

# 自然法則を用いて算出した音律の創造の試み

長田 将弥<sup>†1</sup> 横山 真男<sup>†1</sup>

本研究では、自然法則である黄金比の近似比やネイピア数といった数字を用いて、新しい音律を作りどのような音楽が得られるのかを研究の目的とする。最古の音律と言われるピタゴラス音律の音階の導出方法を参考にし、基音の周波数に自然数や黄金比を乗じることで音階を導出した。自然数や黄金比それぞれの音律の特徴を考察し、また、得られた音律を用いて既存の楽曲に当てはめアンケート調査による評価を行った。

## Creation of a new temperament computed using natural laws

MASAYA OSADA<sup>†1</sup> MASAO YOKOYAMA<sup>†1</sup>

The objective of this study is to obtain new temperaments and scales, using Golden Ratio or Napier's Constant and to apply to a contemporary music. The temperaments in this paper are based on the oldest method of Pythagorean Tuning, which the scales are generated by multiplying Golden Ratio or Napier's Constant to fundamental tone recursively. The characteristic of these scales and the validation by questionnaires are discussed in the present paper.

### 1. はじめに

音律はすでにいくつか種類が存在し、音律の誕生は数学者ピタゴラスによるピタゴラス音律が起源であると言われている。音律とは、1 オクターブ内に音を音高順に並べたものをいう。音律にはいくつか種類が存在している。音律という言葉が誕生したきっかけとなった一番初めの「ピタゴラス音律」、ピタゴラス音律では不協和音が目立ち始めた時代に提案された「純正音律」、純正音律での転調問題を解決するために提案された「中全音律」、そして現在日本のポップカルチャーや、西洋音楽で最も使われており、我々が良く耳にする音律の「平均律」などが存在している。それぞれ特徴があり、時代とともに変化してきた。

ピタゴラス音律はドとミの音の響きが悪く、それを改善したものが平均律である。平均律は現在の西洋音楽でもっとも使われている音律であり、我々が聞くポップスやロックなども平均律で作曲が行われている事が大半である。当たり前のように、また平均律を使わなければいけないかのように現代の音楽は平均律に染まっている。音律は協和が重要視されてきたが、音楽も芸術であり、現代ではそのようなルールというもの存在していない。本研究は新たな音律を作ることで現代作曲家への貢献を意図している。

### 2. ピタゴラス音律の導出方法

ピタゴラス音律は、一番初めに誕生した音律[1]と言われ

ている。その名の通りピタゴラスが発明したと言われ、歴史はギリシャ時代(580BC~500BC ごろ)で、当時ピタゴラスはこの音律を音楽としてではなく、数学あるいは物理学として研究していた。

ピタゴラスは次の実験を行った。二つの 1 弦琴を並べ、一つを開放弦、もう一つを全体の弦長の 1/3 の位置に琴柱を挟む。そして同時に二つを弾くとお互いの音が心地よく響く事を発見した。この時、分割した左でも右でも開放弦と響きあう(図1のA、B)。ピタゴラスは周波数比が 2:1(オクターブまたは2倍音)と周波数比 3:2 を組み合わせる音律を作った。ピタゴラスは最初の音(根音)の周波数を 3 倍し、2 で割り、第 2 の音を作った。2 で割ったのは根音からオクターブの間に第 2 の音を配置する為である。オクターブは同じ音として捉えることができるため、2 で割ったとしても同じ音である。そして次に第 3 音を作るために、根音に 3 倍した音は良く響く事が確認できているので、第 2 の音を 3 倍し、第 1 音からオクターブの 2 倍以内に周波数を収めるため、2 で 2 回割った音を第 3 音とした。これを繰り返すとオクターブとほぼ同じ周波数の音にめぐり合う。オクターブが高い音をまた探しても同じ音の繰り返しになるため、打ち切った。そしてその有限数の音律が 12 音階できた。現在のピアノの鍵盤の 1 オクターブの数と同じである。図 2 はピタゴラス音律 C を基音とした場合に 3:2 の周波数比で得た音と周波数を示した。

<sup>†1</sup> 明星大学  
Meisei University.

読み	ド	ド $\times\frac{3}{2}$ =	ソ	ソ $\times\frac{3}{2}$ =	レ	レ $\times\frac{3}{2}$ =	ラ	ラ $\times\frac{3}{2}$ =
周波数	260.7		391.05		293.288		439.931	

ミ	ミ $\times\frac{3}{2}$ =	シ	シ $\times\frac{3}{2}$ =	ファ#	ファ# $\times\frac{3}{2}$ =	ド#	ド# $\times\frac{3}{2}$ =
329.948		494.923		371.192		556.788	

ソ#	ソ# $\times\frac{3}{2}$ =	レ#	レ# $\times\frac{3}{2}$ =	ラ#	ラ# $\times\frac{3}{2}$ =	ミ#
417.591		626.386		469.79		704.685

図1 ピタゴラス音律：周波数比3:2で得た音とその周波数

### 3. 黄金比と自然対数による音律

以下、本研究で用いた黄金比と自然対数について簡単に触れる。

黄金比は自然界と密接な関係があり、人間が無意識に美しいと感じる比であると言われている。黄金比を数学の話題として意識したのはユークリッドとされている。彼は次のような幾何学の問題として捉えていた。ユークリッドによって提起された問題は、

「線分を二つに分け、小さい方の線分と全体とでできる長方形の面積と、大きい方の線分でできる正方形の面積が等しくなるように分けよ」

である。図4のように線分ABをa:bに分割すると、

$$a^2 = b(a + b) \quad (1)$$

という関係を満たせば良いので、上式を $b^2$ で割って整理すると、

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0 \quad (2)$$

となる。この2次方程式を解いて、

$$\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (3)$$

である。つまり線分ABを $(1+\sqrt{5})/2:1$ の比に分割すればよく、値は $a/b = 1.6180339\dots$ である。

一方、ネイピア数または自然対数は $e = 2.71828182845904\dots$ となり、式(4)で定義されている。

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.7182818284\dots \quad (4)$$

これらの数値を使って次章で示す法則性で音律の生成を行う。

## 4. 音律の作成

### 4.1 黄金比とネイピア数によるパターンの作成

基音の周波数から黄金比の近似値=1.618倍し、できた周波数を2つ目の音とする。ただし、1.618倍した結果が基音の2倍以上の値になった場合、 $x=2, 3, 5$ で割る。割る理由として、基音から2倍の周波数の音はオクターブが高

いだけで音程としては同じである。なので1オクターブ以内に音を取る為にxで割る。そしてxに入る値だが、素数の2、3、5をそれぞれ代入する。2で割った場合、3で割った場合、5で割った場合、と様々なパターンを音階を試みる。7、9・・・以降は聞き取れない音であったりするため実験を行わない。また、基音の周波数はすべて260.7Hzで固定する。これはピタゴラス音律での「ド」の音の周波数と同じである。一番はじめに作られた音律の一番初めの音ということで、この「ド」の音を採用する。

ここでは、黄金比で導出した音律を「黄金比音律」、ネイピア数で導出した音律を「ネイピア数音律」と名付け、以下の黄金比3パターン、ネイピア数4パターンの計7パターンを用意した。

- 黄金比音律 A パターン：  
基音(260.7Hz)×1.618÷2(基音から2倍以上の場合)
- 黄金比音律 B パターン：  
基音(260.7Hz)×1.618÷3(基音から2倍以上の場合)
- 黄金比音律 C パターン：  
基音(260.7Hz)×1.618÷5(基音から2倍以上の場合)
- ネイピア数音律 A パターン：  
基音(260.7Hz)×2.7182÷2(基音から2倍以上の場合)
- ネイピア数音律 B パターン：  
基音(260.7Hz)×2.7182÷3(基音から2倍以上の場合)
- ネイピア数音律 C パターン：  
基音(260.7Hz)×2.7182÷5(基音から2倍以上の場合)
- ネイピア数音律 D パターン：  
基音(260.7Hz)×2.7182÷5(基音から2倍以上の場合)

### 4.2 自然法則による音律

上記の黄金比とネイピア数を利用してできた音律の表とグラフを掲載する。各図は、縦軸はピッチ Hz、横軸は4.1の法則で導出したピッチを順番に番号つけたものであり、その下の周波数の表は赤く塗られている番号を抜き出しまとめたものである。

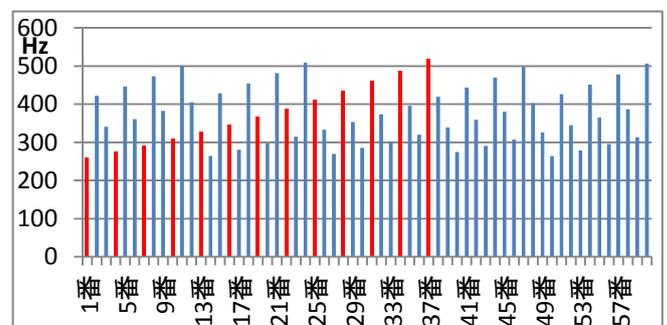


図2 黄金比パターン A(2で除算した場合にできた音程)

表 1 黄金比音律 (A パターンの音律の周波数)

黄金比音律 Aパターン	
1	1番 260.7
2	4番 276.0683323
3	7番 292.3426317
4	10番 309.5763052
5	13番 327.8259083
6	16番 347.1513302
7	19番 367.6159907
8	22番 389.2870481
9	25番 412.2356201
10	28番 436.5370162
11	31番 462.270986
12	34番 489.5219799

図 2 の赤い部分にはある繰り返しの規則性が見られ、徐々に階段状に周波数が上昇するパターンがいくつか存在する。これらのパターンの 1 つを選び、音律を作りそれを表 1 に示した。全てのパターンを抜き出さないのは、どのパターンを取っても周波数がほぼ同じな為である (以下同様)。この音律は周波数がピタゴラス音律や平均律に近く、音律の数も同じであった。

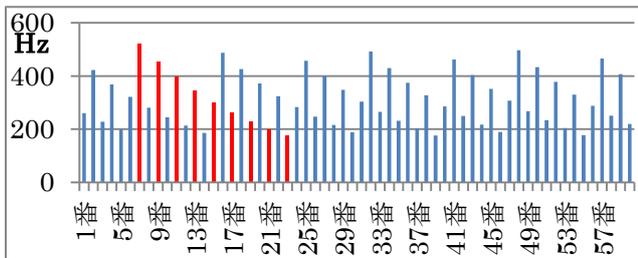


図 3 黄金比パターン B (3 で除算した場合にできた音程)

表 2 黄金比音律 (B パターンの音律と周波数)

黄金比音律 Bパターン	
<del>1</del>	<del>23番 174.7655645</del>
<del>2</del>	<del>21番 200.2719305</del>
<del>3</del>	<del>19番 229.5008532</del>
<del>4</del>	<del>17番 262.9956254</del>
5	15番 301.3788315
6	13番 345.3639199
7	11番 395.7684637
8	9番 453.529358
9	7番 519.7202341

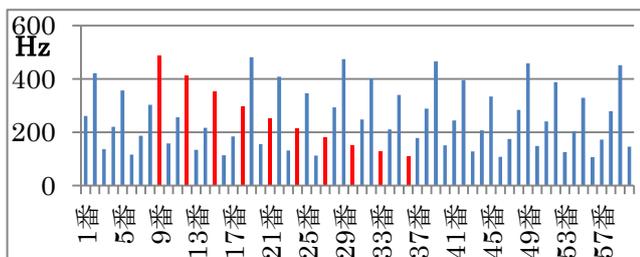


図 4 黄金比パターン C (5 で除算した場合にできた音程)

表 3 黄金比音律 C パターンの音律と周波数

2倍超過を÷2 昇順にする		
1	36番	220.1654077
2	33番	244.9058533
	30番	252.2849541
3	27番	259.8863899
4	24番	297.800761
5	21番	306.7736042
6	18番	351.5282691
7	15番	362.1199413
8	12番	414.9489865
9	9番	427.4515476

図 3 の B パターンは、音が低い順にグループをとると 23 番からだが、23、21、19、17 の周波数は、順に 13、11、9、7 がほぼ 2 倍音であり音程が同等なため音の高い方の 15、13、11、9、7 を音律として採用した。

また図 4、表 3 は C パターンの結果であるが、30 番の音律と 27 番の音律は周波数が近く音が似ているため、低い方の音(27 番)を不採用にした。

次に、ネイピア数のパターン A (基音から 2 倍の周波数値を超えた時に 2 で除算した場合にできた音程)であるが、指数的に増加し音程差が激しく、すぐに可聴領域を超え聞き取れない周波数となるので不採用にした。

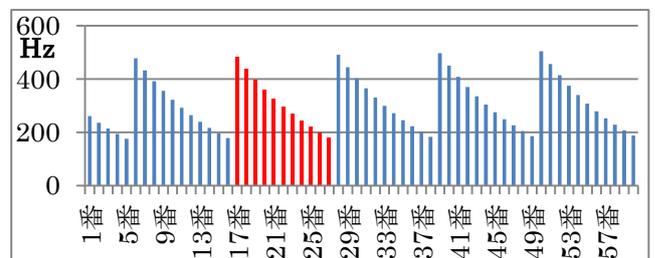


図 5 ネイピア数パターン B (3 で除算した場合の音程)

表 4 ネイピア数音律 (B パターンの音律の周波数)

ネイピア数音律 Bパターン	
1	27番 180.5292299
2	26番 199.2449745
3	25番 219.9010093
4	24番 242.6984872
5	23番 267.8594149
6	22番 295.6288149
7	21番 326.2771115
<del>8</del>	<del>20番 360.1027646</del>
<del>9</del>	<del>19番 397.4351754</del>
<del>10</del>	<del>18番 438.637895</del>
<del>11</del>	<del>17番 484.1121649</del>

表 4 に示すように、ネイピア数のパターン B では、20 番、19 番、18 番、17 番は順に 27 番、26 番、25 番、24 番の倍音に当たるため使用しない

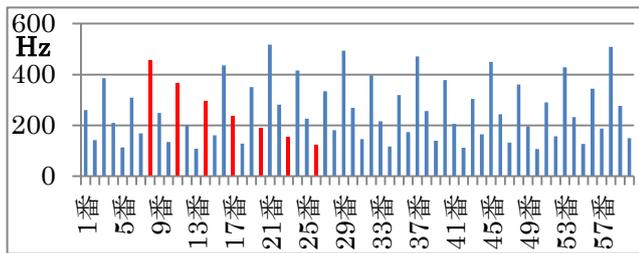


図 6 ネイピア数パターン C (5 で除算した場合の音程)

表 5 ネイピア数音律 (C パターンの音律と周波数)

2倍超過を÷2 昇順にする	
1	26番 245.8590283
2	14番 295.1476314
3	23番 306.0426439
4	11番 367.3965608
5	20番 380.9585538
6	8番 457.3312421
7	17番 474.2130635

図 6、表 5 はネイピア数パターン C の結果であるが、全体的に音域が低いため、全体を 2 倍して基音からオクターブ内に収めるようにした。

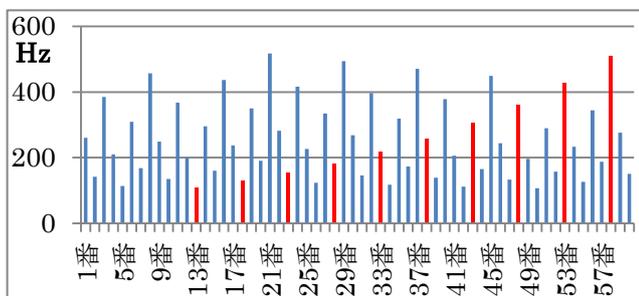


図 7 ネイピア数パターン D (5 で除算した場合の音程)

表 6 ネイピア数音律 (D パターンの音律と周波数)

ネイピア数音律 Dパターン	
1	13 108.5820143
2	18 128.9005949
3	23 155.0213219
4	28 181.655678
5	33 215.6482831
6	38 256.001808
7	43 303.9065498
8	48 360.775542
9	53 428.286234
10	58 508.4299706

図 7 および表 6 のパターン D では、倍音が多く存在し、利用できる音律は 4 つとなった。

以上の結果より、音律の数が少な過ぎず、音程を認識できる音律が利用可能性があるため、黄金比音律 A パターン、黄金比音律 C パターン、ネイピア数音律 B パターン、ネイピア数音律 C パターンを採用して、次の章では、実際に既存の楽曲「オーラリー」に当てはめて被験者による評価実験を行った。

## 5. 評価実験

作成した音律の感応評価として、音律の基音との協和度に関するアンケートと、音律を「オーラリー」に当てはめたソプラノとアルトで構成された楽曲を、黄金比音律、ネイピア数音律を 9 名の方にそれぞれ聴取してその印象に関するアンケートを行った。

実際に使用する音律は、黄金比音律 A パターン、黄金比音律 C パターン、ネイピア数音律 B パターン、ネイピア数音律 C パターンの 4 つであるためそれぞれの協和度と楽曲を被験者に聴かせた。原曲と同じ平均律音程によるものを比較のために用意し計 5 つのパターンとした。

### 5.1 既存の楽曲に当てはめた時のアンケート評価

今回は平均律によるアメリカの大衆歌謡の楽曲「オーラリー」の 1 コーラス(ソプラノとアルトの二声)に、上述で得た音律を当てはめ、曲の聞こえ具合やハーモニーなどの協和度の特徴を考察した。オーラリーのソプラノとアルトの音階を次の図 8 に示す。「ド<sup>-</sup>」は「ド」の 1 オクターブ高い音を示している。

ソプラノ	ソ	ド <sup>-</sup>	シ	ド <sup>-</sup>	レ <sup>-</sup>	ラ	レ
アルト	ド	ミ	レ	ミ	ファ	休符	ファ
	ド <sup>-</sup>	シ	ラ	シ	ド <sup>-</sup>	ソ	
	ミ	レ	ド	レ	ミ	休符	

図 8 オーラリーの音程 (ソプラノ、アルト)

この「オーラリー」という楽曲は 12 個の音程によって成り立っている。しかし今回作成した黄金比音律やネイピア数音律は 12 個であるとは限らないため、それぞれ対応する音を決めなくてはならない。そこで、12 個に対して対応するために 12 を音律の数で割ることによって 1 つの音律に平均律が何個分入るかによって決定した。例えば、ネイピア数音律の B パターンの音律の数は 7 つ存在する。12 ÷ 7 = 1.7 となり、ネイピア数音律 B パターンの音律 1 つに平均律の音が約 1.7 個分当てはまる。1.7 個分とは、「ド」と「ド #7 割分」である。このようにして音律を対応させていった。なお、今回の実験によって誕生した音律の音程の呼び方は、周波数が低い方から 1、2、3、・・・と数字で呼んでいくことにする。



図9 黄金比音律 A パターン対応表

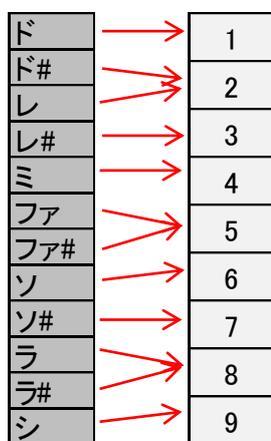


図10 黄金比音律 C パターン対応表



図11 ネイピア数音律 B パターン対応表

表9の黄金比 A パターンは、音程は12個あり、平均律の数12個と一致するので、黄金比音律一つにつき平均律1つ分が対応する。平均律をそのまま当てはめた。

表10に示す黄金比 C パターンの音律は、全部で9つ存在し、平均律の数12個より  $12 \div 9 \approx 1.3$  となり、黄金比音律一つにつき平均律1.3個分が対応する。1にはド、2にはド#またはレ、3にはレ#、4にはミ、5には、ファまたは

ファ#、6にはソ、7にはソ#、8にはラまたはラ#、9にはシを対応させた。

図11のネイピア数音律パターンBの音律は、全部で7つ存在し、平均律の数12個より  $12 \div 7 \approx 1.7$  となり、黄金比音律一つにつき平均律1.7個分が対応する。1にはドまたはド#、2にはレまたはレ#、3にはミ、4にはファまたはファ#、5にはソまたはソ#、6にはラ、7にはラ#またはシを対応させた。



図12 ネイピア数音律 C パターン対応表

図12のネイピア数音律Cパターンは全部で7つ存在し、平均律の数12個より  $12 \div 7 \approx 1.7$  となり、黄金比音律一つにつき平均律1.7個分が対応する。1にはドまたはド#、2にはレまたはレ#、3にはミ、4にはファまたはファ#、5にはソまたはソ#、6にはラ、7にはラ#またはシを対応させた。

## 5.2 アンケート評価

楽曲のアンケート方式は上述の音律を「オーラリー」の楽曲に当てはめた音源を被験者(学生9人)に聞いてもらい、聞いた感想を集計した。楽曲を流す順序は順序効果を考慮して被験者ごとに異なるようにした。質問項目は下記の2つを用意した。

- ①心地良さを4段階で評価する。
- ②下記の30項目の語群から感想に近いものを最低5つ選ぶ。

・語群

わかりにくい	素直な	分かりやすい	不思議な	優しい
斬新な	軽い	陳腐な	未知的な	前向きな
未来的な	丸みのある	古典的な	癖のある	繊細な
明るい	ありきたりな	暗い	重い	どっしりした
暖かい	想定内な	冷たい	するどい	綺麗な
きつい	後ろ向きな	雑な	薄っぺらい	汚い

アンケートに選んだ印象の形容詞は曲の新しさや斬新さにつながるポジティブワードとそうでないネガティブワード、また音色に関連しそうなものを選んだ。

図 13、14 に黄金比音律 A パターンの楽曲を聞かせた場合のポジティブワード/ネガティブワードの評価指数を示す。円グラフの数値は選択された数である。ネガティブな印象は少ない集計結果となった。ポジティブワードでは優しい、明るい、分かりやすい、綺麗などの評価が多く聞きやすい音律だったことが伺える。

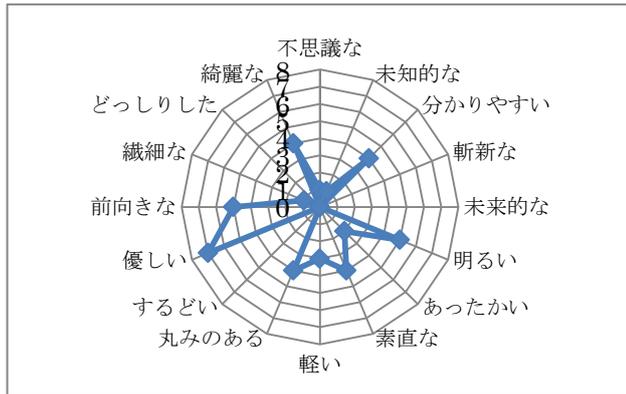


図 13 黄金比音律 A パターンのポジティブ指数

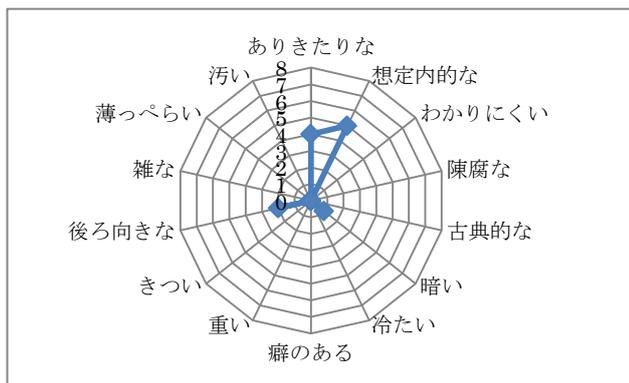


図 14 黄金比音律 A パターンのネガティブ指数

図 15、16 に黄金比音律 C パターンの楽曲を聞かせた場合のポジティブ/ネガティブの評価指数を示す。

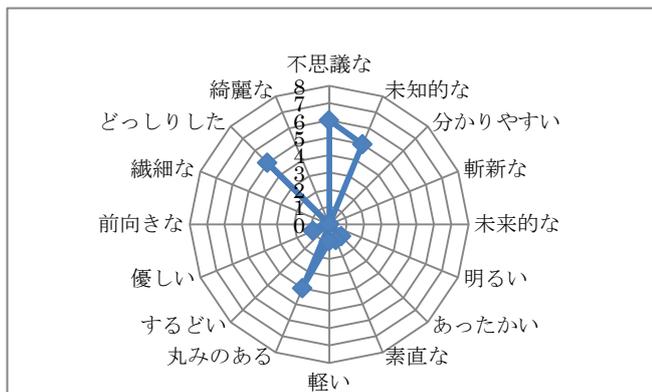


図 15 黄金比音律 C パターンのポジティブ指数

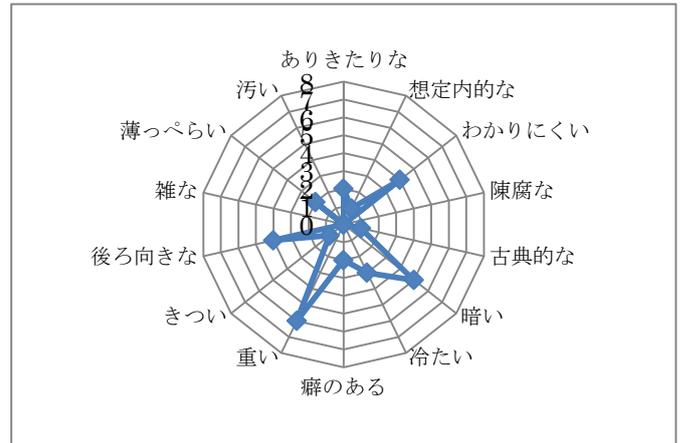


図 16 黄金比音律 C パターンのネガティブ指数

図 17、18 にネイピア数音律 B パターンの楽曲を聞かせた場合のポジティブ/ネガティブの評価指数を示す。

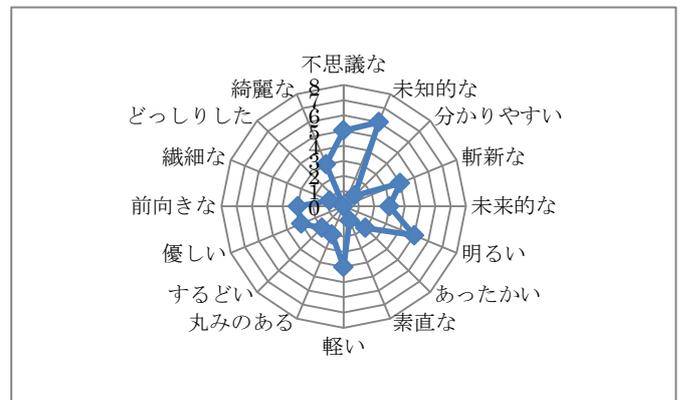


図 17 ネイピア数音律 B パターンの ポジティブ指数

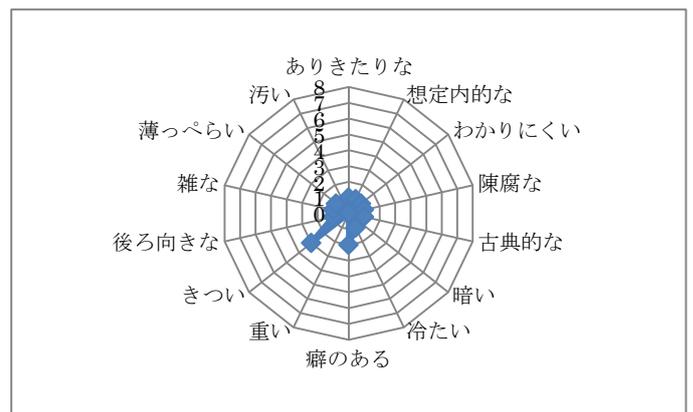


図 18 ネイピア数音律 B パターンのネガティブ指数

ネガティブワードが少なく、ポジティブワードの明るい、未知的、不思議、軽いといった評価が目立つ。楽曲として聞きやすいが、どこか聞き慣れない旋律があったと伺える。ポジティブワードの不思議、未知的などの評価が高く、ネガティブワードの重い、暗いなどの評価が高いので、楽曲

全体が低い音で構成され、さらに原曲らしさが少なかった印象を伺える。

図 19、20 にネイピア数音律 C パターンの楽曲を聞かせた場合のポジティブ・ネガティブの評価指数を示す。ネガティブワードの暗い、冷たい、重い、後ろ向きなどが目立つ。図 35 からも読み取れるが、楽曲があまり綺麗に聞こえなかったり気持ち悪く聞こえたりする印象が強い結果となった。

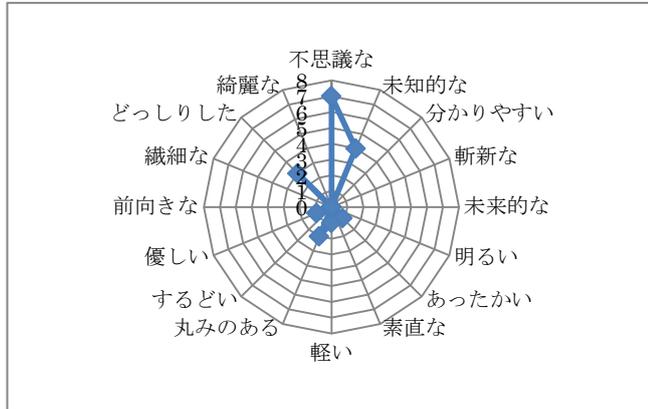


図 19 ネイピア数音律 C パターンのポジティブ指数

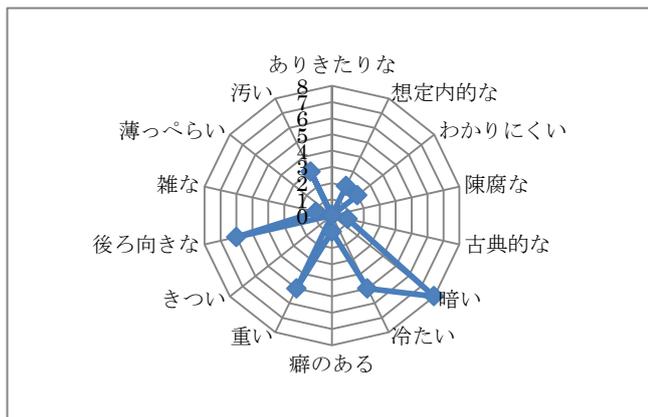


図 20 ネイピア数 C パターンのネガティブ指数

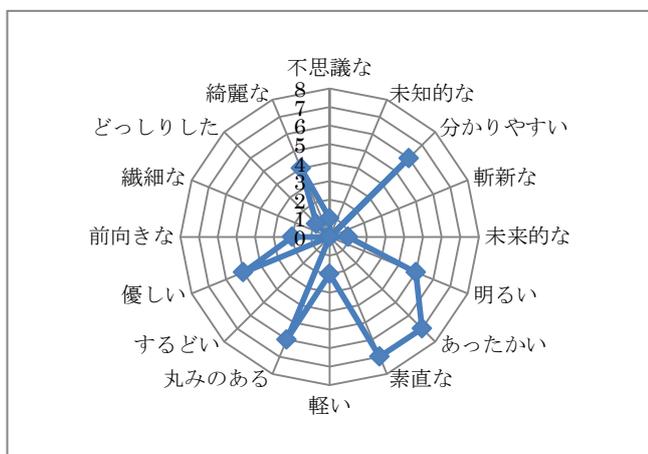


図 21 平均律のポジティブ指数

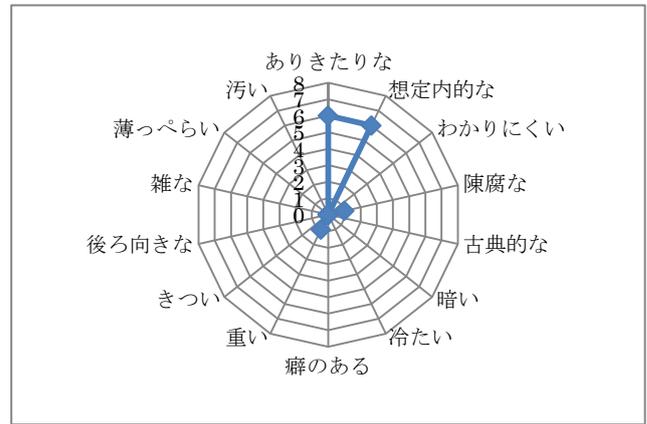


図 22 平均律のネガティブ指数

また、既存の音律である平均律についても同様に評価を行った結果を図 21、22 に示す。この音律での楽曲は「オーラリー」で使われている音律なので、ありきたりや想定内などの評価に加えて、分かりやすい、あたたかい、素直など、楽曲を聞き取りやすかった事が伺える。

## 6. おわりに

本研究では黄金比やネイピア数といった自然法則から導出される値を用いて、計 7 つのパターンで音律の創造を試みた。実際に音階を生成することができたのは、黄金比音律 2 つとネイピア数音律 2 つであったが、それらについて、和音として協和度の高さ（聴いた心地よさ）を求めないとして進めてきた本研究では、平均律などを使用し作曲してある楽曲などに比べると、不協和音が目立つ。全体のアンケートの結果から伺えることは、平均律やピタゴラス音律に音程の階段が似ている「黄金比音律 A パターン」は比較的聞きやすいという印象であった。反面、そのほかの音律は音律の数も周波数も違うため、馴染みが無いからか人の耳には快く聞こえにくいという印象であった。今回はある自然法則から導き出した音の系列に着目して研究をしていたため、作曲という域にまでは達せず追及できなかったが、もしこの音律で作曲をすると、新しい音楽としての認識されるのではないだろうか、という見解を得た。

## 参考文献

- [1] 音律と音階の科学 ドレミ…はどのようにして生まれたか、小方厚、講談社。