Vol.2014-AL-147 No.6
2014/3/3

賞金収集ネットワークアクティベーション問題に対する近似アルゴリズム

福永 拓郎[1,2,a)]

概要：ネットワークアクティベーション問題は，重みの合計が最小になるようにグラフの点に重みを割り当てる問題である．グラフの各辺は端点に割り当てられた重みによってアクティベートされるかどうかが決まり，アクティベートされた辺からなる部分グラフが連結度に関する条件を満たすように重みを割り当てなければならない．この問題は点重み最小化ネットワーク設計問題を拡張した問題であり，無線ネットワークの設計などに応用を持つことが知られている．本論文ではこの問題をさらに拡張した賞金収集ネットワークアクティベーション問題を考え，初めての非自明な近似アルゴリズムを与える．我々のアルゴリズムは新しく提案する線形計画緩和問題に基づいている．アルゴリズムはスパイダーと呼ばれる部分グラフをアクティベートする重みを繰り返し計算することによって，緩和問題の最適解から近似解を計算する．

Approximation algorithms for prize-collecting network activation problems

Abstract: In the network activation problem, each edge in a graph is associated with an activation function, that decides if the edge is activated from node-weights assigned to its end-nodes. The feasible solutions of the problem are the node-weights such that the activated edges form graphs of required connectivity, and the objective is to find a feasible solution minimizing its total weight. It is known that the problem extends the node-weighted survivable network design problem and has applications to wireless networks. In this paper, we consider a prize-collecting version of the network activation problem, and present first non-trivial approximation algorithms. Our algorithms are based on a new LP relaxation of the problem. They round optimal solutions for the relaxation by repeatedly computing node-weights activating subgraphs called spiders, which are known to be useful for approximating the network activation problem.

1. はじめに

1.1 問題設定

ネットワーク設計問題とは，少ないコストで十分な連結性を備えたネットワークを構築するための最適化問題である．入力として，点集合 V と辺集合 E を持つグラフ G，要求対 $\{s_1, t_1\}, \ldots, \{s_d, t_d\} \subseteq V$，そして連結度要求 $r_1, \ldots, r_d \in \mathbb{Z}_{>0}$ が与えられる．整数集合 $\{1, \ldots, d\}$ を $[d]$，$\max_{i \in [d]} r_i$ を k で表し，集合 $\bigcup_{i \in [d]} \{s_i, t_i\}$ に含まれる点を端点と呼ぶ．ネットワーク設計問題の実行可能解は，E の部分集合 F のうち，各要求対 $\{s_i, t_i\}$ に含まれる端点が r_i 本の互いに素なパスによって結ばれているような部分グラフ (V, F) を構成するようなものとして定義される．問題の目的は，重みを最小化するような実行可能解を求めることである．問題自体は G が無向グラフであっても有向グラフであっても定義できるが，本報告では G は無向グラフである場合についてのみ議論する．

賞金収集ネットワーク設計問題は，ネットワーク設計問題の拡張となっている．各要求対 $\{s_i, t_i\}$ にはペナルティ $\pi_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ が与えられる．賞金収集ネットワーク設計問題の解 F は連結度要求を必ずしも満たさなくても良いが，要求対 $\{s_i, t_i\}$ の要求を満たさない場合はペナルティ π_i を支払わなければならない．問題の目的は F の重みと F が支払うペナルティの合計を最小化することである．

これらの問題では，パスのどのようなときに素であると見なすかという点と，辺集合の重みをどのように定義する

[1] 国立情報学研究所
National Institute of Informatics
[2] JST, ERATO, 河原林巨大グラフプロジェクト
JST, ERATO, Kawarabayashi Large Graph Project
[a)] takuro@nii.ac.jp

かという点ついて，いくつかの場合が考えられる．二つの点を結ぶ互いに素なパスの最大本数はその二点間の連結度と呼ばれ，素性をどのように定義するかはどの連結度を考えるかによって決まる．互いに辺を共有しない（辺素な）パスの最大本数のことを辺連結度と呼ぶ．一方，要素連結度では，ある二つの端点を結ぶパスが辺と端点でない点を共有しないとき，それらは素であるとみなされる．点連結度では，内点を共有しない二本のパスが素であると定義される．

辺集合の重みの定義としては，辺重みと点重みが考えられる．辺重みによって定義される問題では，入力として辺重み関数 $w\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が与えられ，集合 $F \subseteq E$ の重みは $\sum_{e \in F} w(e)$ と定義される．点重みを持つ問題では，重み関数は $w\colon V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ として定義される．本稿では $V(F)$ を F に含まれる辺が接続する点の集合と定義する．その上で，F の重み $w(V(F))$ は $\sum_{v \in V(F)} w(v)$ と定義される．

w を辺重み関数とする．点 u と u' を結ぶ e について，新しい点 v を導入し，u と v を結ぶ辺 e_1 と u' と v を結ぶ辺 e_2 で辺 e を置き換える．v の点重み $w'(v)$ を $w(e)$ と定義し，u の点重み $w'(u)$ と u' の点重み $w'(u')$ を 0 と定義する．この操作をグラフの各辺について行うと，辺重み w を最小化する問題は点重み w' を最小化する問題に等しい．つまり，点重みによって定義される問題は辺重みから定義される問題の一般化になっている．

本報告では，点重みから定義されるネットワーク設計問題をより一般化した問題である，ネットワークアクティベーション問題について議論する．W を $W \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ と定義する．ネットワークアクティベーション問題では，解は点重み関数 $w\colon V \to W$ と定義される．点 u と v を結ぶ無向辺を $\{u, v\}$ と表し，u から v へ向き付けされた有向辺を uv と表す．辺 $\{u, v\} \in E$ を向き付けして得られる各有向辺 uv について，アクティベーション関数 $\psi^{uv} : W \times W \to \{\text{true}, \text{false}\}$ が与えられる．ただし，アクティベーション関数は任意の $\{u, v\} \in E$ と $i, j \in W$ について，$\psi^{uv}(i, j) = \psi^{vu}(j, i)$ を満たすとする．ある $i, i', j, j' \in W$ について $\psi^{uv}(i, j) = \text{true}$, $i' \geq i$, $j' \geq j$ であるならば必ず $\psi^{uv}(i', j') = \text{true}$ が成立するとき，ψ^{uv} は単調であるという．本稿では常に単調なアクティベーション関数を考える．$\psi^{uv}(w(u), w(v)) = \text{true}$ であるとき，辺 $\{u, v\}$ が点重み w によってアクティベートされるという．

E_w を，E に含まれる辺のうち点重み w によってアクティベートされるものの集合とする．また，$\sum_{v \in V} w(v)$ を $w(V)$ で表す．ネットワークアクティベーション問題では，E_w が連結度の制約を満たすような点重み w が実行可能解として定義される．問題の目的は，実行可能解である点重み w のうち，$w(V)$ を最小化するものを求めることである．賞金収集ネットワークアクティベーション問題では点重み w に関する制約はないが，E_w によって連結度の要求が満たされない要求対のペナルティと $w(V)$ の合計を最小化する w を求めることが問題の目的である．

ネットワークアクティベーション問題は点重み最小化ネットワーク設計問題を一般化したものになっている．これを見るために，$\omega\colon V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を点重みとしよう．W を $\{\omega(v)\colon v \in V\}$ と定義する．無向辺 $\{u, v\} \in E$ についてアクティベーション関数 ψ^{uv} を，$i \geq \omega(u)$ かつ $j \geq \omega(v)$ であるとき $\psi^{uv}(i, j) = \text{true}$ となり，それ以外の時に $\psi^{uv}(i, j) = \text{false}$ であるような関数と定義する．このように定義された ψ^{uv} は単調となる．このアクティベーション関数によって定義されるネットワークアクティベーション問題の極小解 $w\colon V \to W$ は，$\omega(v)$ より大きい重みを点 v に与えることはない．よって，w によってアクティベートされる辺が v に接続しているとき，$w(v) = \omega(v)$ が成立すると仮定できる．これはつまり，点重み ω を最小化するネットワーク設計問題は，ω から上のように定義されるアクティベーション関数を持つネットワークアクティベーション問題に等しいことを意味する．

ネットワーク設計問題と同様に，ネットワークアクティベーション問題でも，辺連結度，要素連結度，点連結度の 3 種類の連結度に関する要求を考えることができる．これに加えて我々は，根付き点連結度要求と部分集合点連結度要求と呼ばれる要求についても，ネットワークアクティベーション問題を考える．根付き点連結度要求を持つネットワークアクティベーション問題は，点連結度に関するネットワークアクティベーション問題の特殊ケースである．根と呼ばれる点 $s \in V$ が存在し，要求対は必ず s を含む対 $\{s, t_1\}, \ldots, \{s, t_d\}$ である．制約は，各 $i \in \{1, \ldots, d\}$ について，s と t_i の点連結度を与えられた整数 k 以上にすることである．一方，部分集合点連結度要求では，端点 $t_1, \ldots, t_d \in V$ が与えられ，制約は任意の 2 端点 t_i と t_j の間の点連結度を k 以上にすることである．部分集合点連結度要求について賞金収集ネットワークアクティベーション問題を考えるときは，ペナルティはそれぞれの要求対についてではなく，それぞれの端点に与えられるとする．π_i を端点 t_i に与えられたペナルティとする．問題の解は，点重み w に加えて，グラフ (V, E_w) の k 連結成分 U も指定する必要がある．このとき，解が支払わなければならないペナルティは $\sum_{i \in [d] : t_i \notin U} \pi_i$ と定義される．

ネットワークアクティベーション問題は Panigrahi [14] によって導入された．彼は，問題が点重み最小化ネットワーク設計問題を一般化するだけではなく，無線ネットワークに関していくつか応用があることも指摘した．本稿では [14] を参照するにとどめ詳しくは述べないが，そのような応用例の一つとして無線ネットワークの導入コスト最小化問題を紹介する．この問題では，無線通信の基地局を設置するためにに，指定された位置に塔を建築することを考える．塔の建設には，その高さに比例したコストがかか

るとする．二つの塔に設置された基地局が通信するためには，塔の頂点に設置されたアンテナを結ぶ直線上に障害物が存在しないことが必要である．このような設定のもとで，連結度が高いネットワークを構築するために必要な塔の高さを計算するのが無線ネットワーク導入コスト最小化問題であり，問題の目的は塔建設のために必要なコストの合計を最小化することである．無線ネットワークの点 u と v について，対応する地点に建築された塔の高さをそれぞれ i と j とする．このとき，u と v の間に辺が存在するための必要十分条件は，$\alpha_{uv} i + (1-\alpha_{uv}) j \geq \beta_{uv}$ が成立することである．ただし，α_{uv} と β_{uv} は二つの地点を結ぶ線上に存在する障害物から決まるある定数である．無線ネットワーク導入コスト最小化問題は，この $\alpha_{uv} i + (1-\alpha_{uv}) j \geq \beta_{uv}$ が成り立つときに $\psi^{uv}(i,j) = \text{true}$ となるようなアクティベーション関数 ψ^{uv} から定義されるネットワークアクティベーション問題として定式化できる．

ネットワークアクティベーション問題の応用のほとんどで，$|W| = O(|V|)$ と仮定しても問題ないことが知られている．実際，この問題の先行研究 [13], [14] では同様の仮定の下で議論されている．これに倣い，本研究でも同じ仮定をおくこととする．我々のアルゴリズムの計算量は，G の大きさと $|W|$ に関する多項式で表現される．$|W| = O(|V|)$ が成立するという仮定の下では，これは問題の入力サイズの多項式となる．

関連研究について簡単に紹介する．ネットワーク設計問題については非常に多くの研究があり，全てを紹介することはできない．辺重み最小化ネットワーク設計問題について知られている最良の近似アルゴリズムとしては，2 近似アルゴリズムが辺連結度 [6] と要素連結度 [5] に対して，$O(k^3 \log |V|)$ 近似アルゴリズム [4] が点連結度に対して知られている．点重み最小化については，辺連結度に関する $O(k \log |V|)$ 近似アルゴリズムが Nutov [10] によって与えられた．彼はさらに，$O(k \log |V|)$ 近似アルゴリズムを要素連結度について与えた [11]．彼のアルゴリズムは，非交差可能性を持つ集合対族を辺によって被覆する問題に対するアルゴリズムに基づいている．しかしながら，下で詳しく述べるように，非交差可能集合対族の被覆に関する彼の主張には間違いが含まれている．

賞金収集ネットワーク設計問題についてもこれまで多くの研究がある．特に，点重み最小化問題は近年注目を集めている．Könemann, Sadeghian, Sanità [8] は点重み最小化賞金収集シュタイナー木問題に対する $O(\log |V|)$ 近似アルゴリズムを与えた．彼らのアルゴリズムは多くの文脈で有用であることが知られているラグランジュ係数保存性と呼ばれる性質を持つことが示されている．そのようなアルゴリズムは元々，Moss, Rabani [9] によって提案されていたが，Könemann, Sadeghian, Sanità [8] は [9] の主張に誤りがあることを示し，新たなアルゴリズムを与えた．

Bateni, Hajiaghayi, Liaghat [1] は，点重み最小化賞金収集シュタイナー森問題に対する $O(\log |V|)$ 近似アルゴリズムを与え，さらにそれを予算付きシュタイナー木問題に応用した．Chekuri, Ene, Vakilian [3] は点重み最小化賞金収集ネットワーク設計問題の辺連結度要求を持つ場合について $O(k^2 \log |V|)$ 近似アルゴリズムを与えた．彼らは後に，近似比を $O(k \log |V|)$ に改善し，さらに要素連結度要求を持つ場合に対しても拡張した ([15] 参照). 文献 [15] に記載された彼らの証明は，点重み最小化ネットワーク設計問題に対する Nutov [11] のアルゴリズムが，彼の非交差可能集合対族に対する解析は間違っているものの，点重み最小化ネットワーク設計問題から現れる問題については主張通りの性能を持つことを示している．付け加えて，[15] で示された要素連結度要求に対する結果と，Chuzhoy と Khanna [4] によって与えられた点連結度要求を要素連結度要求に帰着する手法により，点連結度要求を持つ問題に対しては $O(k^4 \log |V|)$ 近似アルゴリズムが存在する．

ネットワークアクティベーション問題に対しては，Panigrahi [14] が $k \leq 2$ の場合について $O(\log |V|)$ 近似アルゴリズムを与え，さらにアクティベートされた辺が全域木を構成することを求める問題であっても $o(\log |V|)$ 近似を達成することは NP 困難であることを証明した．Nutov [13] は，さらに高い連結度の要求を持つ場合に対して近似アルゴリズムを与えた．アルゴリズムの近似比は，辺連結度と要素連結度の場合は $O(k \log |V|)$，点連結度の場合は $O(k^4 \log^2 |V|)$ である．彼はさらに，根付き点連結度要求や部分連結度要求についても議論している．これらの結果は，非交差可能集合対族の被覆に関する結果 [11] に基づいている．先の述べたように，[11] には誤りが含まれており，[15] で与えられた修正はネットワークアクティベーション問題には適用できない．よって，ネットワークアクティベーション問題が要素連結度や点連結度要求を持つ場合には，非自明なアルゴリズムは存在しない．本研究での貢献は，[11] での誤りを修正し，これらの場合について近似アルゴリズムを与えることである．

点重み最小化ネットワーク設計問題やネットワークアクティベーション問題に関する上に挙げた先行研究のほとんどは，貪欲スパイダー被覆アルゴリズムを使用している．この概念は Klein と Ravi [7] によって，点重み最小化シュタイナー木問題を扱うために提案された．スパイダーは，高々一つの点が 3 以上の次数を持ち，二つ以上の端点を被覆する木として定義される．3 以上の次数を持つ点のことをスパイダーの頭と呼び，次数 1 の点を足と呼ぶ．全ての点が 2 以下の次数を持つときは，木に被覆される任意の点を選んで頭と呼ぶ．Klein と Ravi [7] は，任意のシュタイナー木を点素なスパイダーに分解し，各端点が分解によって生じたスパイダーのどれかに被覆されるようにできることを示した．ある部分グラフの被覆率を，その点重みを

被覆された端点の数で割ったものとして定義する．Klein, Ravi [7] のスパイダー分解に関する定理は，被覆率が任意のシュタイナー木より小さいか等しいスパイダーが存在することを示している．f 個の足を持つスパイダーを縮約すると，端点の数が $f-1$ だけ減少する．これらの事実より，最小被覆率をもつスパイダーを繰り返し縮約していく貪欲法は，点重み最小化シュタイナー木問題に対して $O(\log|V|)$ 近似を達成する．最小被覆率をもつスパイダーを計算することは難しいが，スパイダーの頭 h と足の数 f はそれぞれ $|V|$ 通りの選択肢しかないので，多項式時間で推測することができる．h から各端点への最短パスをそれぞれ計算し，距離が小さいものから f 本のパスを持ってくる．これらのパスの和は必ずしもスパイダーではないが，その被覆率はスパイダーのもの以下であり，これらを縮約しても端点の数が $f-1$ だけ減少するので，スパイダーの代わりにパスの和からなる部分グラフを繰り返し縮約することで，重み最小化シュタイナー木問題に対する $O(\log|V|)$ 近似を達成することができるというのが，[7] で示された結果である．

1.2 本論文の成果

本論文の成果は，賞金収集ネットワークアクティベーション問題に対して近似アルゴリズムを与えることである．我々のアルゴリズムは，辺連結度については $O(k\log|V|)$ 近似，要素連結度については $O(k^2\log|V|)$ 近似を達成する．これらの結果は，[4], [11], [12] で与えられた連結度要求の分解に関する結果を用いることで，一般の点連結度要求については $O(k^5\log^2|V|)$ 近似，根付き点連結度要求や部分点連結度要求に対しては $O(k^3\log|V|)$ 近似を与える．我々の結果は，賞金収集ネットワークアクティベーション問題に対する初めての非自明な近似アルゴリズムを与えるだけではなく，[11], [13] での要素連結度や点連結度に関するネットワークアクティベーション問題に関する結果の誤りを修正するものでもある．

我々の結果は全て，賞金収集集合対被覆問題に対するアルゴリズムに基づいている．集合対は，$X\subseteq X^+$ を満たす V の部分集合 X, X^+ からなる順序対 $\hat{X}=(X,X^+)$ として定義される．集合対の一つ目の要素を内部要素，二つ目の要素を外部要素と呼ぶ. 本稿では常に，集合対 $\hat{X}$ の内部要素を X で，外部要素を X^+ で表す．$\delta_E(\hat{X})$ を辺集合 E に含まれる辺のうち X と $V\setminus X^+$ を結ぶものの集合と定義する．$e\in\delta_E(\hat{X})$ であるとき，辺 e は集合対 $\hat{X}$ を被覆するといい，集合対族 $\mathcal{V}$ に所属する任意の集合対が辺集合 F の辺のどれかに被覆されるとき，F は $\mathcal{V}$ を被覆するという．集合対被覆問題は，集合対の族が与えられたときに，各集合対を被覆する辺集合のうち重みを最小化するものを求める問題である．賞金収集集合対被覆問題では，ペナルティを備えた集合対の族が与えられ，辺によって被覆されない集合対のペナルティと重みの合計を最小化する辺集合と求める問題である．

増大問題とは，与えられたグラフ内での要求対の連結度を，重み最小の辺を加えることによってそれぞれ 1 ずつ増やす問題のことを指す．2 以上の値をとる連結度要求を持つネットワーク設計問題をその増大問題に帰着する考え方はこれまでにも頻繁に用いられてきた．我々は 2 章において，この考え方が賞金収集ネットワークアクティベーション問題にも適用できることを示す．メンガーの定理により，連結度を一つ増やす辺集合をアクティベートする問題は集合対被覆問題として定義できる．

二つの集合対 $\hat{X}$ と $\hat{Y}$ に対して，$\hat{X}\cap\hat{Y}=(X\cap Y, X^+\cap Y^+)$，$\hat{X}\cup\hat{Y}=(X\cup Y, X^+\cup Y^+)$，そして $\hat{X}\setminus\hat{Y}=(X\setminus Y^+, X^+\setminus Y)$ を定義する．集合対族 $\mathcal{V}$ が任意の $\hat{X},\hat{Y}\in\mathcal{V}$ に対して (i) $\hat{X}\cap\hat{Y}, \hat{X}\cup\hat{Y}\in\mathcal{V}$，もしくは (ii) $\hat{X}\setminus\hat{Y}, \hat{Y}\setminus\hat{X}\in\mathcal{V}$ を満たすとき，$\mathcal{V}$ は非交差可能であるという．増大問題から定義される集合対族は，連結度要求が辺連結度や要素連結度に関するものである場合，非交差可能であることが知られている．点連結度要求の場合は一般には非交差可能ではないが，Chuzhoy と Khanna [4] や Nutov [11], [12] によって，非交差可能な集合対の被覆問題に帰着できることが示されている．

我々は非交差可能な集合対族から定義される賞金収集集合対被覆問題に対してスパイダー被覆アルゴリズムを利用する．Nutov [10], [11], [13] はスパイダーの概念を非交差可能集合対族に対して拡張し，それが点重み最小化ネットワーク設計問題やネットワークアクティベーション問題に有効であることを示した．彼のアルゴリズム概要は，Klein, Ravi [7] によって提案された点重み最小化シュタイナー木問題のアルゴリズムと同様である．ネットワークアクティベーション問題に対しては，どの点がスパイダーの頭であるかだけではなく，頭に割り当てられる重みの値も推測する必要がある．また，頭から足を結ぶパスをアクティベートするために必要な重みの最小値も計算する必要があるが，Nutov [13] はこれに対する 2 近似アルゴリズムを与えている．アルゴリズムの解析のために，彼はスパイダーの最小被覆率が非交差可能集合対族を被覆する任意の部分グラフの被覆率以下であることを示した．これは，Klein, Ravi [7] によるスパイダー分解定理を拡張することで証明された．

Nutov によるスパイダー分解定理はネットワーク設計問題やネットワークアクティベーション問題から定義される集合対被覆問題に対しては有効であった．しかし，これらの問題を賞金収集問題へ拡張したものに対してアルゴリズムを拡張するには，より強い分解定理が必要となる．我々が行ったのは，問題の線形計画緩和問題を定義し，スパイダーの最小被覆率と緩和問題に対する分数解の被覆率を比較することである．同様の試みは先行研究において点重み最小化ネットワーク設計問題に対しては行われてきた [1], [3], [8]．しかしながら我々は先行研究で扱われて

いるよりもより複雑な考察をしなければならない．なぜなら，ネットワーク設計問題では集合対族を被覆するためにどの辺をアクティベートするかという点と，それらの辺をアクティベートするためにどの重みを割り当てるかという点を同時に考えなければならないからである．実際，ネットワークアクティベーション問題に対して自然に定義される線形計画緩和問題は非常に高い整数性ギャップを持つために，それを利用しては望ましい結果を得ることはできない．我々は，自然に定義される緩和問題よりもより強い制約を持つ新しい線形計画問題を定義した．我々が定義した線形計画問題が賞金収集集合対被覆問題を緩和していることは自明な事実ではないが，非交差可能集合対族に関する構造定理から証明することができる．

提案アルゴリズムは，まず最初に我々が定義した線形計画緩和問題を解き，得られた最適解に応じていくつかの要求対を取り除く．これは，Bienstock et al. [2] が提案した手法に乗っ取っており，賞金収集ネットワーク設計問題に対する解法としては一般的なアプローチである．それから提案アルゴリズムは，残った要求対の連結度を一つ増加される辺集合をアクティベートする点重みを計算する．このように，問題を増大問題に帰着させる方法は Nutov [13] でも取られていた手法である．この連結度を増加させる増大問題を解く際に，スパイダーの最小被覆率を緩和問題の最適解に基づいて解析する必要があるが，そのために我々はスパイダーを計算する主双対アルゴリズムを提案する．一般的に主双対アルゴリズムは線形計画問題の実行可能解と同時にその双対問題の解も計算するが，我々のアルゴリズムは提案した緩和問題の双対解を直接的には計算しない．その代わりに，提案した緩和問題よりもより簡潔な線形計画問題の双対解を計算する．この簡潔な線形計画問題は，我々の緩和問題をさらに緩和しているわけではないが，集合対族がコアからなるラミナー族である場合は，我々の緩和問題と簡潔な線形計画問題の最適値が定数倍の範囲以内に収まっていることを示すことができる．ここでコアとは，集合対族の中で極小な集合対を高々一つしか包含しない集合対のことである．集合対の包含関係やラミナー性などは後で定義する．我々の主双対アルゴリズムが計算する双対解では，ラミナー族を成すコアに対応する変数にしか非零の値を割り当てない．この性質により，主双対アルゴリズムによって計算されるスパイダーの被覆率に対する上界を提案した緩和問題の最適値に基づいた値として導出することができる．

主双対アルゴリズムを与えた後は，基本的には [10], [11], [13] のアプローチに従って進むが，さらに考察が必要となる場面がある．Nutov [11] は最小被覆を持つスパイダーの定数倍近似解を繰り返し計算し縮約することで，非交差可能集合対族の被覆問題に対する $O(\log |V|)$ 近似アルゴリズムが得られると主張した．この主張は，集合対族が $X = X^+$ を満たすような集合対しか含まない場合は正しく，辺連結度要求を持つ問題などはこの場合に含まれる．しかしながら，一般の非交差可能集合対族には主張は成り立たない．Nutov [11] の主張は，集合対族が非交差可能なときには，f 個の足を持つスパイダーを縮約すると極小な集合対の数が f の定数倍だけ減少するという事実に基づいている．だが，スパイダーを縮約しても極小な集合対の数が一つも減らないような例が存在することから分かるように，この事実は成り立たない．Chekuri, Ene, Vakilian [15] は，Nutov の主張が点重み最小化ネットワーク設計問題から現れる集合対族に対しては正しいことを示したが，これはネットワークアクティベーション問題から現れる集合対族には拡張できない．この状況を修正するために，我々は新たなポテンシャル関数を定義した．部分グラフの被覆率の定義を新たに，部分グラフをアクティベートするための重みの合計値とポテンシャルの減少量の比と定義する．このように被覆率の定義を変更すると，スパイダーの最小被覆率が高々集合対族を被覆する辺集合の被覆率の定数倍となることを証明することはできない．その代わりに，本来の定義の意味での被覆率を最小化するスパイダーが，集合対族を被覆する辺集合の被覆率を $O(k)$ 倍の範囲で近似することを証明する．これにより，非交差可能集合対族の被覆問題に対する $O(k \log |V|)$ 近似アルゴリズムが得られる．

1.3 構成

2 章では，問題の賞金収集集合対被覆問題への帰着を与える．加えて，集合対に関する記法や基本的な事実についても紹介する．3 章では，賞金収集集合対被覆問題の線形計画緩和問題を導入する．4 章で主定理について述べ，5 章で結論や今後の課題について議論する．ページ数の制約のため，本稿では定理や補題の証明は省略する．

2. 賞金収集集合対被覆問題への帰着

まず初めに，増大問題を定義する．二つの辺集合 E_0 と E が与えられる．アクティベーション関数は E に所属する各辺に与えられる．グラフ (V, E_0) において各要求対 $\{s_i, t_i\}$ の連結度が $k-1$ 以上であると仮定する．E の部分集合 F が実行可能であることの必要十分条件は各要求対のグラフ $(V, E_0 \cup F)$ における連結度が k 以上であることである．問題の目的は E_w が実行可能であり，かつ $w(V)$ を最小化する点重み関数 $w\colon V \to W$ を求めることである．賞金収集増大問題では，要求対 $\{s_i, t_i\}$ はペナルティ π_i を持っており，$\{s_i, t_i\}$ の連結度が E_w を加えることによって増加しなければペナルティ π_i を支払わなければならない．問題の目的は，$w(V)$ とペナルティの合計値を最小化する w を求めることである．以下の定理は，賞金収集ネットワークアクティベーション問題が賞金収集増大問題に帰着できることを示している．

定理 1. 賞金収集増大問題に対する α 近似アルゴリズムが存在するならば，賞金収集ネットワークアクティベーション問題に対する αk 近似アルゴリズムが存在する．

集合対 $\hat{X}$ について，$X^+ \setminus X$ を $\hat{X}$ の**境界**と呼び，$\Gamma(\hat{X})$ で表す．$|X \cap \{s_i, t_i\}| = |\{s_i, t_i\} \setminus X^+| = 1$ が成り立つとき，$\hat{X}$ は要求対 $\{s_i, t_i\}$ を隔てるという．

集合対被覆問題とは，与えられた集合対を被覆する辺集合をアクティベートするような点重みの中で，重みの合計値が最小のものを求める問題のことである．賞金収集集合対被覆問題では，E に所属する各辺がアクティベーション関数を備えた無向グラフ $G = (V, E)$ と，ペナルティ $\pi_1, \ldots, \pi_d$ を持つ要求対 $\{s_1, t_1\}, \ldots, \{s_d, t_d\}$，さらに V 上の集合対族 $\mathcal{V}$ が与えられる．任意の $i \in [d]$ に対して，要求対 $\{s_i, t_i\}$ を隔てる集合対のうち $\mathcal{V}$ に所属するものの族を $\mathcal{V}_i$ と表す．$\delta_F(\hat{X}) = \emptyset$ であるとき，辺集合 F は集合対 $\hat{X} \in \mathcal{V}$ を**違反する**という．$w\colon V \to W$ のペナルティは，E_w が違反している集合対が $\mathcal{V}_i$ に含まれるような $i \in [d]$ について π_i を足し合わせたものとして定義される．問題の目的は $w(V)$ とペナルティの合計を最小化するを $w\colon V \to W$ 求めることである．詳細は省略するが，賞金収集増大問題に対するアルゴリズムを求めるには，非交差可能な集合対族 $\mathcal{V}$ から定義される賞金収集集合対被覆問題に対してアルゴリズムを与えれば十分であることが知られている．

二つの集合対 $\hat{X}$ と $\hat{Y}$ が $X \cap Y^+ = \emptyset$ かつ $X^+ \cap Y = \emptyset$ を満たすとき，**強素**であるという．$X \subseteq Y$ かつ $X^+ \subseteq Y^+$ が成り立つとき，$\hat{X} \subseteq \hat{Y}$ と記す．集合対族における極大性や極小性は，このように定義された包含関係について定義する．集合対族 $\mathcal{V}$ が**強ラミナー**であるとは，強素でないような任意の $\hat{X}, \hat{Y} \in \mathcal{V}$ が $\hat{X} \subseteq \hat{Y}$ もしくは $\hat{Y} \subseteq \hat{X}$ を満たすことを意味する．集合対族 $\mathcal{V}$ において極小な集合対を**極小コア**と呼び，$\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$ で $\mathcal{V}$ の極小コア族を表す．集合対がそれ自身を含めて一つの極小コアしか含まないとき，その集合対のことを**コア**と呼ぶ．ただし，極小コアはコアである．$\mathcal{C}_{\mathcal{V}}$ で，$\mathcal{V}$ のコアからなる族を表す．$\mathcal{V}$ が文脈から明らかな場合，$\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$ と $\mathcal{C}_{\mathcal{V}}$ をそれぞれ $\mathcal{M}$ と $\mathcal{C}$ で表す．集合対族 $\mathcal{V}$，集合対 $\hat{X}$，点 v に対して $\{\hat{Y} \in \mathcal{V}\colon \hat{X} \subseteq \hat{Y}\}$ を $\mathcal{V}(\hat{X})$ で，$\{\hat{Y} \in \mathcal{V}(\hat{X})\colon v \notin Y^+\}$ を $\mathcal{V}(\hat{X}, v)$ で表す．任意の $\hat{X}, \hat{Y} \in \mathcal{V}$ に対して $\hat{X} \cap \hat{Y}, \hat{X} \cup \hat{Y} \in \mathcal{V}$ が成り立つとき，$\mathcal{V}$ を**リング族**と呼ぶ．リング族における極大な要素は唯一に決まる．

補題 1. $\mathcal{V}$ が非交差可能集合対族であるとき，以下の性質が成り立つ．
(i) 任意の $\hat{X} \in \mathcal{M}$ から定義される $\mathcal{C}(\hat{X})$ はリング族である．
(ii) $\hat{X}, \hat{Y} \in \mathcal{M}$ を異なる極小コアとする．任意の $\hat{X}' \in \mathcal{C}(\hat{X})$ と $\hat{Y}' \in \mathcal{C}(\hat{Y})$ に対して，$\hat{X}' \setminus \hat{Y}' \in \mathcal{C}(\hat{X})$ と $\hat{Y}' \setminus \hat{X}' \in \mathcal{C}(\hat{Y})$ が成り立つ．
(iii) $\hat{X}, \hat{Y} \in \mathcal{M}$ を異なる極小コアとする．このとき，$\hat{Y}$ は任意の $\hat{X}' \in \mathcal{C}(\hat{X})$ と強素である．とくに，極小コア同士は互いに強素である．

補題 1 の証明は [11] で与えられている．

集合対族 $\mathcal{V}$ と辺集合 F に対して $\mathcal{V}_F$ を $\{\hat{X} \in \mathcal{V}\colon \delta_F(\hat{X}) = \emptyset\}$ と定義する．

補題 2. $\mathcal{V}$ を集合対族，F を辺集合とする．このとき，$\mathcal{V}$ が非交差可能ならば，$\mathcal{V}_F$ も非交差可能である．$\mathcal{V}$ がリング族ならば，$\mathcal{V}_F$ もリング族である．

本稿で議論する問題は無向グラフを扱うものであるが，技術的な理由により，与えられた無向グラフを向き付けして得られる有向グラフを扱うことがある．A を無向辺の集合 E に含まれるそれぞれの辺 $\{u, v\}$ を有向辺 uv と vu で置き換えて得られる有向辺の集合と定義する．集合対 $\hat{X}$ に対して，有向辺の集合 $\{uv \in A\colon v \in X, u \in V \setminus X^+\}$ を $\delta^-_A(\hat{X})$ で表す．$e \in \delta^-_A(\hat{X})$ であるとき，有向辺 e は集合対 $\hat{X}$ を**被覆する**といい，集合対族 $\mathcal{V}$ に含まれる各集合対が有向辺の集合 F に含まれる有向辺のどれかに被覆されているとき，F は $\mathcal{V}$ を**被覆する**という．

3. 線形計画緩和問題

辺 $uv \in A$ に対して $\psi^{uv}(j, j') = \text{true}$ であるような対 $(j, j') \in W \times W$ の集合を Ψ^{uv} で表す．賞金収集集合対被覆問題は，以下の整数計画のように定式化できる．

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_{v \in V} \sum_{j \in W} j \cdot x(v, j) + \sum_{i \in [d]} \pi_i \cdot y(i) \\
&\text{subject to} \\
&\sum_{uv \in \delta^-_A(\hat{X})} \sum_{(j,j') \in \Psi^{uv}} x(uv, j, j') + y(i) \geq 1, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad i \in [d], \hat{X} \in \mathcal{V}_i, \\
&x(u, j) \geq x(uv, j, j'), \quad uv \in A, (j, j') \in \Psi^{uv}, \qquad (1) \\
&x(v, j') \geq x(uv, j, j'), \quad uv \in A, (j, j') \in \Psi^{uv}, \qquad (2) \\
&x(v, j) \in \{0, 1\}, \quad v \in V, j \in W, \\
&x(uv, j, j') \in \{0, 1\}, \quad uv \in A, (j, j') \in \Psi^{uv}, \\
&y(i) \in \{0, 1\}, \quad i \in [d].
\end{aligned}
$$

ただし，$x(uv, j, j') = 1$ は辺 $\{u, v\}$ が $w(u) = j$，$w(v) = j'$ と設定された点重み w によってアクティベートされることを表している．$x(v, j)$ は点 v が重み j を割り当てられるときに 1 を取るような変数であり，$y(i)$ は要求対 $\{s_i, t_i\}$ の連結度要求が満たされるとき 0 を取るような変数である．

上記の整数計画問題から整数性制約を取り除けば問題の線形計画緩和問題が得られるが，この線形計画問題は非常に高い整数性ギャップを持つために，これを利用しても良い近似アルゴリズムを得ることはできない．そのため，我々はより強い制約を持つ緩和問題を定義する．制約 (1) では，$x(u, j)$ は $x(uv, j, j')$ によって下から抑えられ

ている．我々のアイデアは，$u \notin X^+$ であるような任意の $\hat{X} \in \mathcal{V}$ について，$\sum_{v \in X: uv \in X} \sum_{j' \in W:(j,j') \in \Psi^{uv}} x(uv, j, j')$ を $x(uv, j, j')$ の代わりに $x(u, j)$ の下界として利用することである．ただし，この制約は強すぎて賞金収集集合対被覆問題の解によって満たされない場合がある．そのため，我々は新たな変数 $x(uv, j, j', \hat{C})$ をそれぞれの $\hat{C} \in \mathcal{M}_{\mathcal{V}}$ に対して導入する．$x(uv, j, j', \hat{C})$ は $\hat{X} \in \mathcal{V}(\hat{C})$ を被覆するために，$x(uv, j, j')$ の代わりに使用される．それぞれの $\hat{C} \in \mathcal{M}_{\mathcal{V}}$，$\hat{X} \in \mathcal{V}(\hat{C})$，$u \in V \setminus X^+$ と $j \in W$ について，$\sum_{v \in X: uv \in A} \sum_{j' \in W:(j,j') \in \Psi^{uv}} x(uv, j, j', \hat{C})$ が $x(u, j)$ の下界として用いられる．制約 (2) も同様に修正することで，以下の緩和問題が得られる．

$$\begin{aligned}
&\mathtt{PCLP}(\mathcal{V}) = \\
&\min \sum_{v \in V} \sum_{j \in W} j \cdot x(v, j) + \sum_{i \in [d]} \pi_i \cdot y(i) \\
&\text{subject to} \\
&\sum_{uv \in \delta_A^-(\hat{X})} \sum_{(j,j') \in \Psi^{uv}} x(uv, j, j', \hat{C}) + y(i) \geq 1, \\
&\qquad\qquad \hat{C} \in \mathcal{M}_{\mathcal{V}}, i \in [d], \hat{X} \in \mathcal{V}_i(\hat{C}), \quad (3) \\
&x(u, j) \geq \sum_{\substack{v \in X: \\ uv \in A}} \sum_{\substack{j' \in W: \\ (j,j') \in \Psi^{uv}}} x(uv, j, j', \hat{C}), \\
&\qquad\qquad \hat{C} \in \mathcal{M}_{\mathcal{V}}, \hat{X} \in \mathcal{V}(\hat{C}), u \in V \setminus X^+, j \in W, \quad (4) \\
&x(v, j') \geq \sum_{\substack{u \in V \setminus X^+: \\ uv \in A}} \sum_{\substack{j \in W: \\ (j,j') \in \Psi^{uv}}} x(uv, j, j', \hat{C}), \\
&\qquad\qquad \hat{C} \in \mathcal{M}_{\mathcal{V}}, \hat{X} \in \mathcal{V}(\hat{C}), v \in X, j' \in W, \quad (5) \\
&x(v, j) \geq 0, \quad v \in V, j \in W, \\
&x(uv, j, j', \hat{C}) \geq 0, \quad uv \in A, (j, j') \in \Psi^{uv}, \hat{C} \in \mathcal{M}_{\mathcal{V}}, \\
&y(i) \geq 0, \quad i \in [d].
\end{aligned}$$

補題 3. $\mathcal{V}$ が非交差可能な集合対族であるとき，$\mathtt{PCLP}(\mathcal{V})$ は賞金収集集合対問題の最適値の下界となっている．

$\mathtt{PCLP}(\mathcal{V})$ の最適解は多項式時間で求めることができる．我々のアルゴリズムでは，まずはじめに $\mathtt{PCLP}(\mathcal{V})$ の最適解を計算する．その後，最適解における変数 $y(i)$, $i \in [d]$ の値に応じて集合対 $\{s_i, t_i\}$ の連結度要求を満たすか，満たさない代わりにペナルティを支払うかを決定する．$\mathtt{PCLP}(\mathcal{V})$ において $y(i)$ の値をすべて 0 に固定して得られる問題を $\mathtt{NPCLP}(\mathcal{V})$ と表す．アルゴリズムでは，残った集合対の連結度要求を満たすためにスパイダーを繰り返し求める．スパイダーを計算するアルゴリズムは線形計画緩和問題を用いた主双対法となっているが，このアルゴリズムは $\mathtt{NPCLP}(\mathcal{V})$ を直接扱うのではなく，より簡潔な以下の線形計画問題に基づいている．

$$\begin{aligned}
&\mathtt{SimpleLP}(\mathcal{V}) = \\
&\min \sum_{v \in V} \sum_{j \in W} j \cdot (x_{\mathrm{in}}(v, j) + x_{\mathrm{out}}(v, j)) \\
&\text{subject to} \\
&\sum_{uv \in \delta_A^-(\hat{X})} \sum_{(j,j') \in \Psi^{uv}} x(uv, j, j') \geq 1, \quad \hat{X} \in \mathcal{V}, \quad (6) \\
&x_{\mathrm{out}}(u, j) \geq \sum_{\substack{v \in X: \\ uv \in A}} \sum_{\substack{j' \in W: \\ (j,j') \in \Psi^{uv}}} x(uv, j, j'), \\
&\qquad\qquad \hat{X} \in \mathcal{V}, u \in V \setminus X^+, j \in W, \quad (7) \\
&x_{\mathrm{in}}(v, j') \geq \sum_{\substack{u \in V \setminus X^+: \\ uv \in A}} \sum_{\substack{j \in W: \\ (j,j') \in \Psi^{uv}}} x(uv, j, j'), \\
&\qquad\qquad \hat{X} \in \mathcal{V}, v \in X, j' \in W, \quad (8) \\
&x_{\mathrm{in}}(v, j) \geq 0, \quad v \in V, j \in W, \\
&x_{\mathrm{out}}(v, j) \geq 0, \quad v \in V, j \in W, \\
&x(uv, j, j') \geq 0, \quad uv \in A, (j, j') \in \Psi^{uv}.
\end{aligned}$$

$\mathtt{SimpleLP}(\mathcal{V})$ は必ずしも $\mathtt{NPCLP}(\mathcal{V})$ や元の集合対被覆問題を緩和しているわけではないので，アルゴリズムの解析には使用できない．我々が使用するのは，$\mathcal{V}$ の部分族である $\mathcal{L}$ から定義される $\mathtt{SimpleLP}(\mathcal{L})$ である．$\mathcal{L}$ は事前に与えられるわけではないので陽には分からないが，$\mathcal{V}$ のコアから成る強ラミナー族であることは分かる．以下の補題は，そのような場合には $\mathtt{SimpleLP}(\mathcal{L})$ が $\mathtt{NPCLP}(\mathcal{V})$ の定数倍近似となっていることを示している．

補題 4. $\mathcal{V}$ が非交差可能であり，$\mathcal{L}$ が $\mathcal{V}$ のコアから成る強ラミナー族であるならば，$\mathtt{SimpleLP}(\mathcal{L}) \leq 2\mathtt{NPCLP}(\mathcal{V})$ が成り立つ．

4. アルゴリズム

集合対族 $\mathcal{V}$ に対するスパイダーとは，$h \in V$ と $\hat{X}_1, \ldots, \hat{X}_f \in \mathcal{M}$ が存在し，以下の条件を満たすような $S_1, \ldots, S_f$ に分解できるような辺集合 S のことである．

- $i \neq j$ であるような任意の $i, j \in [f]$ に対して $V(S_i) \cap V(S_j) \subseteq \{h\}$ を満たす．
- 任意の $i \in [f]$ に対して，S_i は $\mathcal{C}(\hat{X}_i, h)$ を被覆する．
- $f = 1$ ならば，$\mathcal{C}(\hat{X}_1, h) = \mathcal{C}(\hat{X}_1)$ が成り立つ．
- 任意の $i \in [f]$ について，$h \notin X_i^+$ が成り立つ．

h はスパイダーの頭，$\hat{X}_1, \ldots, \hat{X}_f$ は足と呼ばれる．スパイダー S に対し，その足の数を $f(S)$ で表す．

以下の定理は，スパイダー分解定理を我々の線形計画緩和問題に拡張したものである．

定理 2. $\mathcal{V}$ を非交差可能集合対族とする．このとき，$w \colon V \to W$ と強ラミナーなコアの族 $\mathcal{L}$ が存在し，以下を満たす．

- E_w はスパイダー S を含む．
- $w(V)/f(S) \leq \mathtt{SimpleLP}(\mathcal{L})/|\mathcal{M}_{\mathcal{V}}|$ が成り立つ．

上のような w は多項式時間で計算できる．

アルゴリズムの解析のため，ポテンシャル関数を定義する．コアから成る族 $\mathcal{X}$ とコア $\hat{X} \in \mathcal{X}$ に対して $\Delta_{\mathcal{X}}(\hat{X})$ を，$v \in \Gamma(\hat{X})$ であり，かつ $v \in \Gamma(\hat{Y})$ を満たすようなコア $\hat{Y} \in \mathcal{X} \setminus \{\hat{X}\}$ が存在するような点 v の集合と定義する．γ を $\max_{\hat{X} \in \mathcal{V}} |\Gamma(\hat{X})|$ とする．コア $\hat{X}$ のポテンシャル $\phi_{\mathcal{X}}(\hat{X})$ を $\gamma - |\Delta_{\mathcal{X}}(\hat{X})|$ と定義する．族 $\mathcal{X}$ のポテンシャル $\phi(\mathcal{X})$ は $(\gamma+1)|\mathcal{X}| + \sum_{\hat{X} \in \mathcal{X}} \phi_{\mathcal{X}}(\hat{X})$ と定義する．

このように定義されたポテンシャルについて，以下の事実が成り立つ．証明には定理 2 が利用されている．

定理 3. $\mathcal{V}$ を $\gamma = \max_{\hat{X} \in \mathcal{V}} |\Gamma(\hat{X})|$ であるような非交差可能集合対族とする．このとき，点重み $w\colon V \to W$，w によってアクティベートされるスパイダー S，$\mathcal{V}$ のコアから成る強ラミナー族 $\mathcal{L}$ が存在し，

$$\frac{w(V)}{\phi(\mathcal{M}_{\mathcal{V}}) - \phi(\mathcal{M}_{\mathcal{V}_S})} = O(\max\{\gamma, 1\}) \cdot \frac{\texttt{SimpleLP}(\mathcal{L})}{\phi(\mathcal{M}_{\mathcal{V}})}$$

が成り立つ．そのような w は多項式時間で計算できる．

これより以下の定理を証明することができる．

定理 4. $\mathcal{V}$ を，それぞれの $D \subseteq [d]$ について $\bigcup_{i \in D} \mathcal{V}_i$ が非交差可能となるような集合対族とする．γ を $\max_{\hat{X} \in \mathcal{V}} |\Gamma(\hat{X})|$，$\gamma'$ を $\max\{\gamma, 1\}$ と定義する．このとき，$\mathcal{V}$ に対する賞金収集集合対被覆問題は $O(\gamma' \log(\gamma' d))$ 近似可能である．

5. 結論

本稿では，賞金収集ネットワークアクティベーション問題に対する近似アルゴリズムを与えた．我々のアルゴリズムは，どの連結度要求を満たすかを決定するために線形計画問題を解く必要がある．一方，賞金収集点重み最小化シュタイナー木問題やシュタイナー森問題に対して提案されている主双対アルゴリズム [1], [8] では線形計画問題を陽には解く必要がなく，組合せ的なアルゴリズムとなっている．本稿で扱った問題のような，高い連結度要求を持つような問題に対して組合せ的なアルゴリズムを与えることは，重要な課題であると考えられる．

参考文献

[1] Bateni, M., Hajiaghayi, M. and Liaghat, V.: Improved approximation algorithms for (budgeted) node-weighted Steiner problems, *ICALP (1)*, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 7965, pp. 81–92 (2013).

[2] Bienstock, D., Goemans, M. X., Simchi-Levi, D. and Williamson, D. P.: A note on the prize collecting traveling salesman problem, *Mathematical Programming*, Vol. 59, pp. 413–420 (1993).

[3] Chekuri, C., Ene, A. and Vakilian, A.: Prize-collecting survivable network design in node-weighted graphs, *APPROX-RANDOM*, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 7408, pp. 98–109 (2012).

[4] Chuzhoy, J. and Khanna, S.: An O($k^3 \log n$)-approximation algorithm for vertex-connectivity survivable network design, *Theory of Computing*, Vol. 8, No. 1, pp. 401–413 (2012).

[5] Fleischer, L., Jain, K. and Williamson, D. P.: Iterative rounding 2-approximation algorithms for minimum-cost vertex connectivity problems, *Journal of Computer and System Sciences*, Vol. 72, No. 5, pp. 838–867 (2006).

[6] Jain, K.: A factor 2 approximation algorithm for the generalized Steiner network problem, *Combinatorica*, Vol. 21, No. 1, pp. 39–60 (2001).

[7] Klein, P. N. and Ravi, R.: A nearly best-possible approximation algorithm for node-weighted Steiner trees, *Journal of Algorithms*, Vol. 19, No. 1, pp. 104–115 (1995).

[8] Könemann, J., Sadeghabad, S. S. and Sanità, L.: An LMP $O(\log n)$-approximation algorithm for node weighted prize collecting Steiner tree, *FOCS*, pp. 568–577 (2013).

[9] Moss, A. and Rabani, Y.: Approximation algorithms for constrained node weighted Steiner tree problems, *SIAM Journal on Computing*, Vol. 37, No. 2, pp. 460–481 (2007).

[10] Nutov, Z.: Approximating Steiner networks with node-weights, *SIAM Journal on Computing*, Vol. 39, No. 7, pp. 3001–3022 (2010).

[11] Nutov, Z.: Approximating minimum-cost connectivity problems via uncrossable bifamilies, *ACM Transactions on Algorithms*, Vol. 9, No. 1, p. 1 (2012).

[12] Nutov, Z.: Approximating subset k-connectivity problems, *Journal of Discrete Algorithms*, Vol. 17, pp. 51–59 (2012).

[13] Nutov, Z.: Survivable network activation problems, *LATIN*, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 7256, pp. 594–605 (2012).

[14] Panigrahi, D.: Survivable network design problems in wireless networks, *SODA*, pp. 1014–1027 (2011).

[15] Vakilian, A.: Node-weighted prize-collecting survivable network design problems, Master's thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign (2003).