2部クリーク被覆問題と Modified Galois Lattice

大月 英明[1,a)]　平田 富夫[2,b)]

概要：一般の 2 部グラフに対して，その 2 部クリーク辺被覆問題は NP 困難問題である．グラフが C_4 フリーグラフや距離遺伝 2 部グラフ，それにドミノフリーグラフの場合は，その 2 部クリーク辺被覆問題を多項式時間で解くことができる．我々は 2 部グラフ B に対し modifiled Galois lattice $G_m(B)$ を定義し，それを用いて路重複数 $R(B)$ というパラメータを導入する．$R(B) = 0$ であることと B がドミノフリーであることが同等であることを示す．さらに $R(B)$ と 最小 2 部クリーク辺被覆との関係を考察し，最小 2 部クリーク辺被覆問題を多項式時間で解くことが可能な，ドミノフリーを含むグラフクラスを示す．

キーワード：2 部クリーク，辺被覆，辺分割

The Biclique Cover Problem and the Modified Galois Lattice

Abstract: The minimum biclique cover problem for general bipartite graphs is known to be NP-hard. The minimum biclique cover problem can be solved in polynomial time for C4-free bipartite graphs, bipartite distance hereditary graphs and domino-free graphs. We define the modified Galois lattice $G_m(B)$ for a bipartite graph B, and using $G_m(B)$, we introduce the redundant parameter $R(B)$. We show that B is domino-free if and only if $R(B) = 0$. We investigate the relation of $R(B)$ and the minimum biclique cover of B and show that there is a graph class that is a superclass of domino-free, for which the minimum biclique cover problem can be solved in polynomial time.

Keywords: biblique, edge-cover, edge-partition

1. はじめに

一般の 2 部グラフに関して，その 2 部クリーク辺被覆問題は NP 困難問題である [2] [4]．しかし，C_4 フリーグラフや距離遺伝 2 部グラフ，それにドミノフリーグラフの場合は多項式時間で解くことができる [3]．C4 フリーグラフと距離遺伝 2 部グラフに対しては線形時間アルゴリズムが知られており，ドミノフリーグラフに対しては $O(m \times n)$ 時間アルゴリズムが知られている．ここで，n はグラフの頂点数，m は辺の本数である．

6 個の頂点 $\{x, x_a, x_b, y, y_a, y_b\}$ と 7 本の辺 (x, y), (x_a, y_a)，(x_b, y_b)，(x, y_a)，(x_a, y)，(x, y_b)，(x_b, y) からなるグラフをドミノ（domino）と呼ぶ（図 1）．

ドミノを誘導部分グラフとして持たないグラフはドミノフリーであるという．ドミノフリーグラフは，C_4 フリーグラフや距離遺伝グラフを真に含む．Amilhastre et al. [1] は，ドミノフリーな 2 部グラフに対する 2 部クリーク辺被覆問題と 2 部クリーク辺分割問題が多項式時間で解けることを示した．

本論文では 2 部グラフ B に対して modified Galois lattice $G_m(B)$ を定義し，それを用いて路重複数 $R(B)$ というパラメータを定義する．さらに $R(B)$ と最小 2 部クリーク辺被覆との関係を考察する．$R(B) = 0$ であることと，B がドミノフリーであることは同等であることを示す．さらに $R(B) \leq 1$ の場合は，最少 2 部クリーク辺被覆問題が多項式時間で解けることを示す．

2. 定義

$B = (X_B, Y_B, E_B)$ を 2 部グラフとする．$X_B = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n_x}\}$，$Y_B = \{y_1, y_2, \ldots, y_{n_y}\}$ はそれぞれ B の頂点集合であり，$E_B \subset X_B \times Y_B$ は B の辺集合である．$n = n_x + n_y$，$|E_B| = m$ とする．x に対して，その隣接

1　南山大学情報理工学部
2　名古屋大学工学研究科
a)　otsuki@nanzan-u.ac.jp
b)　hirata@is.nagoya-u.ac.jp

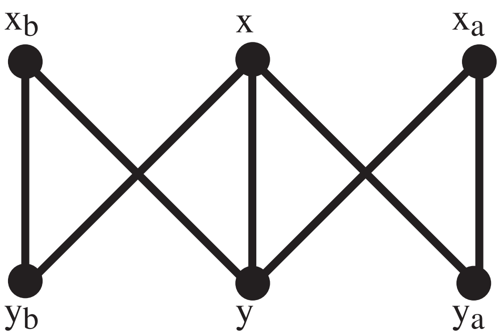

図 1 ドミノ
Fig. 1 domino

点集合を $N(x) = \{y|(x, y) \in E_B\}$ で表す．空でない 2 つの頂点集合 $X \subseteq X_B$，$Y \subseteq Y_B$ で誘導される B の部分グラフを $B(X, Y)$ で表す．$B(X, Y)$ が 完全 2 部グラフのとき，$B(X, Y)$ を B の 2 部クリークと呼ぶ．B の 2 部クリークの集合 $\{K_1, K_2, \ldots, K_s\}$ が B の 2 部クリーク辺被覆であるというのは，$E_B = \bigcup_{i=1}^{s} K_i$ であるときをいう．B の 2 部クリークの集合 $\{K_1, K_2, \ldots, K_s\}$ が B の 2 部クリーク辺分割であるというのは，$E_B = \bigcup_{i=1}^{s} K_i$ であり，かつ $E_{K_i} \cap E_{K_j} = \emptyset$, $(i \neq j)$ を満たすときをいう．

B の極大 2 部クリークの集合を $\mathcal{K}_M(B)$ と表す．$\mathcal{K}_M(B)$ に次のように半順序を定義する．$K_p, K_q \in \mathcal{K}_M(B)$ に対し，$K_p < K_q \iff Y_{K_p} \subseteq Y_{K_q}$ とする．順序がつかない K_r と K_s（$K_r < K_s$ でも $K_s < K_r$ でもないような K_r と K_s）は比較不能（imcomparble）であるという．

更に $\mathcal{K}_M(B)$ のすべての要素の上限 $\top$ と下限 $\bot$ を加えて，次のように有向グラフ $G(B)$ を定義する． $G(B)$ の頂点集合は $\mathcal{K}_M(B) \cup \{\top, \bot\}$ とする．$K_p < K_q$ で，$K_p < K_r$ かつ $K_r < K_q$ となる K_r が存在しないとき，これらの頂点を辺 (K_q, K_p) で結ぶ．この手順で構成されたグラフ $G(B)$ は要するにハッセ図であり，B の Galois lattice と呼ばれる [1] [5].

X_B の頂点 x_i を中心とする極大な星グラフを s_i とする．$X_s = \{s_i| 1 \leq i \leq n_x\}$ とする．Y_B の頂点 x_i を中心とする極大な星グラフを s_i とする．$Y_s = \{t_j| 1 \leq j \leq n_x\}$ とする．$\mathcal{K}_s(B) = \mathcal{K}_M(B) \cup X_s \cup Y_s$ とし，$\mathcal{K}(B) = \mathcal{K}_s(B) \cup \{\top, \bot\}$ とする．$\mathcal{K}(B)$ に対して，上の $G(B)$ と同様に構成されるグラフを $G_m(B)$ を B の modified Galois lattice と呼ぶ.

3. modified Galois lattice の性質

2 部グラフ B の極大 2 部クリーク $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_M(B)$ は以下の性質を持つ.

性質 1. $K_1 = (X_1, Y_1, E_1)$ と $K_1 = (X_2, Y_2, E_2)$ を $\mathcal{K}_M(B)$ の異なる 2 部クリークとすると，$X_1 \subset X_2 \iff Y_2 \subset Y_1$ である.

$s_i \in X_B$ と $t_j \in Y_B$ を $G_m(B)$ の 2 つの頂点とする．s_i と t_j を通り，$\top$ から $\bot$ に至る有向路の集合を $\mathcal{P}(i, j)$ で表す．このとき，次の定理が成り立つ．

補題 2. すべての i, j に関して, $\mathcal{P}(i, j) \neq \emptyset \iff (x_i, x_j) \in E_B$ である.

証明. s_i から t_j に至る有向路 $(s_i, K_{i_1}, \ldots, K_{i_s}, t_j)$ が存在するとする．このとき，$s_i > K_{i_1} > \ldots > K_{i_s} > t_j$ なので，$s_i > t_j$ である．よって $\{y_j\} \subseteq N(x_i)$ が成り立つ．すなわち B は (x_i, y_j) を辺に持つ.

B が (x_i, y_j) を辺に持つならば， $y_j \in N(x_i)$ である．つまり $\{y_j\} \subseteq N(x_i)$ なので $s_i > t_j$ である．よって s_i から t_j に至る有向路が少なくとも一つ存在する. □

補題 3. P を $G_m(B)$ の s_i から t_j への有向路とする．K を P 上の任意の頂点とすると $(i, j) \in E_K$ である.

証明. K は P 上の頂点なので, $s_i > K > t_j$ である，よって $Y_{s_i} \supset Y_K \supset Y_{t_j} = \{t_j\}$ である．これより (i, j) が K の辺であることがわかる. □

$\mathcal{C}(B)$ を $\mathcal{K}_s(B)$ の部分集合とする．$\top$ から $\bot$ に至るすべての路が $\mathcal{C}(B)$ の要素を少なくとも一つ含む場合，$\mathcal{C}(B)$ を $G_m(B)$ のカットと呼ぶ．サイズ（要素数）が最小である $\mathcal{C}(B)$ を $G_m(B)$ の最小カットと呼ぶ.

補題 4. $G_m(B)$ のカットは B の 2 部クリーク被覆である.

証明. $\mathcal{C}(B)$ を $G_m(B)$ のカットとする．定理 2 より，$\mathcal{P}(i, j) \neq \emptyset$ なるすべての i，j に関して，s_i から t_j に至る路は $\mathcal{C}(B)$ のある要素 $K \in \mathcal{K}_s(B)$ を含む．よって K は辺 (x_i, y_j) を含む 2 部クリークである．したがって，すべての i，j に関して，辺 (x_i, y_j) を含む 2 部クリークが $\mathcal{C}(B)$ に存在する. □

ドミノフリーである 2 部グラフ B は以下の性質を持つ.

性質 5. （[1] の定理 3.1）B をドミノフリー 2 部グラフとする．$K_1 = (X_1, Y_1, E_1)$ と $K_1 = (X_2, Y_2, E_2)$ を $\mathcal{K}_s(B)$ の異なる 2 部クリークとし，$E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ であるとする．このとき以下のうちどちらかが成り立つ．(i) $X_1 \subset X_2$ かつ $Y_2 \subset Y_1$，(ii) $X_2 \subset X_1$ かつ $Y_1 \subset Y_2$.

証明. （十分性）K_1 と K_2 を，辺 (x, y) を共通に持つ極大 2 部クリークとし，(i)，(ii) をともに満たさないと仮定する．このとき性質 1 より，以下がすべて満たされる．(a) $X_1 \backslash X_2 \neq \emptyset$，(a) $X_2 \backslash X_1 \neq \emptyset$，(a) $Y_1 \backslash Y_2 \neq \emptyset$，(a) $Y_2 \backslash Y_1 \neq \emptyset$.

x_1 と y_2 を, $x_1 \in X_1 \backslash X_2$, $y_2 \in Y_2 \backslash Y_1$ かつ $(x_1, y_2) \notin E_B$ を満たすような 2 頂点とする．（もし $Y_2 \backslash Y_1 \subseteq N(x_1)$ ならば，$Y_1 \cap Y_2 \subseteq N(x_1)$ であり，$Y_2 \subseteq N(x_1)$ なので，K_2 は極大ではなくなる．したがってこのような y_2 が必ず存在する.）x_2 と y_1 を， $x_2 \in X_2 \backslash X_1$，$y_1$ を $y_1 \in Y_1 \backslash Y_2$ かつ $(x_2, y_1) \notin E_B$ を満たすような 2 頂点とする．このとき $\{x, y, x_1, y_1\}$ と $\{x, y, x_2, y_2\}$ は, 辺 (x, y) を共有する B の

2 つの C_4 を誘導する．$(x_1, y_2) \notin E_B$ かつ $(x_2, y_1) \notin E_B$ であるから，$\{x, y, x_1, y_1, x_2, y_2\}$ はドミノである．

（必要性）B は頂点 $\{x, y, x_1, y_1, x_2, y_2\}$ で誘導されるドミノを持つとする．ただし $(x_1, y_2), (x_2, y_1) \notin E_B$ とする．このとき $x_1 \in X_1 \backslash X_2$ であり，かつ $x_2 \in X_2 \backslash X_1$ であるから，(i)，(ii) はともに偽である． □

補題 6. 2 部グラフ B はドミノフリーであるとする．このとき任意の i，j に対し $\mathcal{P}(i,j)$ の要素数は高々 1 である．

証明. ある i，j に関して $|\mathcal{P}(i,j)| \geq 2$ と仮定する．$P_a, P_b \in \mathcal{P}(i,j), P_a \neq P_b$ とする．半順序 $<$ の定義より，P_a と P_b は比較不能な 2 部クリーク K_a と K_b をそれぞれ含む．K_a と K_b はそれぞれ極大であるから，$(x_a, y_a) \in E_{K_a}$ かつ $(x_a, y_a) \notin E_{K_b}$ なる (x_a, y_a) が B に存在する．すなわち $x_a \in N(y_j)$，$y_a \in N(x_i)$，$x_a \notin N(y_b)$，$y_a \notin N(x_b)$ である．同様に $(x_b, y_b) \in E_{K_b}$ かつ $(x_b, y_b) \notin E_{K_a}$ なる辺 (x_b, y_b) が B に存在する．すなわち $x_b \in N(y_j)$，$y_b \in N(x_i)$，$x_b \notin N(y_a)$，$y_b \notin N(x_a)$ である．以上より，$\{x_i, x_a, x_b, y_j, y_a, y_b\}$ で誘導される部分グラフはドミノである．したがって B がドミノフリーグラフならば $|\mathcal{P}(i,j)| \leq 1$ である． □

定理 7. B がドミノフリーグラフのとき，E_B と $G_m(B)$ 上の $\top$ から $\bot$ への有向路の集合は 1 対 1 に対応する．

証明. $(x_i, y_j) \in E_B$ とし，$K \in \mathcal{K}_s(B)$ を $(x_i, y_j) \in E_K$ を満たす 2 部クリークとする．このとき K は s_i から t_j への有向路上の頂点である．補題 6 より，(x_i, y_j) は $\mathcal{P}(i,j)$ のただ一つの要素に対応する． □

定義. 任意の $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_s(B)\,(K_1 \neq K_2)$ に関して，K_2 の辺から K_1 の辺を取り除き，それによって生じた孤立点も取り除いたグラフを $K_2 - K_1$ と表す．

このとき，性質 5 より次の補題が成り立つ．

補題 8. （[1] の補題 3.1）2 部グラフ B がドミノフリーグラフであるとする．$K_1, K_2 \in \mathcal{K}_s(B)$ とすると，$K_2 - K_1$ は 2 部クリークである．

定理 9. （[1] の定理 3.2）2 部グラフ B がドミノフリーグラフであるとする．B の最小 2 部クリーク辺被覆のサイズと最小 2 部クリーク辺分割のサイズは等しい．

証明. B の 2 部クリーク辺分割は B の 2 部クリーク辺被覆である．B の最小 2 部クリーク辺被覆の一つを $\{K_1, K_2, \ldots, K_c\} \subseteq \mathcal{K}_s(B)$ とする．ここから集合 $\mathcal{P}_m(B) = \{K_i - K_{i+1} - K_{i+2} - \cdots - K_c | 1 \leq i \leq c\}$ を構成すると，補題 8 より，$\mathcal{P}_m(B)$ は B の 2 部クリークの集合であり，$c = |\mathcal{P}_m(B)|$ なる最小 2 部クリーク辺分割を与える． □

定理 10. B はドミノフリーグラフであるとする．B の最小 2 部クリーク辺被覆のサイズと最小 2 部クリーク辺分割のサイズはともに $G_m(B)$ の最小カットのサイズに等しい．

証明. $G_m(B)$ の最小カットを $\mathcal{C}(B)$ とし，B の最小 2 部クリーク辺被覆を $\mathcal{C}_m(B)$ とする．$G_m(B)$ において，$x_i \in X_s$ から $y_j \in Y_s$ への有向路があるとする．すると $(x_i, y_j) \in E_B$ である．$\mathcal{C}_m(B)$ が 2 部クリーク被覆なので $(x_i, y_j) \in E_K$ である $K \in \mathcal{C}_m(B)$ が存在する．この K は x_i から y_j への有向路上にある．よって $\mathcal{C}_m(B)$ は $G_m(B)$ のカットである．すなわち $|\mathcal{C}(B)| \leq |\mathcal{C}_m(B)|$ である．定理 4 より $|\mathcal{C}(B)| \geq |\mathcal{C}_m(B)|$ なので $|\mathcal{C}(B)| = |\mathcal{C}_m(B)|$ が成り立つ．補題 9 より，$|\mathcal{C}(B)|$ は最小クリーク辺分割のサイズと等しい． □

B がドミノフリーなら $G_m(B)$ の最小カットと B の最少 2 部クリーク辺被覆が一致するので，$G_m(B)$ の最小カットを求めることで B の 2 部クリーク被覆問題を解くことができる．$G_m(B)$ の最小カットは最大フローアリゴリズムを用いて求めることができる．ドミノフリーグラフでは $G_m(B)$ のサイズが n（B の頂点数）の多項式で抑えられるので，2 部クリーク被覆問題は多項式時間で解けることになる．

4. 2 部グラフの路重複数と 2 部クリーク被覆

B における y_j の次数を $d_B(y_j)$ と表記する．$G_m(B)$ において X_s の頂点から t_j に至る有向路の集合を $\mathcal{P}(*,j)$ で表す．つまり $\mathcal{P}(*,j) = \cup_{i=1}^{n_x} \mathcal{P}(i,j)$ である．B の路重複数 $R(B)$ を $R(B) = \sum_{j=1}^{n_y} (|\mathcal{P}(*,j)| - d_B(y_j))$ と定義する．

定理 11. B がドミノフリーならば $R(B) = 0$ である．

証明. 定理 6 より，B がドミノフリーならば，$(x_i, y_j) \in E_B$ なる i，j に対して $\mathcal{P}(i,j) = 1$ である．したがって $|N(y_j)| = \mathcal{P}(*,j)$ であり $\mathcal{P}(*,j) = d_B(y_j)$ が成り立つ．すなわち $R(B) = 0$ である． □

定理 12. B を 2 部グラフとする．$R(B) \leq 1$ ならば $G_m(B)$ の最小カットは B の最小 2 部クリーク辺被覆と一致する．

証明. $R(B) = 1$ のとき，$\mathcal{P}(*,j') - d_B(y_{j'}) = 1$ を満たす j' がただ一つ存在する．ただし $j \neq j'$ なるすべての j に対して $\mathcal{P}(*,j') - d_B(y_{j'}) = 0$ である．このとき $G_m(B)$ 上で s_{i_0} から $t_{j'}$ に至る有向路が 2 つあるような i_0 が存在する．このような有向路を P_1 と P_2 とする．また $G_m(B)$ のカットを $\mathcal{C}(B)$ とする．このとき $K_1 \in P_1$ かつ $K_1 \notin P_2$ を満たす星グラフでない 2 部クリーク $K_1 \in \mathcal{C}(B)$ が存在する．ここで K_1 は $i_1 \neq i_0$，$j_1 \neq j'$ を満たすある i_1，j_1 に関して，4 本の辺 $(x_{i_0}, y_{j'})$，(x_{i_0}, y_{j_1})，$(x_{i_1}, y_{j'})$ と (x_{i_1}, y_{j_1}) を持つ．このとき K_1 は s_{i_1} から t_{j_1} に至る有向路上の頂点であり，$\mathcal{P}(i_1, j_1)$ のただ一つの要素である有向路 P_1' 上の頂点である．$i \neq i_0$，$j \neq j'$ なる辺 (x_i, y_j) に関してはドミノフリーグラフの場合と同様の議論が成り立つ．したがって頂点集合 $\mathcal{C}(B) \backslash \{K_1\}$ は辺 (x_1, y_1) を被覆できない．以

上より $G_m(B)$ の最小カットは B の最小 2 部クリーク辺被覆である． $\Box$

定理 13. B を 2 部グラフとする．$R(B) \leq 1$ ならば $G_m(B)$ の頂点数は $O(n)$ である．ここで n は B の頂点数である．

5. おわりに

ドミノフリーグラフ B の 2 部クリーク辺被覆問題を計算時間 $O(n \times m)$ で解くアルゴリズムが知られている [1]. [1] では，与えられた 2 部グラフ B を "simplify" という操作で変換し，そのグラフから Galois lattice を構成している．それに対して本論文の modified Galois lattice は，2 部グラフ B から直接構成でき，一般の 2 部グラフに対しても 2 部クリーク辺被覆を考えることができる．さらに $R(B) > 0$，つまりドミノフリーよりも広いグラフクラスに対し，2 部クリーク辺被覆問題を多項式時間で解くことができることを意味している．

参考文献

[1] J. Amilhastre, M.C. Vilarem, and P.Janssen. Complexity of minimum biclique cover and minimum biclique decomposition for bipartite domino-free graphs. *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 86, No. 2-3, pp. 125 – 144, 1998.

[2] H. Fleischner, E. Mujuni, D. Paulusma, and S. Szeider. Covering graphs with few complete bipartite subgraphs. *Theoretical Computer Science*, Vol. 410, No. 21 - 23, pp. 2045 – 2053, 2009.

[3] H. Muller. On edge perfectness and classes of bipartite graphs. *Discrete Mathematics*, Vol. 149, No. 1 - 3, pp. 159 – 187, 1996.

[4] J. Orlin. Contentment in graph theory: Covering graphs with cliques. *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, Vol. 80, No. 5, pp. 406 – 424, 1977.

[5] R. Wille. Concept lattices and conceptual knowledge systems. *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 23, No. 6 - 9, pp. 493 – 515, 1992.