

代用電荷法に基づく外部等角写像の数値計算法†

天 野 要††

等角写像は関数論の基本的な問題の一つであり、物理学・工学への応用も広い。本論文では、任意の Jordan 領域の外部から単位円の外部への等角写像の新しい数値計算法を提案する。この計算法は、代用電荷法が Dirichlet 問題の解である調和関数とその共役調和関数を複素対数ポテンシャルの 1 次結合で簡潔かつ高精度に近似できることに基礎を置き、計算手続きの中に、与えられた領域の容量の評価を含んでいる。典型的な領域に対して数値実験を行った結果、数十の電荷を用いて、最大相対誤差が $10^{-6} \sim 10^{-7}$ という高い精度を得た。同時に求まる容量の精度はさらに高い。

1. ま え が き

等角写像は関数論の基本的な問題の一つであり、物理学・工学への応用も広い。

著者は、論文¹⁾で、代用電荷法^{2)~4)}が Dirichlet 問題の解である調和関数とその共役調和関数を複素対数ポテンシャルの 1 次結合で近似できることに着目し、任意の Jordan 領域から単位円の内部への等角写像（内部等角写像、または、内部問題と呼ぶ）の簡単で精度の高い数値計算法を提案した。本論文では、任意の Jordan 領域の外部から単位円の外部への等角写像（外部等角写像、または、外部問題と呼ぶ）の数値計算法を提案する。この外部等角写像の計算法の特徴は、計算手続きの中に、与えられた領域の容量（外部写像半径、または、超越直径に等しい）の評価を含むことである。容量は電磁気学や流体力学への応用上も重要な量である。

等角写像の写像関数が初等的に定まるのは限られた場合であり、一般的な領域の場合の等角写像は数値計算によらなければならない。前述の内部問題または外部問題の数値計算法としては、正規直交多項式による方法⁵⁾や積分方程式による方法^{6)~14)}が代表的であり、外部問題の計算法は対応する内部問題の計算法と対の形で与えられることが多い。積分方程式法は、調和関数の一重層対数ポテンシャル表現により、等角写像の問題を境界上のソース密度を未知量とする第 1 種 Fredholm 型の積分方程式の問題に帰着させ、これを階段関数近似で離散化した Symm^{6),7)}の研究が始まる。その後、この積分方程式の数値解法をめぐって、

スプライン関数（区分多項式）近似^{9)~10)}による精度の向上や、適当な特異関数の導入による角点（境界上の特異点）処理^{9),10)}等の改良が行われた。近年、等角写像の数値計算法は急速に進歩しつつあり¹⁵⁾、第 2 種積分方程式による定式化^{11),12),14)}や、FFT¹¹⁾、Fourier-Galerkin 法¹³⁾、高速 Poisson solver¹⁴⁾の適用等、その定式化も用いられる手法も多彩になってきている。以上の計算法は、文献^{9),10)}の角点処理を除いて、比較的なめらかな境界を持つ領域を主な対象としている。

代用電荷法に基づく計算法は、同様に比較的なめらかな境界を持つ領域を主な対象としているが、従来の方法と比べて次のような特徴を持っている。

(1) 最も簡単な積分方程式法^{6),7)}に比べても、数学的な表現と計算法が簡潔で、プログラミングが容易である。境界上または境界付近における写像関数の特異性も生じない。

(2) 積分方程式法が数値積分を必要とするのに対して、代用電荷法は数値積分が不要であり、それだけ計算量も少ない。数値積分が不要であるから、処理の複雑化と精度の低下をもたらす特異積分の問題も生じない。多数の点で写像の計算が必要な場合には、計算量の少ないことは重要である。

(3) それにもかかわらず、なめらかな境界の問題では、スプライン関数近似^{9)~10)}と同様に精度が高い。また、角を持つ領域に対しても、局所的に特別な計算法^{9),10)}を採用することなく、比較的よい精度を得ることができる。

(4) 正則関数の最大値の原理が適用できるので、誤差の評価が容易である。

なお、特異点の問題や、細長い領域の場合に生じる crowding 現象に対しては、幾つかの手法が提案されているので、論文集¹⁶⁾の該当論文を参照されたい。ま

† Numerical Conformal Mapping of Exterior Domains Based on the Charge Simulation Method by KANAME AMANO (Department of Applied Mathematics, Faculty of Engineering, Ehime University).

†† 愛媛大学工学部応用数学教室

た、逆問題の数値計算法としては非線形積分方程式による方法が代表的であるが、単位円内から Jordan 領域への等角写像の計算法に関しては同じ論文集に網羅的な解説¹⁹⁾がある。

本論文の構成は以下のとおりである。まず、写像関数の Laurent 級数表現から出発し、外部等角写像の問題を、Dirichlet 問題の解である調和関数とその共役調和関数および与えられた領域の容量を同時に求めるという問題に帰着できることを示す。次いで、数値計算と誤差評価の方法を説明し、最後に、典型的な領域に対して行った数値実験の結果を記す。

2. 外部等角写像

z 平面上の任意の Jordan 曲線を C 、 C に囲まれた領域の外部を D として、 D から w 平面上の単位円の外部 $|w| > 1$ への等角写像を考える (図 1)。このような外部等角写像は、その写像関数を $w=f(z)$ とすれば、正規化条件 $f(\infty)=\infty, f'(\infty)>0$ の下に一意的に定まり、次のような Laurent 級数

$$w=f(z)=\gamma^{-1}z+a_0+a_1z^{-1}+\dots, \quad \gamma>0 \quad (1)$$

で与えられる^{17),18)}。ここに、 γ は与えられた領域の外部写像半径であり、 $f(z)$ と

$$\gamma=\lim_{z\rightarrow\infty}|f'(z)|^{-1} \quad (2)$$

という関係がある。外部写像半径の名称は、 $F(z)=\gamma f(z)$ によって、正規化条件 $F(\infty)=\infty, F'(\infty)=1$ の下に、 D が $|w|>\gamma$ なる領域に一意的に等角写像さ

れることによる。これは、また、与えられた領域の超越直径、容量に等しい^{19),20)}。本論文では容量という名称を用いることにする。さらに、 C は Jordan 曲線であるから、Carathéodory の定理により、 $f(z)$ は境界まで含めた閉領域 $\bar{D}=D+C$ を $|w|\geq 1$ に 1 対 1、連続に写像する。

我々の目標は、与えられた領域に対して、(1)の写像を(2)の容量の値とともに数値的に求めることである。

今、 C に囲まれた領域内の任意の 1 点を z_0 とすれば、 $\log\{f(z)/(z-z_0)\}$ は、 ∞ も含めて D で正則であり、 $z\rightarrow\infty$ の極限值は $-\log\gamma$ である。それゆえ、

$$\log\frac{f(z)}{z-z_0}=-\log\gamma+g(z)+ih(z) \quad (3)$$

とおけば、 $g(z)$ と $h(z)$ はそれぞれ D で共役な調和関数であり、 $g(\infty)=0, h(\infty)=0$ でなければならない。

(3)は

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-z_0)e^{-\log\gamma+g(z)+ih(z)} \\ &= e^{\log(z-z_0)-\log\gamma+g(z)+ih(z)} \\ &= e^{\log|z-z_0|-\log\gamma+g(z)+i[\arg(z-z_0)+h(z)]} \end{aligned}$$

となる。

したがって、正規化条件 $f(\infty)=\infty, f'(\infty)>0$ の下に、与えられた Jordan 領域の外部から単位円の外部への等角写像は、

- 1) 外部 Dirichlet 問題

$$\nabla^2 g(z)=0, \quad z\in D, \quad (4)$$

$$g(z)=\log\gamma-\log|z-z_0|, \quad z\in C, \quad (5)$$

$$g(\infty)=0,$$

- 2) $g(z)$ の共役調和関数 $h(z)$,

$$h(\infty)=0,$$

- 3) $f(z)=(z-z_0)e^{-\log\gamma+g(z)+ih(z)}, \quad z\in\bar{D} \quad (6)$

を順次計算することによって得られる。すなわち、外部等角写像の問題は、外部 Dirichlet 問題の解である調和関数 $g(z)$ とその共役調和関数 $h(z)$ および容量 γ を同時に求めるという問題に帰着されたわけである。

3. 数値計算法

一般性を失うことなく、 z_0 を原点にとることができる。以下、 $w(=u+iv)$ 、 g, h, γ 等の近似値を $W(=U+iV)$ 、 G, H, Γ 等の大文字で記す。

ここで、外部 Dirichlet 問題(4)の解である調和関数 $g(z)$ が、代用電荷法によって、 C で囲まれた領域の内部に配置された N 個の点 ζ_i (電荷点と呼ぶ)を極とする対数ポテンシャルの 1 次結合

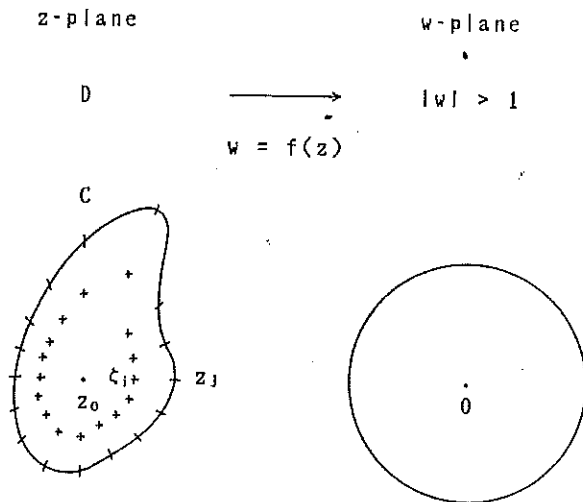


図 1 外部等角写像と代用電荷法

Fig. 1 Exterior conformal mapping and the charge simulation method. The normalizing condition is $f(\infty)=\infty$ and $f'(\infty)>0$, and ζ_i and z_j are the charge points and the collocation points, respectively.

$$G(z) = - \sum_{i=1}^N Q_i \log |z - \zeta_i|, \quad z \in \bar{D}, \quad (7)$$

で、簡潔かつ高精度に近似されることに注目する。このとき、 $g(z)$ の共役調和関数 $h(z)$ は

$$H(z) = - \sum_{i=1}^N Q_i \arg(z - \zeta_i), \quad z \in \bar{D}, \quad (8)$$

と近似できる。これらはそれぞれ複素対数ポテンシャル $\log(z - \zeta_i)$ の実部と虚部の1次結合である。未定係数 Q_i (電荷と呼ぶ) は、境界上に選ばれた N 個の点 z_j (拘束点と呼ぶ) 上で、境界条件(5) (拘束条件と呼ぶ) を満たすように定められる。すなわち、

$$\sum_{i=1}^N Q_i \log |z_j - \zeta_i| = \log |z_j| - \log \Gamma, \quad (j=1, 2, \dots, N) \quad (9)$$

また、 $g(\infty)=0, h(\infty)=0$ の条件から、 $z \rightarrow \infty$ のとき

$$G(z) \doteq - \log |z| \sum_{i=1}^N Q_i \rightarrow 0 \quad \text{かつ} \quad H(z) \doteq - \arg z \sum_{i=1}^N Q_i$$

$Q_i \rightarrow 0$ でなければならない。すなわち、

$$\sum_{i=1}^N Q_i = 0. \quad (10)$$

(9)および(10)は $Q_i (1 \leq i \leq N)$ と $\log \Gamma$ を未知数とする連立1次方程式

$$\begin{bmatrix} \log |z_1 - \zeta_1| & \vdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ \log \Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log |z_1| \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

を構成する。

以上により、代用電荷法に基づく外部等角写像の数値計算法を次のように整理することができる。

- 1) 与えられた領域に対する適当な電荷点 ζ_i と拘束点 z_j の選択。
- 2) 連立1次方程式(拘束条件)(11)による電荷 Q_i と容量 Γ の計算。
- 3) 以下、 \bar{D} 内の各点ごとに

$$G(z) = (7),$$

$$H(z) = (8),$$

$$U(z) = e^{\log |z| - \log \Gamma + G(z)} \cos(\arg z + H(z)), \quad (12)$$

$$V(z) = e^{\log |z| - \log \Gamma + G(z)} \sin(\arg z + H(z)). \quad (13)$$

このように、数値積分は不要であり、したがって、計算処理の複雑さや計算精度の低下をもたらす特異積分の問題も生じない。未知量が $g(z), h(z)$ から Q_i と Γ になったという意味で、問題の次元が2次元から1次元に低下していることに注意する。

なお、 \arg 関数には $\pm\pi$ の不連続線が存在し、 $H(z)$

の計算ではこれを適切に処理する必要がある。 $\sum_{i=1}^N Q_i$

$= 0$ の場合には、この不連続線を C で囲まれた領域に閉じ込める方法が既に提案されている^{2), 21)}。しかし、境界 C 上のすべての点を見渡す位置に原点をとることができる場合には、 $\sum_{i=1}^N Q_i = 0$ の関係を用いて、(8)を

$$\begin{aligned} H(z) &= - \sum_{i=1}^N Q_i \arg(z - \zeta_i) + \sum_{i=1}^N Q_i \arg(z) \\ &= - \sum_{i=1}^N Q_i \arg(1 - \zeta_i/z) \end{aligned} \quad (8')$$

と変形すれば、この問題をより簡単に回避することも可能である。また、そのような点が存在しない場合でも、後述の例のように、(8)と(8')の適当な使い分けで対処することも少なくない。

4. 誤差

問題の仮定により、 $z \rightarrow \infty$ で $w \rightarrow \infty$, かつ $z \in \bar{D}$ で $w(z) \neq 0$ であるから、相対誤差

$$E_R(z) \equiv \frac{|W(z) - w(z)|}{|w(z)|} = \left| \frac{W(z)}{w(z)} - 1 \right| \quad (14)$$

を考える。内部問題の場合と異なり、 \bar{D} は有界ではないので、誤差の評価に対する正則関数の最大値の原理の適用に若干の工夫が必要である。

まず、次の評価式を導くことができる。

$$E_R(z) \leq |W(z)| \max_C \left| \frac{1}{W(z)} - \frac{1}{w(z)} \right| \quad (15)$$

ここに、添字 C は境界上での評価を示している。証明の概要は次のとおりである。変換 $z^* = 1/z$ によって \bar{D} が写像される領域を \bar{D}^* とすれば、 \bar{D}^* は有界閉領域である。また、 $1/W(1/z^*), 1/w(1/z^*)$ はいずれも \bar{D}^* で正則である。 $(w = f^*(z^*) = 1/w(1/z^*))$ は、正規化条件 $f^*(0) = 0, f^{*'}(0) > 0$ の下に、 \bar{D}^* を単位円の内部に等角写像する。) したがって、正規関数の最大値の原理から、 $|1/W(1/z^*) - 1/w(1/z^*)|$ の最大値は必ず \bar{D}^* の境界 C^* 上に現れるので、

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{W(z)} - \frac{1}{w(z)} \right| &\leq \max_{C^*} \left| \frac{1}{W(1/z^*)} - \frac{1}{w(1/z^*)} \right| \\ &= \max_C \left| \frac{1}{W(z)} - \frac{1}{w(z)} \right| \end{aligned}$$

となり、ゆえに(15)が成立する。

これは、 C 上で $|1/W(z) - 1/w(z)|$ の最大値の評価ができれば、 D における E_R がその $|W(z)|$ 倍で抑えられることを示している。(15)はまた

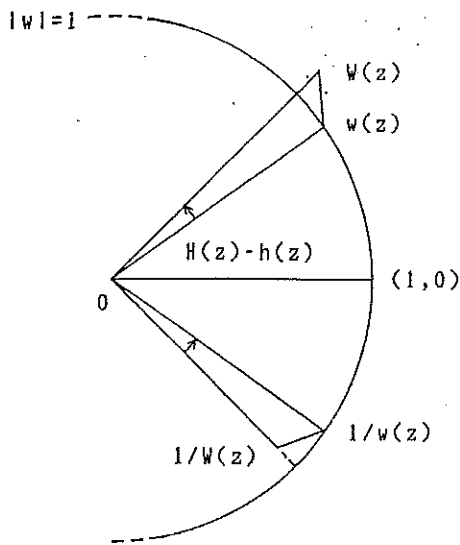


図2 境界上での誤差評価

Fig. 2 Error estimation on the boundary using the maximum modulus theorem for regular functions.

$$\begin{aligned}
 E_R(z) &\leq |W(z)| \max_c \left\{ \left| \frac{1}{|W(z)|} - 1 \right| + |H(z) - h(z)| \right\} \\
 &\leq |W(z)| \left\{ \max_c \left| \frac{1}{|W(z)|} - 1 \right| \right. \\
 &\quad \left. + \max_c |H(z) - h(z)| \right\} \quad (16)
 \end{aligned}$$

となる(図2). 右辺第2項の $h(z)$ は一般的には未知であるが、領域に对称性があれば、対称軸上では0である。

境界上での誤差が小さく、

$$E_R \equiv \max_c |W(z) - w(z)| = \max_c E_R(z) \ll 1, \quad (17)$$

かつ、容量の精度がさらに高く、

$$|\log \Gamma - \log \gamma| \ll \max_c |G(z) - g(z)|, \quad (18)$$

であるような場合には、より簡潔な誤差の評価が可能である。(多くの場合にこのような関係の成立することを数値実験的に確かめることができる。) 境界上では絶対誤差と相対誤差は等しいことに注意する。

$W(z)/w(z) - 1$ は領域 \bar{D} において正則であるから、正則関数の最大値の原理により、相対誤差 $E_R(z)$ は ∞ を除いた D の内部では最大値を取らない。また、(17), (18) と $G(\infty) = g(\infty) = H(\infty) = h(\infty) = 0$ の条件から、

$$\begin{aligned}
 \max_c E_R(z) &\equiv \max_c |G(z) - g(z) - (\log \Gamma - \log \gamma)| \\
 &\quad + |H(z) - h(z)|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\geq \max_c |G(z) - g(z) - (\log \Gamma - \log \gamma)| \\
 &\equiv \max_c |G(z) - g(z)| \\
 &\gg |\log \Gamma - \log \gamma| \\
 &\equiv E_R(\infty) \quad (19)
 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $E_R(z)$ は C 上で最大値をとる。

境界 C 上では相対誤差と絶対誤差は等しいから、結局、(17), (18) が成立すれば、問題の外部領域における相対誤差 $E_R(z)$ は C 上の最大誤差 E_R で抑えられることになる。したがって、外部問題の場合にも、内部問題¹⁾ の場合と同様に、任意の $z \in \bar{D}$ に対して、

$$\begin{aligned}
 E_R(z) &\leq \max_c |W(z) - w(z)| \\
 &\leq \max_c \{ | |W(z)| - 1 | + |H(z) - h(z)| \} \\
 &\leq \max_c \{ | |W(z)| - 1 | + \max_c |H(z) - h(z)| \} \quad (20)
 \end{aligned}$$

が成立し(図2), これを

$$E_R(z) \leq E_R \leq E_M + E_A \quad (21)$$

と記す。 E_M と E_A はそれぞれを絶対値と偏角の C 上の最大誤差である。

さらに、 $G(z)$ と $H(z)$ の誤差は電荷 Q_i の配置とその数値計算に起因するので、

$$\max_c |G(z) - g(z)| \equiv \max_c |H(z) - h(z)| \quad (22)$$

なる関係が存在するものと予想される。このとき、

$$\begin{aligned}
 E_M &\equiv \max_c |G(z) - g(z) - (\log \Gamma - \log \gamma)| \\
 &\equiv E_A \quad (23)
 \end{aligned}$$

である。(これらも数値実験的に確かめることができる。) したがって、(21)で

$$E_R \leq 2E_M \equiv 2 \max_c \{ | |W(z)| - 1 | \} \quad (24)$$

となる。ゆえに、この計算法では、拘束点上で $|W(z)| = 1$ となるように電荷 Q_i と容量 Γ が定められるので、

$$E_M \equiv \max_c \{ | |W(z_{j+1/2})| - 1 | \}, \quad z_{j+1/2} \in C \quad (25)$$

を最も簡単な誤差の指標と考えることができる。ここに、 $z_{j+1/2}$ は拘束点 z_j と z_{j+1} の中間点(中間点と呼ぶ)である。

代用電荷法には、丸め誤差のほか、電荷点と拘束点の配置に起因する誤差と連立1次方程式の解法に起因する桁落ち誤差とがあり、電荷配置が悪ければ大きな桁落ちを生じることがある。しかし、その場合でも、 $W(z)$, $1/W(1/z^*)$ 等の正則性は成立していることに注意する。

5. 数値実験

楕円, Cassini の楕形, 正方形, 勾玉形という典型的な領域について数値実験を行った。愛媛大学情報処

理センターの FACOM M-360 AP システムを利用し、連立1次方程式には Crout 法 (SSL II の Lax) を用いたが、解の反復改良は行っていない。いずれの計算も単精度である。

楕円と Cassini の楕形については、初等的な写像関数が知られていて、これとの比較による直接的な誤差の評価が可能である。正方形についても、この等角写像が基本的には Schwarz-Christoffel 変換の逆変換であることから、写像関数を楕円関数を用いて表現することは可能である²²⁾。しかし、ここでは、楕円関数表現との比較による直接的な誤差の評価は行わず、勾玉形の例とともに、写像関数が知られていなくても誤差のおおよその評価が可能であるということの方に注目する。

計算結果の提示に用いた記号 (図1参照) は次のとおりである。

N : 電荷数=拘束点数 (括弧内は、計算に対称性を利用した場合の拘束条件の次元数で、勾玉形以

外の例で $N/4+1$)

r : 問題によって意味の異なる電荷配置のパラメータ ($r > 0$).

なお、 E_R, E_M, E_A の評価には拘束点と中間点における計算値を用いた。

5.1 楕 円

境 界 $x^2/a^2 + y^2 = 1$

(a) $a = 1.2$

(b) $a = 2.0$

(c) $a = 5.0$

写像関数 $f(z) = \{z + (z^2 - a^2 + 1)^{1/2}\} / (a + 1)$

容 量 $\gamma = (a + 1)/2$

拘 束 点 $x_j = a \cos (j-1)\Delta\theta$

$y_j = \sin (j-1)\Delta\theta$

$\Delta\theta = 2\pi/N$

電 荷 点 $\xi_i = (a - (1-r)/a) \cos (i-1)\Delta\theta$

$\eta_i = r \sin (i-1)\Delta\theta, (0 < r < 1)$

これは凸型 (外側から見れば凹型) 領域の例である。

電荷点は各拘束点を通る法線と内部の楕円

$$x^2/(a - (1-r)/a)^2 + y^2/r^2 = 1$$

との交点である。この配置は、 $a > 1$ のとき、境界の曲率の大きい x 軸付近で拘束点と電荷点の密度が高く、しかも、すべての拘束点について、対応する電荷点との距離と隣接する拘束点との距離の比をおおむね一定値 $(1-r)/a\Delta\theta$ に保つという性質を持っている。

図3は、(b) ($N=64, r=0.5$) の例で、境界と相似な楕円群と放射状の直線群 (上図、 z 平面) が等角写像される (下図、 w 平面) 様子を示したものである。この楕円群と直線群がいずれの平面上でも等角に交わっていることに注意する。

表1は、(a), (b), (c) それぞれの場合について、典型的な r の値に対する計算精度を示したものである。最大誤差 E_R が (a) 2.1×10^{-6} ($N=32, r=0.5, 0.3$), (b) 3.0×10^{-6} ($N=64, r=0.5$), (c) 2.4×10^{-4} ($N=64, r=0.3$) と、精度はいずれの場合も極めて高い。特に、(a) の場合にはわずか $N=16$ で $E_R = 5.9 \times 10^{-6}$ という高い精度が得られてい

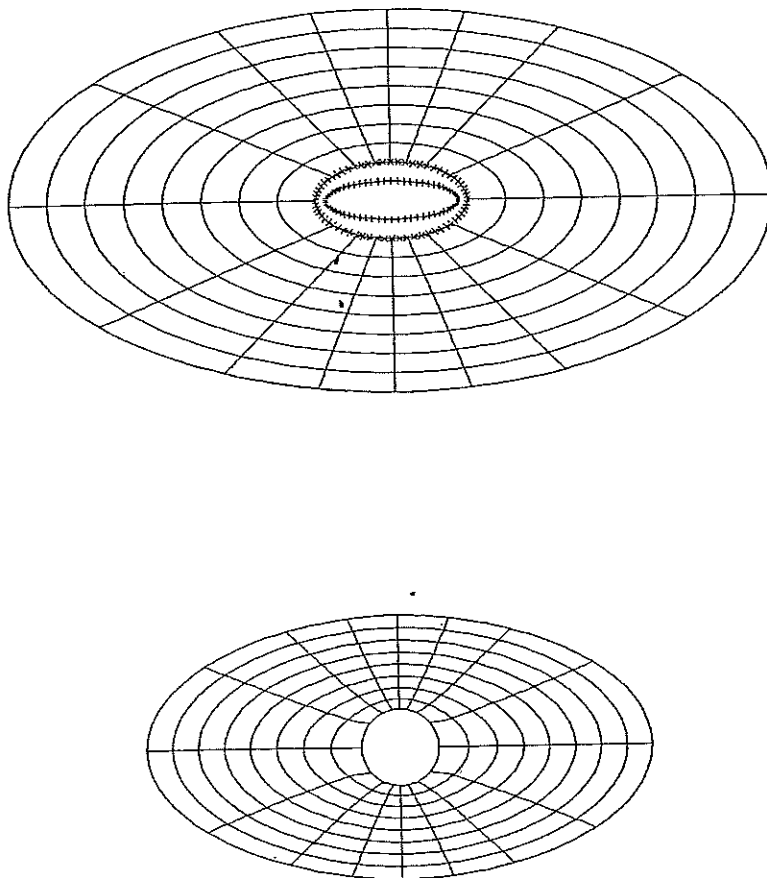


図3 数値的等角写像 (楕円)

Fig. 3 Numerical conformal mapping of elliptic exterior domains by the charge simulation method. Same symbols are used as in Fig. 1.

表 1 誤差評価 (楕円)

Table 1 Error estimation in the case of ellipse $x^2/a^2 + y^2 = 1$. N and r are the total number of charge points (the number of independent equations when using symmetry) and a parameter of charge distribution, respectively. E_M , E_A , E_R and Γ are estimation of $\max_c |W(z)| - 1$, $\max_c |H(z) - h(z)|$, $\max_c |W(z) - w(z)|$ and the capacity of the given domain, respectively.

		$N=16(5)$	$N=32(9)$	$N=64(17)$	
		E_M			
		E_A			
		E_R			
		Γ			
a	r				
(a)	1.2	0.7	1.1E-3	7.6E-6	9.5E-7
			8.4E-4	5.3E-6	1.8E-6
			1.1E-3	7.9E-6	2.9E-6
		0.5	1.100035	1.100000	1.099999
			7.6E-5	9.5E-7	
			7.1E-5	1.0E-6	
	0.3	7.6E-5	2.1E-6		
		1.100004	1.099999		
		5.7E-6	9.5E-7		
		0.7	6.0E-6	1.3E-6	
			5.9E-6	2.1E-6	
			1.099999	1.099999	
(b)	2.0	0.7	2.4E-2	1.4E-3	6.6E-6
			1.9E-2	8.9E-4	3.9E-6
			2.4E-2	1.4E-3	7.1E-6
		0.5	1.500776	1.500058	1.500000
			6.6E-3	1.0E-4	1.9E-6
			6.5E-3	1.0E-4	2.6E-6
	0.3	6.6E-3	1.0E-4	3.0E-6	
		1.500416	1.500005	1.500000	
		1.3E-3	8.9E-5		
		0.7	1.3E-3	8.5E-5	
			1.3E-3	8.9E-5	
			1.500087	1.500000	
(c)	5.0	0.7	1.0E-1	5.5E-2	6.9E-3
			9.7E-2	4.2E-2	4.4E-3
			1.1E-1	5.7E-2	6.9E-3
		0.5	2.988503	3.000511	3.000096
			4.2E-2	1.9E-2	1.0E-3
			4.4E-2	1.7E-2	1.0E-3
	0.3	4.9E-2	1.9E-2	1.0E-3	
		2.989871	3.000308	3.000019	
		1.6E-2	5.3E-3	2.0E-4	
		0.7	1.5E-2	5.5E-3	2.4E-4
			1.6E-2	5.5E-3	2.4E-4
			2.990957	3.000013	3.000002

る。容量 Γ の精度はさらに高く、ほとんど丸め誤差の範囲である。また、(a), (b), (c)いずれの場合にも、誤差の評価における(17), (18)および(22), したがって(23), (24)等の関係がよく成立している。

さらに、計算精度とパラメータの間には次のような関係がある。

1) a の値が増大し、楕円が扁平になるに従って計算精度は低下する。さらに大きな a の値に対する計算結果の一例を示せば、 $N=64$ 個の電荷を用いて、 $a=10.0$ ($r=0.2$) で $E_R=2.5 \times 10^{-3}$ 、 $a=20.0$ ($r=0.1$) で $E_R=3.5 \times 10^{-3}$ 、 $a=50.0$ ($r=0.1$) で $E_R=1.8 \times 10^{-2}$ である。

2) 電荷数 N の増加に従って精度は向上する。上記の a の値に対して $N=128$ 個の電荷を用いた場合の計算結果を示せば、 $a=10.0$ ($r=0.3$) で $E_R=2.7 \times 10^{-4}$ 、 $a=20.0$ ($r=0.1$) で $E_R=1.3 \times 10^{-3}$ 、 $a=50.0$ ($r=0.1$) で $E_R=2.8 \times 10^{-3}$ である。

3) r が減少し、電荷が境界から離れるに従って、精度はまず向上し、次いで低下する。表1では、 r の値を 0.7, 0.5, 0.3 の3点に限ったため、 r の減少とともに精度の低下する様子は現れていない。この精度の低下は、拘束条件の連立1次方程式の数値計算の過程で生じる桁落ちのためであり、最終的には係数行列が特異となって数値解を求めることができなくなる(表の空白部分)。

4) 最適な r は a の増大とともに減少し、 N の増加とともに増大する。

電荷配置に縮小率一定の境界縮小法を用いると、計算精度は、 a の増大に従って著しく低下し、しかも縮小率の変化に対して不規則に変化する。これは、縮小率の増大とともに、直ちに拘束点と電荷点の対応が対向型から千鳥型に変化し、さらに全く不規則になってしまうためである。

ここに採用した電荷の配置法では、配置のパラメータは境界縮小法の場合と同様にただ一つであり、計算精度は、パラメータに対して簡単かつ規則的に変化し、しかも広い範囲にわたって比較的良好な精度が得られている。厳密な意味での最適な電荷の配置法が明らかにされていない現在、パラメータの数が少ないこと、精度がパラメータに対して簡単かつ規則的に変化すること、広い範囲にわたって良好な精度が得られること等は、電荷配置法の適切さを量る重要な尺度である。

5.2 Cassini の楕形

$$\text{境 界 } \{(x+1)^2+y^2\} \{(x-1)^2+y^2\} = a^4$$

$$(a) \quad a=2^{1/2}$$

$$(b) \quad a=2^{1/8}$$

$$(c) \quad a=2^{1/32}$$

写像関数 $f(z) = (z^2 - 1)^{1/2} / a$
 容量 $\gamma = a$
 拘束点 $x_j = r \cos \theta$
 $y_j = r \sin \theta$
 $r = \{ \cos 2\theta + (\cos^2 2\theta + a^4 - 1)^{1/2} \}^{1/2}$
 $\theta = 2\pi(j-1)/N$

電荷点 $\zeta_j = z_j + r |z_j - z_{j-1}| e^{i(\arg(z_j - z_{j-1}) + \pi/2)}$,
 $(r > 0)$

これは、(-1, 0) と (1, 0) からの距離の積が一定の点の軌跡であり、 a の値に応じて形状が変化する。ここでは、凹型 (外側から見れば凸型) 領域の例として、内部問題¹⁾ と同じ $1 < a \leq \sqrt{2}$ の範囲を取り上げた。

電荷点は、近似的に、各拘束点を通る法線上に存在し、しかも、すべての拘束点について、対応する電荷点との距離と隣接する拘束点との距離の比を一定値 r に保つという性質を備えている。この電荷配置法は、パラメータは r だけであり、計算法はきわめて簡単で、角 (かど) を持たない任意の形状に容易に適用できる。

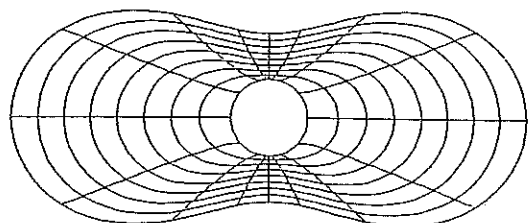
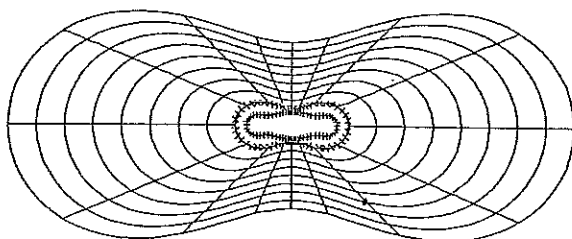


図4 数値的等角写像 (Cassini の楕形)

Fig. 4 Numerical conformal mapping of exterior domains of the oval of Cassini by the charge simulation method. Same symbols are used as in Fig. 1.

図4は、(b) ($N=64, r=2.0$) の例で、境界と相似な曲線群と放射状の直線群 (上図, z 平面) が等角写像される (下図, w 平面) 様子を示したものである。これらの曲線群と直線群がいずれの平面上でも等角に交わっていることに注意する。

表2は、(a), (b), (c) それぞれの場合について、典型的な r の値に対する計算精度を示したものである。この場合も、 E_R が (a) 4.0×10^{-6} ($N=64, r=2.0$), (b) 7.7×10^{-6} ($N=64, r=2.0$), (c) $3.4 \times$

表2 誤差評価 (Cassini の楕形)
 Table 2 Error estimation in the case of the oval of Cassini $((x+1)^2 + y^2)((x-1)^2 + y^2) = a^4$. Same symbols are used as in Table 1.

		$N=16(5)$	$N=32(9)$	$N=64(17)$		
	a	r	E_M			
			E_A			
	a	r	E_R			
			Γ			
(a)	1.414213	1.0	8.6E-3	3.6E-3	1.5E-3	
			1.1E-2	2.7E-3	7.5E-4	
			1.1E-2	3.6E-3	1.5E-3	
			1.414110	1.413860	1.413986	
			1.1E-3	3.3E-4	9.5E-5	
	1.414245	2.0	1.0E-3	3.7E-4	8.6E-5	
			1.1E-3	3.7E-4	9.6E-5	
			1.414245	1.414223	1.414209	
				8.1E-6	2.8E-6	
				7.9E-6	3.1E-6	
(b)	1.090507	1.0	8.1E-6	4.0E-6		
			1.414212	1.414212	1.414212	
			2.0E-2	6.1E-3	2.6E-3	
			0.5	2.3E-2	5.3E-3	1.2E-3
			2.3E-2	6.1E-3	2.6E-3	
	1.090525	2.0	1.091323	1.089597	1.089897	
				9.7E-4	1.7E-4	
				9.8E-4	1.7E-4	
				9.8E-4	1.7E-4	
				1.090525	1.090498	
(c)	1.021897	1.0	5.7E-6	7.0E-6	7.7E-6	
			1.090507	1.090507	1.090507	
			2.8E-2	6.8E-3	2.9E-3	
			0.5	2.9E-2	6.1E-3	1.6E-3
			2.9E-2	6.8E-3	2.9E-3	
	1.021896	2.0	1.024365	1.020556	1.020981	
				2.5E-3	2.3E-4	
				2.2E-3	2.0E-4	
				2.5E-3	2.3E-4	
				1.022013	1.021886	
		3.0E-5				
		3.3E-5				
		3.4E-5				
		1.021896				

10^{-5} ($N=64, r=2.0$) と、計算精度は極めて高い。また、容量 Γ の精度はさらに高く、(a), (b), (c) いずれの場合にも (17), (18) および (22), (23), (24) 等の関係がよく成立している。

さらに、計算精度とパラメータの間にも、 a と r の増大と減少を適当に読みかえれば、楕円の場合と同様な関係が存在している。ただし、表の空白部分は、拘束条件の連立1次方程式の係数行列の特異性ではなく、 N が小さく r が大きい場合には、電荷点に対応する拘束点と異なる象限に属してしまうことを示している。

なお、この場合にも、縮小率一定の境界縮小法を用いると、計算精度は、拘束点と電荷点の位置関係のずれによって a の減少とともに著しく低下し、しかも縮小率の変化に対して不規則に変化する。しかし、この電荷配置法では、配置のパラメータは境界縮小法の場合と同様にただ一つであり、計算精度はこのパラメー

タに対して簡単かつ規則的に変化し、しかも広い範囲にわたって比較的良好な精度が得られていることに注意する。拡大率一定の境界拡大法を用いた内部問題¹⁾と比較して(c)の精度は1桁以上向上している。

5.3 正方形

境界 $|x|=1, |y|=1$

拘束点 $x_j=1.0$

$$y_j = (1-r^{j-1}) / (1-r^{N/8})$$

$$(0 < r < 1, j=1, \dots, N/8+1)$$

電荷点 $\xi_i = (1-p/q)\eta_i + p$ ($0 < p, q < 1$)

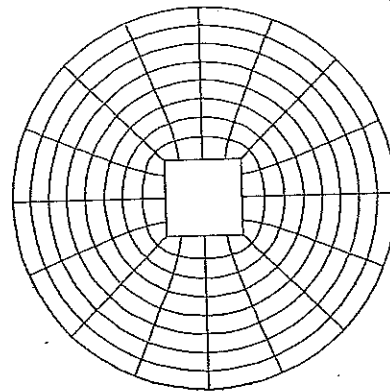
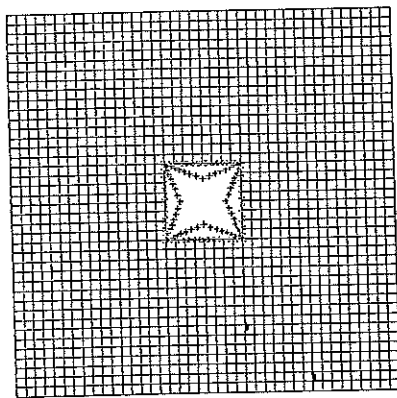
$$\eta_i = y_i, (i=1, \dots, N/8)$$

$$\xi_{N/8+1} = (q, q)$$

(その他の点は対称軸に対称に配置する)

これは角を持つ領域の例である。

電荷は、領域の角の付近で密かつ境界近くになるよう、図5のような星型に配置する。上記のパラメータは、 $r^{N/8-1}$ が等比級数的に変化する拘束点間距離すな



(a) (d)

(b) (c)

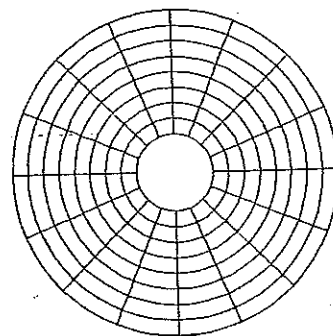
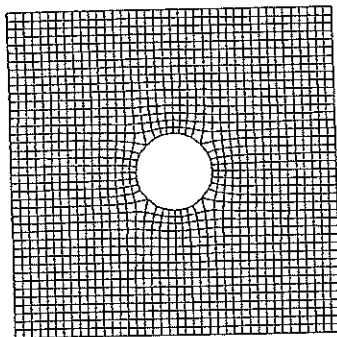


図5 数値的等角写像 (正方形)

Fig. 5 Numerical conformal mapping of an exterior domain of a square by the charge simulation method, where (a) is mapped onto (b), and (d) is obtained by inverse interpolation from (c). Same symbols are used as in Fig. 1.

表 3 誤差評価 (正方形)

Table 3 Error estimation in the case of a square $|x|=1$ and $|y|=1$, where p and q are parameters of charge distribution. Same symbols are used as in Table 1.

$N=64(17)$			
	q	E_M	Γ
$r=1/2^{1-N/8}$	0.998	1.5E-2	1.178379
$p=0.6$	0.996	1.0E-2	1.179542
	0.994	6.9E-3	1.180367
	0.992	3.1E-3	1.181022
	0.990	6.9E-4	1.181566
	0.988	4.3E-3	1.182032
	0.986	8.1E-3	1.182436
	0.984	1.1E-2	1.182789
	$r=1.180340$		

わち電荷密度の角と x 軸の付近における値の比であり, $(p, 0)$ と (q, q) が星型の凹部と凸部の先端の座標である。

図 5 は, 上側が z 平面, 下側が w 平面で, (a) を等角写像した結果が (b) であり,

(c) に逆補間を適用した結果が (d) である。電磁気学的には, (d) は一定電位に保たれた矩形導体外部の等電位面と電気力線に対応している。

表 3 は $N=64$, $r^{N/8-1}=1/2$ および $(p, 0)=(0.6, 0)$ を固定して, (q, q) を変えた場合 (図 5 は $q=0.990$) の計算精度を示す。このように, 精度は角の付近の局所的な電荷配置に強く依存する。ここでは, 前述のように, 写像関数との比較による直接的な誤差の評価は行わない。しかし, E_M の最大値が角に最も近い中間点で 6.9×10^{-4} ($q=0.990$) という値であるので, (23) または (24) の関係から, この場合の E_R は 10^{-8} 程度であると考えることができる。なお, いずれの場合も (17), (18) の関係はよく成立している。

5.4 勾玉形

これは非対称で, 境界全体を見渡すことができる点も存在しない領域の例である。

図 6 のように, この勾玉形は半

径が $1/4, 1/4, 1, 1/2$ の 4 個の半円をこの順に接続したもので, 最大の半円は $x^2+(y-0.5)^2=1$, $x < 0$ である。拘束点はこれらの半円上にそれぞれ $N/8, N/8, N/2, N/4$ 個ずつ等間隔に配置されている。したがって, 拘束点の間隔は全境界上で一定である。電荷点は, 拘束点から等距離の位置に境界を拡大または縮小して配置した。この電荷配置法は, 楕円や Cassini の楕形の場合と基本的に同じものである。配置のパラメータ r は, $|z_i - \zeta_i| = (r/4)/4$, すなわち, 各電荷点に対応する拘束点から最小の半円の半径の $r/4$ 倍離れていることを示す。

境界全体を見渡すことができる点は存在しないが, $H(z)$ の計算には, たとえば, $x^2+(y-0.5)^2 < 0.8^2$ では (8), それ以外では (8') というように, (8) と (8') を適当に使い分ければよい。

図 6 の (a) を等角写像した結果が (b) であり, (b) の単位円を拡大して拘束点に対応する点に印を付けた

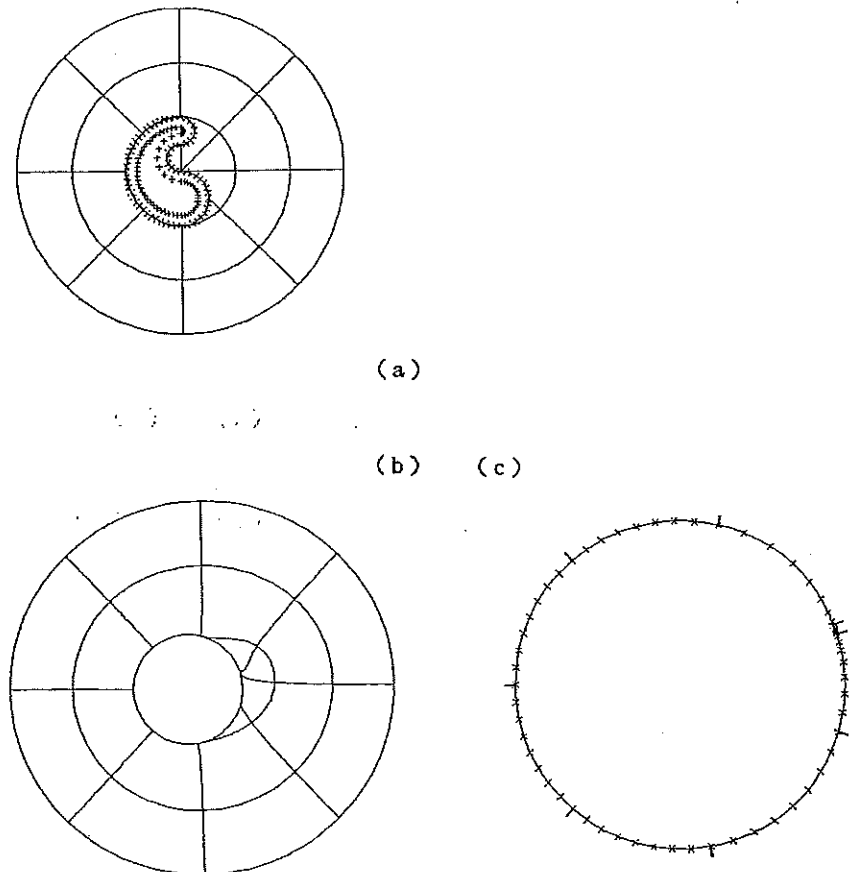


図 6 数値的等角写像 (勾玉形)

Fig. 6 Numerical conformal mapping of an exterior domain of a comma-shaped bead by the charge simulation method, where (a) is mapped onto (b), and (c) is the unit circle of (b) enlarged. Same symbols are used as in Fig. 1.

表 4 誤差評価 (勾玉形)

Table 4 Error estimation in the case of a comma-shaped bead. Same symbols are used as in Table 1.

r	$N=16$	$N=32$	$N=64$
	E_M		
	Γ		
0.5	1.0E-1	4.4E-2	5.8E-3
	0.858682	0.863878	0.864862
1.0	6.9E-2	1.9E-2	1.0E-3
	0.862258	0.864776	0.864917
1.5	4.8E-2	9.7E-3	7.2E-4
	0.863636	0.864877	0.864917
$r=0.864920$			

ものが(c)である。等角写像の結果、勾玉の境界の凹部は局所的に著しく縮小されていることがわかる。

表4は典型的な r の値に対する計算精度を示したものである。写像関数との比較による直接的な誤差の評価はできないが、 $E_M=7.2 \times 10^{-4}$ ($N=64$, $r=1.5$) という値から、 E_R は 10^{-3} 程度であると考えることができる。

なお、倍精度計算の結果、 $N=128$, $r=1.5$ の場合は $E_M=1.6 \times 10^{-4}$, $\Gamma=0.86492001$ であり、 Γ の値はこの桁まで $r=1.0$ の場合と一致した。したがって、この Γ の値を r とみなせば、いずれの場合も(17)、(18)の関係はよく成立している。

6. む す び

Jordan 領域の外部から単位円の外部への等角写像の数値計算法を提案し、典型的な領域に対して数値実験を行った。その結果、数十の電荷を用いて、最大相対誤差が $10^{-6} \sim 10^{-3}$ という高い精度が得られた。同時に求まる領域の容量の精度はさらに高い。

一般的に、Dirichlet 問題の解である調和関数とその共役調和関数の数値解法はすべて等角写像の計算に適用することができる。しかし、等角写像は、内部問題と外部問題のいずれの場合も、もともと境界上の対応が定まれば内部の対応も定まるという性質を持っている。この意味で、偏微分方程式の極めて汎用的な数値解法である差分法や有限要素法と一概に優劣の比較はできないとしても、代用電荷法は等角写像の問題に適した効率的な計算法であるといえよう。境界の対応が定まれば内部の写像が計算できるという特徴は外部問題において特に重要である。

等角写像の問題に適用された代用電荷法は、数学的表現と計算法の簡潔性、精度の高さと誤差評価の容易

性等に優れた特徴を備えている。多重連結領域、特に2重連結領域の等角写像への適用が次の課題である。

謝辞 著者が等角写像の数値解析的研究を始める契機を与えて下さり、また日頃この問題に関する討論と助言をいただく愛媛大学工学部応用数学教室 安倍 齊教授に感謝します。

参 考 文 献

- 1) 天野 要: 代用電荷法に基づく等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, Vol. 28, No. 7, pp. 697-704 (1987).
- 2) 村島定行: 代用電荷法とその応用, 194 p., 森北出版, 東京 (1983).
- 3) 村島定行, 加藤三二男, 宮近詠史: 代用電荷法における誤差の性質について, 電気学会論文誌A, Vol. 98, No. 1, pp. 39-46 (1978).
- 4) 村島定行, 近藤弘道, 横井正博, 賛田 寛: 代用電荷の配置法と誤差との関係, 電気学会論文誌A, Vol. 102, No. 1, pp. 1-8 (1982).
- 5) Rabinowitz, P.: Numerical Experiments in Conformal Mapping by the Method of Orthogonal Polynomials, *J. ACM*, Vol. 13, No. 2, pp. 296-303 (1966).
- 6) Symm, G. T.: An Integral Equation Method in Conformal Mapping, *Numer. Math.*, Vol. 9, pp. 250-258 (1966).
- 7) Symm, G. T.: Numerical Mapping of Exterior Domains, *Numer. Math.*, Vol. 10, pp. 437-445 (1967).
- 8) Hayes, J. K., Kahaner, D. K. and Kellner, R. G.: An Improved Method for Numerical Conformal Mapping, *Math. Comput.*, Vol. 26, No. 118, pp. 327-334 (1972).
- 9) Hough, D. M. and Papamichael, N.: The Use of Splines and Singular Functions in an Integral Equation Method for Conformal Mapping, *Numer. Math.*, Vol. 37, pp. 133-147 (1981).
- 10) Hough, D. M. and Papamichael, N.: An Integral Equation Method for the Numerical Conformal Mapping of Interior, Exterior and Doubly-Connected Domains, *Numer. Math.*, Vol. 41, pp. 287-307 (1983).
- 11) Berrut, J.-P.: A Fredholm Integral Equation of the Second Kind for Conformal Mapping, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 14, No. 1 & 2, pp. 99-110 (1986).
- 12) Kerzmann, N. and Trummer, M. R.: Numerical Conformal Mapping via the Szegő Kernel, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 14, No. 1 & 2, pp. 111-123 (1986).
- 13) Reichel, L.: A Fast Method for Solving Certain Integral Equations of the First Kind with Application to Conformal Mapping, *J.*

- Comput. Appl. Math.*, Vol. 14, No. 1 & 2, pp. 125-142 (1986).
- 14) Mayo, A.: Rapid Methods for the Conformal Mapping of Multiply Connected Regions, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 14, No. 1 & 2, pp. 125-142 (1986).
- 15) Trefethen, L. N. (ed.): *Numerical Conformal Mapping*, 269 p., North-Holland (1986); reprinted from *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 14, No. 1 & 2 (1986).
- 16) Gutknecht, M. H.: Numerical Conformal Mapping Methods Based on Function Conjugation, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 14, No. 1 & 2, pp. 31-77 (1986).
- 17) Henrici, P.: *Applied and Computational Complex Analysis*, Vol. 1, pp. 286-432, John Wiley and Sons, New York (1974).
- 18) Henrici, P.: *Applied and Computational Complex Analysis*, Vol. 3, pp. 323-443, John Wiley and Sons, New York (1986).
- 19) Tsuji, M.: *Potential Theory in Modern Function Theory*, 590 p., Maruzen, Tokyo (1959).
- 20) 辻 正次: 複素関数論, 585 p., 槇書店, 東京 (1985).
- 21) 村島定行, 小野記久雄, 賛田 寛: 代用うず法の検討, 電気学会論文誌A, Vol. 103, No. 2, pp. 65-72 (1983).
- 22) 安倍 齊: 応用関数論, 282 p., 森北出版, 東京 (1981).

(昭和62年7月3日受付)
(昭和62年12月9日採録)



天野 要 (正会員)

昭和23年生。昭和46年京都大学工学部電子工学科卒業。昭和49年同大学院工学研究科修士課程修了。昭和53年北海道大学大学院工学研究科博士課程修了。工学博士。同年北海道大学大型計算機センター助手。現在、愛媛大学工学部応用数学教室助教授。応用数学、数値解析、特に関数論の数値解析的研究に興味を持つ。数学会、電子情報通信学会、ACM 各会員。