であるのか、どのように選択することで最終的に最適になるのかは自明ではない。

例えば、図2に示す回路を考える。ここで、図2では回路の接続関係のみが表されており、辺は抵抗を、黒い節点は電圧源が接続されている節点、白い節点は電圧源が接続されていない節点を意味する。ここで、次解析節点として図中Aを選ぶとする。Aの近くには電圧源が多いため、Aから出発したサンプルは高い確率で早く電圧源にたどり着く、つまり (α) の観点から考えると望ましい。一方で、Aに電圧源が接続されても回路全体の電圧源分布に大きな変化はなく、他節点、特に右下エリアの節点解析に与える影響は小さい。つまり、 (β) の観点から考えると好ましくない。同様に、今度はAの代わりに図中Bを選ぶとする。Bに電圧源が接続されると電圧源がない回路中央付近にゴールが追加されるため、以降の節点解析で歩数が大きく減ることが期待できる。一方で、Bの近辺に電圧源は少なく、Bから出発したサンプルが電圧源にたどり着くまでには相応の歩数を要する。

以上のように2つの要件は相反し、最も適切な解析順を求めようとすると組み合わせ爆発が起こる。また、2節で述べた通りサンプルの移動確率は式(3)によって決まるため、図2の各辺は等価ではない。確率90%で選ばれる辺と確率0.1%で選ばれる辺は明らかに意味合いが異なり、このような確率の差があること、つまり辺に重みが存在することにも注意する必要がある。

以上を踏まえて、本稿ではランダム他に以下に示す解析順を考え、実験的に評価する。ただし、以下では節点の座標が既知であることを仮定する。これは電源網のレイアウトから寄生素子抽出を行う段階で座標を知り得るため、妥当な仮定である。

3.1 ラスタースキャン

図3に示すように、座標情報をもとに回路を端から順に走査する。電圧源に隣接するように電圧源が増えるため、新たな節点の解析時にゴールとなる節点の増加は緩やかであり、効率は悪いと予想できる。また、解析対象節点の左または上方には電圧源が密集しているが、下方にはほとんど存在しないため、サンプルの経路選択に依存して歩数に大きなばらつきが生じると考えられる。

3.2 四分割中心

図4に示すように、座標情報をもとに再帰的に回路の中心を選んでいく。まず最初に中央の節点(図中1)を選択する。次は中央を通り直交する2直線で分割される4つの部分回路について、それぞれ中央の節点(図中2, 3, 4, 5)を選択する。分割された回路の中央の節点を繰り返し選択することで、均等な密度で回路全体に電圧源は存在することになり、以降の節点解析にかかる平均歩数を効率よく削

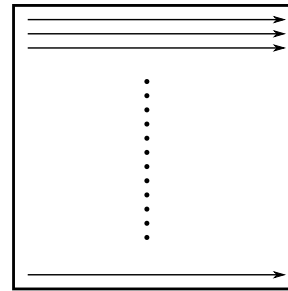


図3 ラスタースキャン

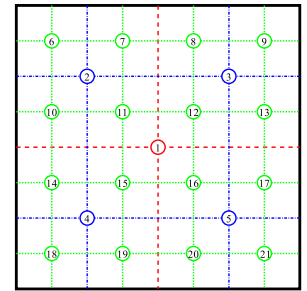


図4 四分割中心

減できると考えられる。また、均等に電圧源が存在することでサンプルの経路選択に依存する歩数のばらつきも低減され、計算時間のばらつきが小さいことが期待できる。

4. 数値実験

ランダムな解析順と3節で述べた2種類の解析順について、実験を行い性能を比較した。以下では、回路中全節点をランダムウォーク法で解析し、解析にかかった総歩数を比較する。解析に用いるサンプル数は、節点あたり100サンプルとする。乱数の生成にはMersenne Twister [8]を利用した。

ランダムウォーク法は乱数を用いた統計的解析法である。同じ解析順を用いても乱数のシードに依存してサンプル経路の選び方が変動し、その結果解析にかかる総歩数も変動する。また、解析順にランダムな要素が入る場合は、解析順自体の変動も総歩数に影響を与える。

本稿では、解析順の性能の指標として、複数回解析したときの、総歩数の平均値と標準偏差の二つを考える。これはそれぞれ、解析の処理時間と安定性に対応する指標といえる。総歩数は解析順と経路の選び方の双方に依存してはらつくが、実際の解析で見えるのは最終的な総歩数のばらつきだけなので、解析順とサンプル移動のための乱数シードを変更しつつ100回解析を行い、その平均値と標準偏差を用いて評価する。

4.1 事前実験

事前実験として、ランダムな順序で解析した場合の歩数の変化について調べた。図5に、節点選ばれた順番と、それまでに費やした累積歩数が総歩数に対して占める割合の関係を示す。図より、最初の1000節点の解析に総歩数の90%以上を費やしていることがわかる。よって、性能を左右するのは全節点のうち最初の10%の選び方であり、この節点解析順をうまく選べば、残りはランダムで十分であると考えた。よって以下では四分割中心において、最初の10%を3.2節で述べた方法で決定した後、ランダムな順序で残りの節点を解析する。

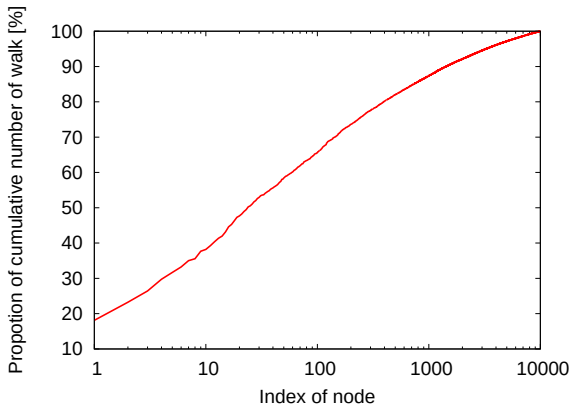


図5 ランダムにおける解析順番と累積歩数の関係(全節点数: 10000)

4.2 格子状回路を用いた実験

最初に、構造が簡単な回路を自作して実験を行った。自作した回路は、図6, 7に示すような二種類の規則正しい格子状の回路である。電圧源は、四隅に1.8V電圧源を接続した。電流源は、全節点のうちの約50%に0.1mA電流源を接続した。節点数は100x100の1万節点である。回路Xは、各抵抗値を0.1Ωから1.0Ωの間でランダムに決定した。回路Yは、図に示した部分の抵抗を1.0Ωから10.0Ωの間で、残りを0.1Ωから1.0Ωの間でランダムに決定し、電氣的に偏りのある回路とした。

各解析順で回路X,Yを解析したときの、解析にかかる総歩数の平均値、標準偏差を表1に示す。まず、回路Xについて考える。表1より、最も性能が悪いのはラスタースキャンであることがわかる。ラスタースキャンはランダムの4.3倍の歩数がかかり、解析順にランダムの要素がないにも関わらず標準偏差は1.5倍となった。ここで、ある試行における節点選ばれた順番とその節点解析に要した歩数の関係を図8に示す。ラスタースキャンは最初の数点こそ少ない歩数で解析できているが、以降はランダムや四分割中心と異なり、節点の増加に伴って効率的に歩数を低減できていないことがわかる。

一方で最も性能がよいものは四分割中心であった。表1よりランダムと比較すると、回路Xでは4.5%の歩数削減となった。また、標準偏差は50.0%低減できた。

次に、回路Yについて考える。ランダムとラスタースキャンは、回路Xと比べて平均値と標準偏差が大きく増加した。特にランダムの標準偏差は3.4倍になり、回路Yではラスタースキャンより大きくばらついた。これは、以下のように考えることができる。回路に電氣的な偏りがある場合、サンプルが通りやすい節点と通りにくい節点が存在することになる。回路全体が均質であれば、ランダムに解くことで安定的かつ効果的に電圧源を増やせるが、回路が不均質な場合は、通りにくい節点を連続して解いてしまうような極めて非効率な事象が起こり得る。このように、サンプルの通りやすさに偏りがある場合はランダムの安定

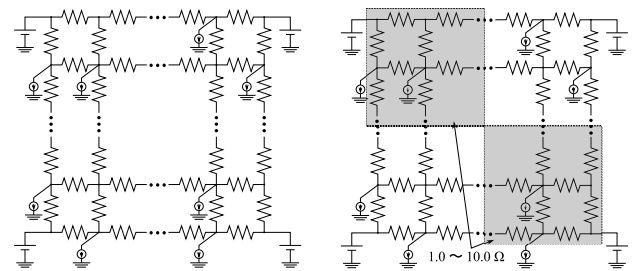


図6 回路X

図7 回路Y

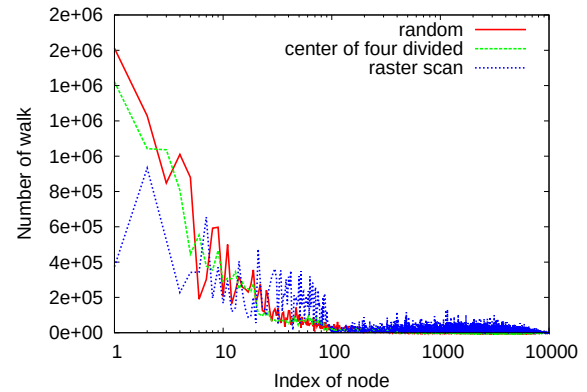


図8 解析順番と歩数の関係(回路X)

表1 各解析順での総歩数

解析順	回路 X		回路 Y	
	平均値	標準偏差	平均値	標準偏差
ランダム	2.85×10^7	7.55×10^5	3.04×10^7	2.61×10^6
四分割中心	2.72×10^7	3.77×10^5	2.78×10^7	3.95×10^5
ラスタースキャン	1.22×10^8	1.13×10^6	1.72×10^8	1.82×10^6

性は大きく落ちる。一方で、四分割中心は回路X, Yでほぼ性能に変化がなかった。四分割中心では、規則的に節点を選択することで必ず均等に電圧源は配置され、通りにくい節点を連続して選択することがない。よって、安定して歩数削減効果を得ることができる。

4.3 IBM Power Grid Benchmark を用いた実験

次に、電源網解析のベンチマークを用いて実験を行った。以下では解析対象として、IBM Power Grid Benchmark[2]を使用する。一般的な電源網は、図9に示すように電源電圧に接続されるVDDネットワークと、GNDに接続されるVSSネットワークから成る。2つのネットワークの間には、トランジスタを表現した電流源が接続される。ランダムウォーク法では、サンプルが電流源を介して節点間を移動することはないため、電源網解析では実質上独立した2つの回路を扱うことになる。よって、四分割中心で解析節点を選ぶ場合には注意が必要である。座標情報のみで節点を決定していくとどちらかの回路中心しか選べず、均等に電圧源を配置できなくなる。そこで本稿では、VDDネットワークとVSSネットワークに対してそれぞれ独立に四分割中心を適用する。つまり、図4における番号を用

表 2 各解析順での総歩数 (IBM Power Grid Benchmark)

解析順	ibmpg1		ibmpg2		ibmpg3	
	平均値	標準偏差	平均値	標準偏差	平均値	標準偏差
ランダム	6.90×10^7	5.43×10^5	6.69×10^8	4.58×10^6	8.04×10^8	3.75×10^6
四分割中心	7.39×10^7	2.63×10^5	6.71×10^8	1.42×10^6	8.55×10^8	1.48×10^6
ラスタースキャン	1.05×10^8	4.28×10^5	1.73×10^9	4.11×10^6	2.69×10^8	4.39×10^6

いと, (VDD の 1)→ (VSS の 1)→ (VDD の 2)→ (VSS の 2)→ ... という順で解析していく. 本稿では, 座標の最大値と最小値をもとに回路全体を長方形と認識し, 図 4 に示した順番で決まる座標に最も近い節点を順に選んだ.

各解析順で IBM Power Grid Benchmark を解析したときの結果を表 2 に示す. 表 2 より, すべての回路において最も総歩数の平均値が低いのはランダムであることがわかる. 四分割中心はランダムと比べて, ibmpg1, ibmpg2, ibmpg3 でそれぞれ 7.1 %, 3.0 %, 6.3 % の歩数増加が見られた. これは, 座標情報だけでは正確に回路中心を選べないためと推測でき, 実際の回路において座標情報のみで四分割中心を実現するのは難しいとわかる. ラスタースキャンではすべての, 四分割中心では一部の解析順を固定するため, 歩数のばらつきは少なくなる傾向にあるが, ランダムの方が平均値が低く, 今回挙げた解析順と比較する限りでは十分妥当なものであるといえる.

5. まとめ

本稿では, ランダムウォーク法の節点解析順について検討した. ランダムウォーク法の節点解析順は性能に大きく影響を与えるが, 最適な解析順を求めることは難しい. 一般的にランダムが安定であるとされるが, その妥当性は不明である. そこで, 高効率期待できる解析順の一例として四分割中心を挙げ, 実験的に比較することでランダムな解析順の性能を考察した. 四分割中心はランダムより安定的で数 % 程度高速に解き得ることを確認したが, 実際のベンチマーク解析ではランダムが最も高速であり, 今回挙げた解析順と比較する限り妥当なものと確認できた.

謝辞 本研究は, 科研費 (基盤研究 (B)26280014) の助成を受けた. 本研究の一部は東京大学 VDEC を通しシノプシス社の協力で行われた. 本稿の一部は, 成瀬遥平氏の資料を参考にして作成した. 深く感謝致します.

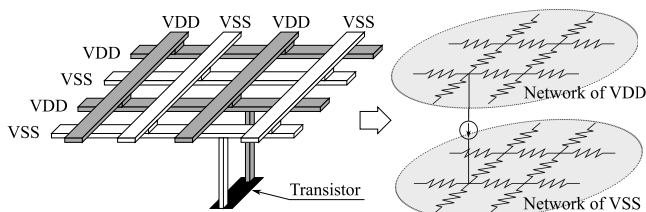


図 9 一般的な電源網

参考文献

- [1] Friedrich, J., McCredie, B. et al.: Design of the Power6 Microprocessor, *Dig. Tech. Papers, ISSCC*, pp. 96–97 (2007).
- [2] Nassif, S. R.: Power grid analysis benchmarks, *Proc. IEEE/ACM ASPDAC*, pp. 376–381 (2008).
- [3] Sapatnekar, S.: *Timing*, Kluwer Academic Publishers (2004).
- [4] Qian, H. and Sapatnekar, S. S.: Hierarchical random-walk algorithms for power grid analysis, *Proc. IEEE/ACM ASPDAC*, pp. 499–504 (2004).
- [5] Miyakawa, T., Yamanaga, K., Tsutsui, H., Ochi, H. and Sato, T.: Acceleration of Random-Walk-Based Linear Circuit Analysis Using Importance Sampling, *Proc. ACM GLSVLSI*, pp. 211–216 (2011).
- [6] Qian, H., Nassif, S. R. and Sapatnekar, S. S.: Power grid analysis using random walks, *IEEE Trans. CAD*, Vol. 24, No. 8, pp. 1204–1224 (2005).
- [7] Hesterberg, T. C.: *Advances in Importance Sampling*, PhD Thesis, Stanford University (1988).
- [8] Matsumoto, M. and Nishimura, T.: Mersenne Twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator, *ACM Trans. MACS*, Vol. 8, pp. 3–30 (1998).