「問題解決の手順をデザインする第一歩は」

神奈川県立教育センター
武 沢 護
〒251-0871 藤沢市善行 7-1-1
TEL 0466-81-0185 FAX 0466-83-4660
e-mail:takezawa@edu-ctr.pref.kanagawa.jp

概要

初等中等教育において問題解決にあたっての数学的素養について述べる．特に高校生の数学学習における，与えられた問題状況の記述・表現による違いでの解決の困難さ，また，関数の理解を前提とする漸化式の理解など，実際の指導事例とそれに関わる調査結果を紹介し，それをもとに問題解決においてどのようなイメージモデル化が有効かを探る．

1 はじめに

人間が本来もつ数学的能力（または素養）の育成は，初等中等教育において最も重要なものの一つであろう．それは例えば，人間がある問題（それもかなり単純な形での）を解決するにあたって，思考・判断するプロセスを表現する訓練として，数学的能力が欠かせないことからも容易に理解できるであろう．しかし，現在の学校教育における数学教育は必ずしもその目的には十分に応えていない．ここでは，数学的能力を情報処理という観点から，高等学校での指導の事例や調査結果を報告し，初等中等教育において情報教育を進めるにあたっての数学的能力の育成に関する課題について述べる．

2 高等学校数学試験より

まず，高校２年生を対象に，既習の関数についてその理解度を調べる目的で，次のような問題を出題し，それらの正答率を調査した．

問：次の関数のグラフについて，ｙ切片，傾きを求め，そのグラフを描け．

Panel Session Note
M. Takezawa
Kanagawa Pref. Education Center

(1) $y=x$，(2) $y=2x+1$，

(3) $x+y=1$，(4) $y=\frac{2}{3}x+1$

(5) $3x+4y=12$

次に，高校３年生の２学期に次のような試験問題を出題した．これは，ある別の調査を目的として出題したものである．

問１：円周 $(r\cos t, r\sin t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ の長さＬを求めよ．

問２：面積 $s=4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$ を計算せよ．

問３：Ｍ君がＡ君とＢ君を相手にテニスの試合を３回行う．これらの試合でＭ君が２連勝するとごほうびがもらえることになった．テニスの腕前は，Ｍ君がＡ君よりうまく，Ｂ君よりは下手であるとする．対戦パターンは次の１または２のいずれかを選ぶ．さて，どちらを選択する方がＭ君に有利だろうか．

	１回戦	２回戦	３回戦
1	A	B	A
2	B	A	B

問4：（3n+1問題）

自然数列$\{a_n\}$を次のように定める．

但し，$a_k=1$となったところで数列を終わる．

$$a_{k+1}=\begin{cases}\dfrac{a_k}{2} & (a_k:even)\\ 3a_k+1 & (a_k:odd)\end{cases}$$

(1) $a_1=3$の時，数列$\{a_n\}$を求めよ．

(2) $a_1=9$の時，数列$\{a_n\}$は第何項まで作れるか．

以上の問題について，結果報告は後日述べるとして，この問題群について述べる．

3　記述・表現レベルについて

2での出題をもとに，与えられた問題文の記述·表現レベルについて述べる．解答者はまず，記述・表現レベルからその問題を把握・理解する際，解決手順を何らかの定式化・モデル化する必要があるだろう．

3.1 問題解決の手順のデザイン

問題の設定，把握・理解

↓

定式化（モデル化）

↓　・文章，数式，図示

↓　・プログラミングなど

↓

問題の解決（計算，シミュレーション等）

3.2 記述・表現レベルの変更による手順の違い

問1：曲線$(r\cos t, r\sin t)$　$(0\le t\le 2\pi)$の長さLを求めよ．

問1：半径rの円周の長さを求めよ．

問2：半径rの円の面積を求めよ．

問3：･･･テニスの腕前は，M君がA君に勝つ確率は$\dfrac{2}{3}$，B君に勝つ確率は$\dfrac{1}{3}$である．･･･

問4：ある自然数に対し，それが偶数であればその数を$\dfrac{1}{2}$にし，それが奇数であればその数を3倍して1を加える．このような規則で数列を構成するとき、次の問に答えよ．

各問，以上のような表現に変更した場合，解答者にとって問題解決の手順はどのように変わるだろうか．

また，図示等のイメージ化はその問題の意味の把握・理解を常に容易にするだろうか（初等幾何など）．

3.3 イメージモデルの問題点

イメージ化として，文章化，数式化（関数，漸化式もしくは再帰的な記法など）のような，時間や論理を追わなくてはいけないものと，図示のような空間的な把握によるものではその解決に当たって自ずから違いがでる．一般に前者の方が高校生にとってはむつかしいと思われる．

しかし，図示等のイメージ化が問題解決を常に容易にするというものでもなく，この問題点は初等幾何の問題で起こるように，現象の特殊化から起こる普遍性や一般性を欠くケースになりかねない．それは「比喩」という表現の有効性が一面では個人もしくは一定の集団の既有の知識に依存することに似ている．

4　おわりに

さまざまな問題状況から，解決に向けた手順のデザイン能力を育成することは重要である．これらの育成は，従来の高等学校の教科で扱った内容・教材を生かし，その指導方法を見直すこと（さまざまな教科の再構築）でも十分可能である．そしてその際，ここで述べたような，手順を意識した指導や関数概念を十分理解させることは重要で，問題解決の技法，関数指導，漸化式の指導など，新学習指導要領においてどのように取り組むかが今後の課題となる．