適応型合意形成過程の基礎理論

塩 村 尊[†]

本稿の第 1 の目的は，固定係数からなる適応型合意形成過程がオピニオン・ダイナミクスと形式的に一致することを示し，系の不動点が初期選好インデックスと確率行列の Frobenius 根，1 に対応する左固有ベクトルから算出することができること，標準的な仮定の下で選好インデックスの収束が保証されることを示すことにある．さらに，循環的選好を持つ集団が選択肢間に順位付けを行うためにはエージェント間で適応係数が異なることが必要であること，および同じ初期選好インデックスを持つ 2 つの同質的集団の合意結果は一致することを証明する．また，時変適応型合意形成過程の収束条件を与えるとともに，投票のパラドックスから抜け出すためには各期における適応係数の混質性ではなく，期間を通じた混質性が必要であることを強調する．本稿の第 2 の目的は，集団構成員が互いに直接，意見交換を行うことによって合意形成を行う 2 つのモデル，すなわち同時いっせいに意見交換を行う同時調整過程と，あらかじめ定められた順番で意見交換が行われる逐次調整過程を提示し，これらの選好インデックスの収束条件を与えることにある．これら 2 つのモデルの考察から，エージェント間における最新情報公開のタイミングの相違が投票のパラドックスから抜け出す一因となることを示す．

Fundamental Theory of Adaptive Consensus Formation Models

Takashi Shiomura[†]

The purpose of the paper is, first, to show that a model of adaptive consensus formation with constant coefficients formally reduces to a model of opinion dynamics, and its fixed point can be found directly by using initial conditions and a left eigenvector associated with the Frobenius root, one. A sequence generated by the system arrives at a certain fixed point under suitable conditions. A fixed point is unique up to the multiplication by scalars. We also provide a convergent condition of a time-variant model, and emphasize that it is necessary for resolving a voting paradox to have heterogeneity of adaptive coefficients through all the adjustment periods, rather than in each period. Secondly, we present two decision-making models in which each member directly exchanges his or her own view with the others. One is called a simultaneous decision-making process in which members in a group exchange views at one time, and the other is called a sequential decision-making process exchanging views in presupposed order. We investigate convergent conditions of these two models, and suggest that the difference of the time at which a member reveals his or her renewal information is the key to resolving a voting paradox.

1. はじめに

French[1] に始まるオピニオン・ダイナミクスは集団内の各エージェントが他のエージェントの意見を参考にしつつ，集団としての合意が形成される過程を記述するモデルであり，今や社会学，心理学，哲学等さまざまな観点から分析が行われている．French 自身は有向グラフ理論に基づきモデルの考察を行ったが，Harary[2] はこれと有限 Markov 連鎖との関連を指摘し，後に DeGroot[3] により合意形成条件が明確に与えられた．近年においては Krause[4] や Hegselman ら[5] により理論的考察に加えてシミュレーションを交えつつ，学際的観点から研究が進められている．特に，Lehrer[6] が未知学（agnoiology）の観点から合意形成過程をエージェントが真理を追究しようとするプロセスとしてとらえ，集団としての意見統一は目的ではなく結果であるべきことを強調している点は注目に値する．

一方，高橋ら[7,8] が考察した適応型合意形成過程は集団内の各エージェントが集団の意見というマクロ情報に適応しつつ合意形成を図るモデルであり，この意味での集団合理性の追求がエージェントの意見をまとめあげてゆく過程を記述するものである．これは集団合理性に焦点を当てた合意形成過程の雛形であり，現実の意見集約システムとして機能することが必ずしも

† 関西大学総合情報学部
Faculty of Informatics, Kansai University

求められるものではない．しかしながら一方で，これが合意形成過程の基礎モデルであるがゆえに，種々の拡張，シミュレーションの実行にあたり，その基本的性質を把握しておくべきものである．本稿の第1の目的は，適応型合意形成過程が標準的な仮定の下，形式的にオピニオン・ダイナミクスに帰着することを示し，その合意形成条件を得るとともに，高橋らにより得られたいくつかのシミュレーション結果を理論的に正当化することにある．

投票による意見集約がしばしば行われることからも分かるように，比較的規模の大きい集団における合意形成過程を記述するモデルとしては，高橋らのモデルが妥当すると思われるが，意見集約作業の煩わしさゆえに，規模の小さい集団においては他のエージェントの意見というミクロ情報を参照するモデルの方が現実的であると考えられる．実際，小規模の会議においては直接的な意見交換により意見が集約されていくことが通常であろう．本稿の第2の目的は比較的規模の小さい集団を念頭に置き，高橋らのモデルを基礎としつつもエージェント間で直接的な意見交換が行われる2つの合意形成過程，すなわち同時調整過程と逐次調整過程を記述し，これらの合意形成条件について考察することにある．

すでに述べたように，適応型合意形成過程は形式的にはオピニオン・ダイナミクスと一致するが，前者では集団としての合意を得ることに加えて，選択肢間の順位付けが問題になる．本稿の第3の目的は，確率的要因を含む時変適応型合意形成モデルを用い，いわゆる投票のパラドックスから本質的に抜け出すためには適応係数の期間を通じた混質性が必要になること，および同時調整過程と逐次調整過程の考察から最新情報公開のタイミングの相違が投票のパラドックスから抜け出す一因となることを示すことにある．

2. 適応型合意形成過程

議論に先立ち，ベクトルと行列に関する比較的馴染みが薄いと思われるいくつかの用語を定義しておく．以後，記号 E と O は各々，適切な型の単位行列とゼロ行列を表すものとする．

正方行列 A に対して，ある数（複素数を含む）λ と行ベクトル $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ が存在して $\boldsymbol{v}A = \lambda\boldsymbol{v}$ が成り立つならば，$\boldsymbol{v}$ を A の左固有ベクトルと呼ぶ．

下三角行列の対角要素がすべて1であるならば，これを単位下三角行列と呼び，対角要素がすべてゼロであるならば強下三角行列[9] と呼ぶ．

n 次非負正方行列 $A \equiv [a_{ij}]$ が任意の行について $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ が成り立つとき，A を確率行列と呼ぶ．また，A の非負かつ最大の固有値を Frobenius 根と呼ぶ．$\{1, 2, \ldots, n\}$ の部分集合 S で，$i \in S$，$j \notin S$ のとき $a_{ij} = 0$ を満たすものがあるとき A は分解可能であるといい，そのような S が存在しないとき分解不能という．一般に，非負行列 A により特徴付けられる線形離散力学系，

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = A\boldsymbol{x}_t, \quad t = 0, 1, \ldots$$

を正値線形システム[10] と呼ぶ．

2.1 正値線形システム

まず適応型合意形成過程は標準的な仮定の下，French 等が考察したオピニオン・ダイナミクス，すなわち A を確率行列とした正値線形システム

$$\boldsymbol{y}_{t+1} = A\boldsymbol{y}_t, \quad t = 0, 1, \ldots \tag{1}$$

と形式的に一致することを確認する．ここで，$\boldsymbol{y}_t$ はオピニオン・プロファイル（opinion profile）と呼ばれるものであり[5]，時刻 t における，ある案件に関する各エージェントの評価を表すものである．

今，I，$J \geq 2$ とし，一般にベクトル $\boldsymbol{x} \equiv (x_1, x_2, \cdots, x_J)$ のノルムを絶対値ノルムで与える．ただし，ベクトルの要素が複数の添字を持つ場合，当該ベクトルのノルムは，つねに添字 j に関して集計した絶対値ノルムであると約束する．また，ベクトルを規準化するとは自身のノルムがゼロではないとき，ベクトルの各要素をノルムで除したことを意味している．

時刻 t における選択肢 j，$j = 1, 2, \ldots, J$ に関するエージェント i，$i = 1, 2, \ldots, I$ の規準化した選好インデックスを $x_{tj}^i > 0$ で表し，

$$\boldsymbol{x}_t^i \equiv (x_{t1}^i, x_{t2}^i, \cdots, x_{tJ}^i)$$

と定義する．一方，時刻 t における選択肢 j に関する集団の選好インデックスを $Z_{tj} \equiv \sum_i x_{tj}^i$ で表し，これを規準化したものを z_{tj} で表す．このとき，適応型合意形成過程はエージェント i の選択肢 j に関する力学系を

$$x_{t+1j}^i = \alpha_t^i (z_{tj} - x_{tj}^i) + x_{tj}^i \tag{2}$$

と想定している．ただし，α_t^i は時刻 t におけるエージェント i の適応係数（適応度）である．ここで，次の仮定をおく．

仮定1 任意の時刻 t とエージェント i に関して，適応係数 α_t^i は選択肢には依存しない．

仮定1の下，適応係数は添字 j とは無関係になることに注意されたい．定義により $\|\boldsymbol{x}_0^i\| \equiv 1$, $i = 1, \ldots, I$ であるから，式 (2) より任意の $t \geq 0$ に対して $\|\boldsymbol{x}_t^i\| = 1$ となることがただちに確認される．

式 (2) の不動点，$\bar{x}_j^i$，$1 \leq i \leq I; 1 \leq j \leq J$ が存在するとき，任意の j について $\bar{x}_j^i = \bar{x}_j^k$，$i \neq k$ となる．

すなわち，不動点において各エージェントの選好インデックスは共通の値を持つようになる．このような状態をオピニオン・ダイナミクスでは合意（consensus），あるいは満場一致（unanimity）と呼んでいる．

z_{tj} の定義により

$$z_{tj} = \sum_i x^i_{tj} \bigg/ \left(\sum_j \sum_i x^i_{tj}\right) = \sum_i x^i_{tj} \bigg/ \left(\sum_i \sum_j x^i_{tj}\right) = \sum_i x^i_{tj}/I$$

となるので，式 (2) は

$$x^i_{t+1j} = \alpha^i_t \left(\sum_k x^k_{tj}/I - x^i_{tj}\right) + x^i_{tj} = \kappa\alpha^i_t \left(\sum_{k\neq i} x^k_{tj}/(I-1) - x^i_{tj}\right) + x^i_{tj} \tag{3}$$

と書き改めることができる．ただし，$\kappa \equiv (I-1)/I < 1$ である．

適応係数には $0 \le \alpha^i_t \le 1$ を仮定することが自然に思われるが（文献 8)，p.3589 参照），以下に見るように合意形成条件を問題にする限り，この仮定は若干緩めることができる．そこで次の仮定をおく．

仮定 2　任意の時刻 t とエージェント i に関して，$0 \le \alpha^i_t \le 1/\kappa$，$i = 1, 2, \ldots, I$.

今，第 i 要素を $1 - \kappa\alpha^i_t$ とし，残り $I - 1$ 個のすべての要素を α^i_t/I とする行ベクトル

$$\boldsymbol{k}^i_t \equiv \left(\alpha^i_t/I, \cdots, \alpha^t_t/I, 1-\kappa\alpha^i_t, \alpha^i_t/I, \cdots, \alpha^i_t/I\right)$$

を第 i 行に持つ行列 K_t を定義する．任意の行について要素の和が 1 になることに注意されたい．ただちに次のことが分かる．

補題 1　仮定 1 と 2 の下，式 (2) と同値な力学系 (3) は確率行列 K_t によって特徴付けられる正値線形システム，

$$\boldsymbol{x}_{t+1j} = K_t \boldsymbol{x}_{tj} \tag{4}$$

として記述することができる．ただし，

$$\boldsymbol{x}^T_{tj} \equiv \left(x^1_{tj}, x^2_{tj}, \cdots, x^I_{tj}\right)$$

である．

補題 1 より適応型合意形成過程はオピニオン・ダイナミクス (1) と形式的に一致することが確認されたが，次の 2 つの点において異なる．第 1 に，系を特徴付ける行列 K_t は適応係数から構築されるものであり，定義的に確率行列になっているのではない．第 2 に，オピニオン・ダイナミクスは 1 つの案件（選択肢）に関する意見のまとめあげを記述する過程であり，それゆえ選択肢間の順位付けは問題にしない．

次に，適応型合意形成過程が集団として合意に至るための条件を適応係数が時刻 t に依存しない場合と依存する場合，すなわち固定係数モデルと時変モデルに分けて検討する．

2.2　固定係数モデル

ここで，次の仮定をおく．

仮定 3　任意のエージェント i に関して，適応係数 α^i_t は時刻 t に依存しない．

仮定 3 の下，しばらく $\alpha^i \equiv \alpha^i_t$，$K \equiv K_t$ とおく．式 (4) において，極限行列 $\bar{K} \equiv \lim_{n\to\infty} K^n$ が存在するならば，不動点 $\bar{x}^i_j$，$j = 1, 2, \ldots, J$ は

$$\bar{\boldsymbol{x}}_j = \bar{K}\boldsymbol{x}_{0j} \tag{5}$$

により与えられることが分かる．ここで，

$$\bar{\boldsymbol{x}}^T_j \equiv \left(\bar{x}^1_j, \bar{x}^2_j, \cdots, \bar{x}^I_j\right)$$

である．それでは，どのような条件の下で $\bar{K}$ が存在し，それはどのような要素を持つのであろうか．この問いに対しては DeGroot [3)] が与えた 2 つの定理が明快な解答を与える（付録参照）．これを定理 1 としてまとめておく．

定理 1　仮定 1–3 の下，整数 $m > 0$ が存在し，K^m の少なくとも 1 つの列がすべて正要素から成り立つならば，固定係数モデルは十分な調整の後に合意に至る．また，$\bar{K}$ はすべての行を K の Frobenius 根，1 に対応する，すべての要素が非負の規準化した左固有ベクトルとして一意に確定する．

仮定 2 を若干強めたものとして次の仮定 4 をおくと，以下の系 1 がただちに得られる．

仮定 4　任意のエージェント i に関して，$0 < \alpha^i < 1/\kappa$，$i = 1, 2, \ldots, I$.

系 1　仮定 1 と 4 の下，固定係数モデルは十分な調整の後に合意に至る．

定理 1 の合意形成条件は文献 11)，定理 1 のそれよりも緩やかなものである．実際，前者は K が分解不能であることを必ずしも要求しないのに対して，後者は分解不能であることを要求する（文献 12)，pp.109–110 参照）．またこのことを反映して，前者では固有ベクトルがゼロ要素を含む場合があるのに対して後者の下では固有ベクトルが正ベクトルになる．ただし，K が分解不能であるという条件の下では，これら 2 つの合意形成条件は同値である（文献 13)，pp.93–94 参照）．

固定係数モデルにおいて，エージェントが共通の適応係数を持つ集団を同質的集団と呼び，そうではない集団を混質的集団と呼ぶ．また，$I = J$，かつエージェント 1 と $i \ge 2$ が J 個の選択肢に対して**表 1** のような優先順位を持つとき，集団は循環的選好を持つとい

表 1 循環的選好を持つ集団
Table 1 A group having cyclical preferences.

	選択肢 1	$\cdots$	選択肢 $j-1$	選択肢 $j=i$	選択肢 $j+1$	$\cdots$	選択肢 J
Agent 1	1	$\cdots$	$j-1$	j	$j+1$	$\cdots$	J
Agent i	$J-i+2$	$\cdots$	J	1	2	$\cdots$	$J-i+1$

う．表中の 1 から始まる整数値は各選択肢に対する優先順位を表しており，その値が小さいほど優先順位が高いことを意味する．

次の 2 つの定理は文献 8)，pp.3589–3592 のシミュレーション結果を理論的に裏付けるものである．

定理 2 $I=J$，かつ定理 1 の条件が満たされるものとする．このとき，循環的選好を持つ同質的集団においては，すべての選択肢に関する選好インデックスの極限値が共通の値，$1/I$ になる．

証明：同質的集団においてはすべてのエージェントの適応係数が等しいため，K の 1 に対応する規準化した左固有ベクトルはすべて同じ要素，$1/I$ を持つ．他方，エージェントが循環的選好を持つ場合，任意の j について $\sum_k x_{0j}^k = 1$ となり，式 (5) より選好インデックスの極限値が共通の値，$1/I$ になる． ∎

定理 2 より，循環的選好を持つ同質的集団が選択肢間の順位付けを行うためにはエージェント間で適応係数が異なることが必要であることが分かる．

定理 3 適応係数 α^i と $\lambda>0$ が，$0\le\alpha^i\le 1/\kappa$，かつ $0\le\alpha^i\le 1/(\lambda\kappa)$，$i=1,2,\ldots,I$ を満たし，さらに適応係数ベクトル $\boldsymbol{a}\equiv(\alpha^1,\alpha^2,\cdots,\alpha^I)$ と $\lambda\boldsymbol{a}$ に対応する極限行列が存在するものとする．このとき，式 (5) の不動点は $\boldsymbol{a}$ の λ 倍に関して不変である．

証明：適応係数ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\lambda\boldsymbol{a}$ に対応する極限行列を各々，$\bar{K}_1$ と $\bar{K}_2$ で表すと，定理 1 よりそれぞれすべての行が K_1 と K_2 の Frobenius 根，1 に対応する規準化した左固有ベクトルによって与えられる．

簡単な計算から $E-K_2=\lambda(E-K_1)$ が成り立つことが分かるが，このことから K_2 の Frobenius 根に対応する規準化した左固有ベクトルを $\boldsymbol{v}$ で表したとき，

$$\boldsymbol{v}(E-K_2)=\lambda\boldsymbol{v}(E-K_1)=\boldsymbol{0}$$

が成り立たなければならない．したがって，$\boldsymbol{v}(E-K_1)=\boldsymbol{0}$ であり，$\boldsymbol{v}$ は K_1 の Frobenius 根に対応する左固有ベクトルでもある．それゆえ $\bar{K}_1=\bar{K}_2$ であり，式 (5) より初期ベクトルが同じであるならば同じ不動点を与えることになる． ∎

定理 3 は，適応係数ベクトルがスカラ倍だけ異なる 2 集団において，初期選好インデックスが同じであるならば，合意に要する調整回数の差はあったとしても，その帰結は同じであることを主張している．特に，2 つの同質的集団が合意に至るならば，その合意結果は一致する．

2.3 時変モデル

続いて適応係数が時刻 t に依存する場合を考える．再び時刻 t におけるエージェント i の適応係数を α_t^i で表し，次の仮定をおく．

仮定 5 任意の $t\ge 0$ において，ある数 $\alpha_t\ge 0$ が存在して，$\alpha_t\le\alpha_t^i\le 1$，$i=1,2,\ldots,I$，かつ $\sum_{t=0}^{\infty}\alpha_t=\infty$ が成り立つ．

仮定 1 と 5 の下，我々の時変モデルは Krause[4] の時変モデルの特殊ケースに帰着する．彼が与えた定理より，ただちに次の定理を得る（付録参照）．

定理 4 仮定 1 と 5 の下，合意形成過程 (4) は十分な調整を経た後に合意に至る．

証明：$K_t\equiv[k_{ij}]$ とおく．仮定 5 より任意の i に対して

$$1-\kappa\alpha_t^i\ge\alpha_t^i/I\ge\alpha_t/I,\quad t\ge 0$$

となることに注意されたい．したがって任意の i，j について $k_{ij}\ge\alpha_t/I$ となり，

$$\sum_{j=1}^{I}\min_i k_{ij}\ge\alpha_t,\quad t\ge 0$$

が成立し，Krause の合意形成条件が満たされる． ∎

直感的に述べるならば，仮定 5 は合意形成過程においてエージェントの適応係数が本質的にゼロにならないことを要求している．特に，すべてのエージェントの適応係数が 0 以上 1 以下，かつ時間に依存しない下限 $0<\alpha<1$ を持つ場合や，0 以上 1 以下の一様乱数により与えられる場合は仮定 5 が満たされる．

すでに確認したように，固定係数モデルにおいては集団が循環的選好を持つ場合，選択肢間に順位付けを行うためには適応係数がエージェント間で異なることが必要である．それでは，各期のエージェントの適応係数が乱数によって与えられる場合，集団として選択肢に順位付けが可能なのであろうか．

そこで，5 人のエージェントからなる集団を考え，彼らは 5 つの選択肢に対して循環的選好を持つものとする．また，彼らの適応係数を区間 $[0,1]$ 上の一様乱数によって与える．換言するならばエージェントの適応係数がまったく気まぐれに変動し，かつ傾向として柔軟，あるいは頑固のいずれの態度も示さないものとす

表 2 一様乱数モデルの平均的挙動
Table 2 An average mark of a uniformly random model.

	選択肢 1	選択肢 2	選択肢 3	選択肢 4	選択肢 5
不変型	0.200000	0.200000	0.200000	0.200000	0.200000
乱数型	0.199999	0.200221	0.199913	0.199863	0.200014

る．このとき，当該集団は各期の適応係数がエージェント間で一般に異なり，この意味においては混質的といえるが，その一方で期間を通じた適応係数の期待値はエージェント間で共通の値，0.5 になるため，この意味においては同質的といえる．

表 2 は 5 人のエージェントの適応係数を 0.5 に設定した固定係数モデルの合意結果と，一様乱数で与えた場合を 10 万回繰り返して得られた合意結果の平均値を比較したものである．表 2 は，これら 2 つのモデルの合意結果は平均として，ほぼ一致することを示しているが，一般に次のことが成り立つ．

定理 5 第 i エージェントの t 期における適応係数 $0 \leq \alpha_t^i \leq 1$ が各期において共通の期待値 $\bar{\alpha}^i$ を持ち，$t-1$ 期以前の適応係数と独立，かつエージェント間で独立であるならば，合意形成過程 (4) の平均的挙動は第 i エージェントの適応係数を $\bar{\alpha}^i$ とする固定係数モデルの挙動と一致する．

証明：$E[\cdot]$ を期待値を表す演算子とすると，式 (4) より $t=1$ のとき，$E[\boldsymbol{x}_{1j}] = E[K_0]\boldsymbol{x}_{0j}$ を得る．他方，$t=2$ のときは適応係数の独立性と $E[K_t] = E[K_0]$，$t \geq 1$ であることから，

$$\begin{aligned} E[\boldsymbol{x}_{2j}] &= E[K_1\boldsymbol{x}_{1j}] = E[K_1K_0\boldsymbol{x}_{0j}] \\ &= E[K_1]E[K_0]\boldsymbol{x}_{0j} = E[K_0]^2\boldsymbol{x}_{0j} \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，$E[K_0] \equiv [k_{ij}^e]$ としたとき，

$$k_{ij}^e \equiv \begin{cases} \bar{\alpha}^i/I, & i \neq j \\ 1-\kappa\bar{\alpha}^i, & i = j \end{cases}$$

である．以下同様にして，$t \geq 3$ に対して

$$E[\boldsymbol{x}_{tj}] = E[K_0]^t\boldsymbol{x}_{0j}$$

を得る． ∎

適応係数が乱数により与えられる場合は実験ごとに合意結果が異なる．特に，集団が循環的選好を持ち，かつ共通の期待値を持つ乱数を適応係数とする場合においては，選好インデックスのごくわずかの差により選択肢間の優先順位が変わり，安定した順位付けができない．一方で，合意形成過程を分析する目的の 1 つは，与えられた初期選好インデックスから最終的な合意結果を予測することにある．それゆえ，上の例のように，事前に予測できない乱数に依存した優先順位は本質的な意味を持たない．このことは，循環的選好関係を持つ集団における集団としての順位付けの失敗，いわゆる投票のパラドックスから本質的に抜け出すためには適応係数の各期における混質性ではなく，期間を通じた混質性が必要であることを意味する．

3. 同時調整過程と逐次調整過程

前章で確認したとおり，標準的な仮定の下，集団の意見というマクロ情報に適応する適応型合意形成過程は他のエージェントの意見というミクロ情報に適応するオピニオン・ダイナミクスに帰着する．オピニオン・ダイナミクスにおいてはエージェント間の直接的な意見交換が念頭におかれているが，この際エージェント間で必然的に起こる他者に与える影響と他者から受ける影響が明示的には考慮されていない．また，グループ内の意見交換が一巡するまでは意見交換の際に変更されたであろう意見を明らかにしないことが暗黙の前提となっている．これは必ずしも現実にはそぐわないであろう．そこで，次のような 2 つのモデルを考える．

各エージェントは固有のプロパティとして，$J \geq 2$ 個の選択肢に関する選好順序に加えて，他者に影響される度合いの指標と他者への影響力を表す指標を持つものとする．以下では前者を順応係数と呼び，$\alpha_i \geq 0$ で表す．また，後者を説得係数と呼び，$\beta_i \geq 0$ で表す．このとき第 i エージェントが第 k（$k \neq i$）エージェントから受ける影響は $\gamma_{ik} \equiv \alpha_i\beta_k$ により表すことができるができるが，これを改めて適応係数と呼ぶ．議論の単純化のため，これらの係数は期間を通じて一定であると仮定する．順応係数と説得係数は各々，Abelson[14] の persuasibilty と persuasiveness に対応する概念である．

時刻 t における第 i エージェントに関する第 j 選択肢の選好インデックスが力学系，

$$x_{t+1j}^i = \sum_{k \neq i} \gamma_{ik}(\xi_{tj}^k - x_{tj}^i)/(I-1) + x_{tj}^i \quad (6)$$

に従って変化するものと仮定する．ただし，

$$\xi_{tj}^k \equiv x_{tj}^k \quad (7)$$

または

$$\xi_{tj}^k \equiv \begin{cases} x_{t+1j}^k, & k < i \\ x_{tj}^k, & k > i \end{cases} \quad (8)$$

である．式 (6) は時刻 t における第 i エージェントの

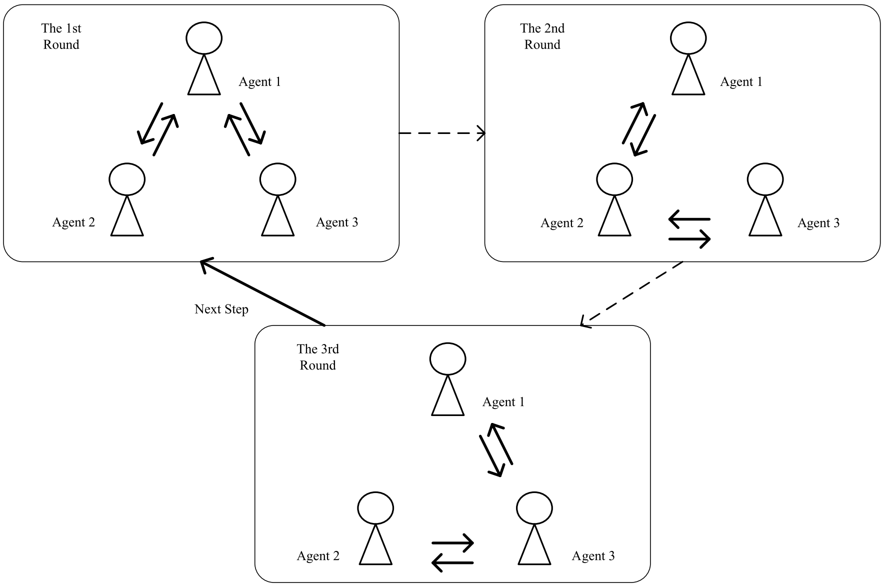

図 1 同時調整過程
Fig. 1 Simultaneous decision-making process.

意見修正，$x^i_{t+1j} - x^i_{tj}$ が，他の $I-1$ 人のエージェントとの交渉による意見調整，$\gamma_{ik}(\xi^k_{tj} - x^i_{tj})$ の平均により行われることを意味している．以下は式 (6) と (7) を用いる場合を同時調整過程と呼び，式 (6) と (8) を用いる場合を逐次調整過程と呼ぶ．いずれの場合も任意の $t \geq 0$ に対して $\|\boldsymbol{x}^i_t\| = 1$ であることは容易に確認される．

図 1 は 3 人のエージェントからなる集団において同時調整過程が用いられるとき，1 回（Step）のエージェント間交渉が完了するまでの意見交換の様子を表したものである．この調整過程においては，各エージェントは交渉開始時点において明らかにされた他のエージェントの意見に適応して自身の意見を修正するが，これが明らかになるのは次のエージェント間交渉が始まるときである．したがって，すべてのエージェントはこの交渉期間中，情報を共有しており，エージェントの交渉の順番は意味を持たない．それゆえ，エージェントは同時いっせいに意見交換をしていると考えることもできる．

一方で，**図 2** は同じ構成の集団において逐次調整過程が用いられるときのエージェント間交渉が完了するまでの意見交換の様子を表したものである．図中，影が付けられたエージェントは交渉を通じて修正済みの意見を他のエージェントに明らかにしていることを意味する．ここでは便宜上，第 i エージェントには i 番目の交渉順が与えられていると仮定している．したがって，エージェントが直面する情報は交渉の進展とともに変化し，交渉順が後になるエージェントほど集団内の最新情報に対して適応することができる．今我々が考察しているような状況とは異なるが，経済学では市場価格をめぐる交渉過程，すなわち市場調整過程として，類似した 2 つのプロセスが考察されている（文献 15) 参照）．以下では同時調整過程と逐次調整過程の合意形成条件について考察する．

仮定 6 任意の互いに異なる i と k について，$0 \leq \gamma_{ik} \leq 1$，かつ $\gamma_{ii} = 0$，$i, k = 1, 2, \ldots, I$.

式 (6) 右辺が

$$\sum_{k \neq i} \gamma_{ik} \xi^k_{tj}/(I-1) + x^i_{tj} \left(1 - \sum_{k \neq i} \gamma_{ik}/(I-1)\right)$$

と変形できることから，仮定 6 の下では選好インデックスの非負性が保たれることに注意されたい．

さて，$r_{ij} \equiv \gamma_{ij}/(I-1)$，ただし，$r_{ii} \equiv 0$ として行ベクトル，

$$\boldsymbol{l}^i \equiv \left(r_{i1}, \cdots, r_{ii-1}, 1 - \sum_k r_{ik}, r_{ii+1}, \cdots, r_{iI}\right)$$

を第 i 行に持つ確率行列 L を定義する．このとき，同時調整過程は

$$\boldsymbol{x}_{t+1j} = L\boldsymbol{x}_{tj} \tag{9}$$

と記述することができる．定理 1 よりただちに次の定理を得る．

定理 6 仮定 6 が満たされるものとする．このとき，式 (9) における行列 L に対して整数 $m > 0$ が存

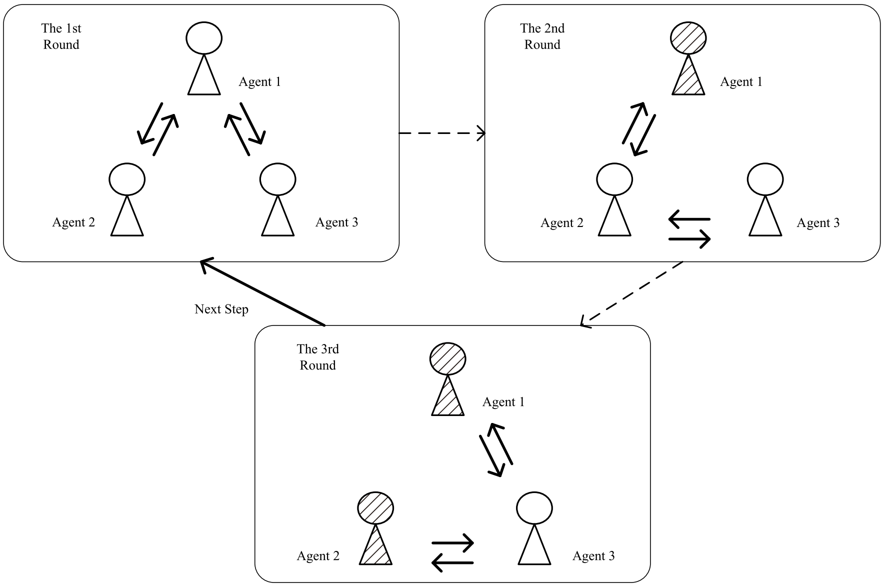

図 2　逐次調整過程
Fig. 2　Sequential decision-making process.

在し，L^m の少なくとも 1 つの列がすべて正要素から成り立つならば，同時調整過程は十分な交渉の後に合意に至る．

仮定 6 を若干強めて次の仮定 7 をおくと，以下の系 2 が得られる．

仮定 7　任意の互いに異なる i と k について，$0 < \gamma_{ik} < 1$，かつ $\gamma_{ii} = 0$，$i, k = 1, 2, \ldots, I$.

系 2　仮定 7 の下，同時調整過程は合意に至る．

定理 7　同時調整過程を考える．このとき，すべてのエージェントの説得係数が同じであるならば，同時調整過程は固定係数モデルと形式的に一致する．

証明：仮定の下では，すべての $k \neq i$ に対して r_{ik} が共通の値，たとえば r_i を持つ．このとき，$\alpha_i \equiv r_i I$ と定義すると，同時調整過程を特徴付ける行列 L は固定係数モデルを特徴付ける行列 K と一致する．　∎

今，

$$\boldsymbol{m}^i \equiv (-r_{i1}, \cdots, -r_{ii-1}, 1, 0, \cdots, 0),$$

$$\boldsymbol{n}^i \equiv \left(0, \cdots, 0, 1 - \sum_k r_{ik}, r_{ii+1}, \cdots, r_{iI}\right)$$

を第 i 行に持つ行列を各々，M と N で表す．M は単位下三角行列であり，したがって正則である．一方，N は上三角行列になる．このとき，逐次調整過程は

$$\boldsymbol{x}_{t+1j} = P\boldsymbol{x}_{tj} \tag{10}$$

と表すことができる．ただし，$P \equiv M^{-1}N$ である．

次の補題は文献 11)，補題 1 の改訂版である．

補題 2　一般に，$r_{ij} \geq 0$，i，$j = 1, 2, \ldots, n$，ただし，$r_{ii} = 0$，$i = 1, 2, \ldots, n$，かつ不等式

$$\rho_i \equiv 1 - \sum_{j=1}^{n} r_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

が成り立つものとする．このとき，第 i 行をベクトル $\boldsymbol{m}^i$ とする行列 M とベクトル $\boldsymbol{n}^i$ とする行列 N，ただし，

$$\boldsymbol{m}^i \equiv (-r_{i1}, \cdots, -r_{ii-1}, 1, 0, \cdots, 0),$$
$$\boldsymbol{n}^i \equiv (0, \cdots, 0, \rho_i, r_{ii+1}, \cdots, r_{in})$$

を定義すると，$P \equiv M^{-1}N$ は確率行列になる．

証明：M が単位行列と非負強下三角行列の差として表すことができることに注意すると，$M^{-1} \geq O$ が存在する（文献 9)，p.53，2.4.6 参照）．M^{-1} は単位下三角行列であることに注意されたい．一方で，仮定の下では N は非負，かつ非ゼロ行列である．実際，非負性は明らか．ここでもし，N がゼロ行列であるとするならば，$\rho_1 = 1 - \sum_{j=1}^{n} r_{1j} = 0$ であるから，少なくとも 1 つの $j > 1$ に対して $r_{1j} > 0$ となるので，ゼロ行列であることに矛盾する．したがって，P は非負，かつ非ゼロ行列である．

$M^{-1} \equiv (m_{ij}^*)$ とおくと，$MM^{-1} = E$ より

$$m_{ij}^* = \sum_{k=j}^{i-1} r_{ik} m_{kj}^*, \quad i > j \tag{11}$$

が成り立つ．$m_{ii}^* = 1$，$i = 1, 2, \ldots, n$，かつ $m_{ij}^* = 0$，$i < j$ に注意されたい．一方，P の第 i 行に関する和 s_i は

$$\begin{aligned} s_i = m_{i1}^* + m_{i2}^*(1-r_{21}) + \cdots \\ + m_{ii-1}^*\left(1-\sum_{j=1}^{i-2} r_{i-1j}\right) \\ + 1 - \sum_{j=1}^{i-1} r_{ij} \end{aligned} \tag{12}$$

となる．特に，$s_1 = 1$ は容易に確認される．

次に，$s_k = 1$, $k \le i$ が成立したと仮定し，$s_{i+1} = 1$ となることを示そう．式 (12) より

$$\begin{aligned} s_{i+1} = m_{i+11}^* + m_{i+12}^*(1-r_{21}) + \cdots \\ + m_{i+1i}^*\left(1-\sum_{j=1}^{i-1} r_{ij}\right) \\ + 1 - \sum_{j=1}^{i} r_{i+1j} \end{aligned} \tag{13}$$

であるが，式 (11) を用いると式 (13) は

$$\begin{aligned} s_{i+1} = \sum_{k=1}^{i} r_{i+1k} m_{k1}^* + \sum_{k=2}^{i} r_{i+1k} m_{k2}^*(1-r_{21}) \\ + \cdots + \sum_{k=i}^{i} r_{i+1k} m_{ki}^*\left(1-\sum_{j=1}^{i-1} r_{ij}\right) \\ + 1 - \sum_{j=1}^{i} r_{i+1j} \end{aligned} \tag{14}$$

と書き改めることができる．

式 (14) 右辺の各項から $k = i$ に関する部分を取り出して和を求めると，$s_i = 1$ より

$$\begin{aligned} r_{i+1i}\Bigg\{ m_{i1}^* + m_{i2}^*(1-r_{21}) + \cdots \\ + m_{ii-1}^*\left(1-\sum_{j=1}^{i-2} r_{i-1j}\right) + 1 - \sum_{j=1}^{i-1} r_{ij} \Bigg\} \\ = r_{i+1i} \end{aligned}$$

となる．以下同様にして，$k = i-1, \ldots, 1$ に関する部分を取り出して和を求めると，帰納法の仮定によりそれぞれ r_{i+1k}, $k = i-1, \ldots, 1$ となる．したがって，$s_{i+1} = 1$ となる． ∎

定理 8 仮定 6 が満たされるものとする．このとき，式 (10) における行列 P に対して整数 $m > 0$ が存在し，P^m の少なくとも 1 つの列がすべて正要素から成り立つならば，逐次調整過程は十分な交渉の後に合意に至る．

証明：補題 2 と定理 1 より証明される． ∎

次の系 3 の成立も明らかであろう．

系 3 仮定 7 の下，逐次調整過程は合意に至る．

定理 2 と 6 より，すべてのエージェントの説得係数と順応係数が共通，かつ循環的選好を持つ集団が同時調整過程に基づいて合意形成を図る場合，選択肢間の順位付けに失敗することが分かる．ところが，この場合においても逐次調整過程に基づくならば，少なくとも部分的に順位付けが可能である．これは 2 つの調整過程を特徴付ける行列が同じ適応係数の下でも一般に異なることによる．

1 例として，説得係数，順応係数ともに 0.5 を持つ 2 エージェントからなる集団が 2 つの選択肢に対して循環的選好を持つ場合を考える．このとき，定理 2 と 6 から同時調整過程の 2 つの選択肢に関する合意結果，すなわち規準化した選好インデックスの値はともに 0.5 になり，順位付けに失敗する．一方で，逐次調整過程においては P の固有値 1 に対応する左固有ベクトルの計算結果から第 1 選択肢と第 2 選択肢に関する合意結果が各々，0.52381 と 0.47619 になり，第 2 選択肢が第 1 選択肢よりも好まれることが確認される．このことは交渉過程における修正意見公開のタイミングの相違が投票のパラドックスから抜け出す一因となることを意味している．

4. おわりに

高橋らの適応型合意形成過程は，標準的な仮定の下で French らにより論じられたオピニオン・ダイナミクスと形式的に一致する．このことからいくつかのシミュレーション結果が理論的にも正当化されるとともに，逐次計算によらない不動点算出方法が得られた．また，標準的な仮定の下で集団としての合意に至ることが保証された．これらの結果は適応型合意形成過程の理論的基盤を固めるとともに，数値計算が正しく行われたか否かのチェックに役立てることができるであろう．

本稿ではエージェントがマクロ情報に適応するのではなく，ミクロ情報に適応しつつ合意形成を図る 2 つのモデル，すなわち同時調整過程と逐次調整過程の合意形成条件が検討されたが，これらの調整過程の興味あるシミュレーション結果については機会を改めて報告したい．

以上の分析は適応係数が選択肢に依存しないという仮定に決定的に依存している点には注意が必要である．もし適応係数が選択肢に依存するならば，モデルは一般に非線形になり，もはやここで用いた手法を用いることができなくなる．一方で，人は特定の選択肢，あるいは選択肢間の順位にしばしば執着する．このことは適応係数が選択肢に依存していることを意味するが，このような状況における分析は今後の課題とする．

参 考 文 献

1) French, J.P.R.: A formal theory of social power, *Psychological Review*, Vol.63, pp.181–194 (1956).
2) Harary, F.: A criterion for unanimity in French's theory of social power, *Studies in Social Power*, Cartwright, D. (Ed.), chapter 10, pp.168–182, Institute for Social Research, Ann Arbor (1959).
3) DeGroot, M.H.: Reaching a consensus, *Journal of American Statistical Association*, Vol.69, No.345, pp.118–121 (1974).
4) Kurause, U.: A discrete nonlinear and non-autonomous model of consensus formation, *Communications in Difference Equations*, Elaydi, S., et al. (Eds.), pp.227–236, Gordon and Breach Publ., Amsterdam (2000).
5) Hegselmann, R. and Krause, U.: Truth and cognitive division of labour: First steps towards a computer aided social epistemology, *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, Vol.9, No.3 (2006). http://jasss.soc.surrey.ac.uk/9/3/10.html
6) Lehrer, K.: Social consensus and rational agnoiology, *Synthese*, Vol.31, pp.144–160 (1975).
7) 高橋正浩，生天目章：個々の非合理性に基づくマルチエージェントの合意形成法，電子情報通信学会論文誌 D-I，Vol.J82-D-I, No.8, pp.1093–1101 (1999).
8) 高橋正浩，生天目章：適応型合意形成モデルとその諸性質，情報処理学会論文誌，Vol.40, No.9, pp.3586–3595 (1999).
9) Ortega, J.M. and Rheinboldt, W.C.: *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Acadmic Press, New York (1970).
10) Luenberger, D.G.: *Introduction to Dynamic System*, John Wiley & Sons, New York (1979).
11) 塩村 尊：適応型合意形成モデルの基本性質，情報処理学会論文誌，Vol.47, No.8, pp.2656–2659 (2006).
12) Nikaido, H.: *Convex Structures and Economic Theory*, Academic Press, New York (1968).
13) 二階堂副包：経済のための線形数学，培風館 (1961).
14) Abelson, R.P.: Mathematical models of the distribution of attitudes under controversy, *Contributions to Mathematical Psychology*, Frederiksen, N. and Gulliksen, H. (Eds.), chapter 6, pp.142–160, Holt, Reinehart and Winston, Inc., New York (1964).
15) Uzawa, H.: Walras' tâtonnement in the theory of exchange, *Review of Economic Studies*, Vol.27, pp.182–194 (1959–1960).

付 録

以下の 2 つの定理は DeGroot[3] によるものであり，本稿における固定係数適応型合意形成過程，同時調整過程，および逐次調整過程の収束条件と極限行列の計算方法を与えるものである．ただし，本稿の内容に合わせるためにオリジナルの記述を若干，変更している．

合意形成過程 (1) を考える．

定理 A（DeGroot，Theorem 1） ある整数 $m > 0$ が存在し，A^m の少なくとも 1 つの列がすべて正要素からなるならば，合意形成過程 (1) は十分な交渉を経た後に合意に至る．

定理 B（DeGroot，Theorem 3） 合意形成過程 (1) において，極限行列 $\bar{A}$ の各行は A の Frobenius 根，1 に対応する規準化された左固有ベクトルとして一意に確定する．

次の定理は Krause[4] によるものであり，時変適応型合意形成過程の合意形成条件を与えるものである．合意形成過程 (1) を一般化し，

$$\boldsymbol{y}_{t+1} = A(\boldsymbol{y}_t, t)\boldsymbol{y}_t \tag{15}$$

で与える．ここで，$A(\boldsymbol{y}_t, t) \equiv [a_{ij}(\boldsymbol{y}_t, t)]$ は確率行列であり，その要素は状態 $\boldsymbol{y}_t$，および時間 t に依存してもよい．

定理 C（Krause，Theorem 1 (i)） $\sum_{t=0}^{\infty} \delta_t = \infty$，かつ任意の t において

$$\sum_{k=1}^{n} \min_i a_{ik}(\boldsymbol{y}_t, t) \geq \delta_t$$

なる数 $0 \leq \delta_t \leq 1$ が存在するものとする．このとき，合意形成過程 (15) は十分な調整を経た後に合意に至る．

(平成 19 年 1 月 22 日受付)
(平成 19 年 8 月 9 日採録)

塩村 尊（正会員）

昭和 35 年生．昭和 63 年神戸大学大学院経済学研究科博士課程後期課程修了．同年香川大学商業短期大学部専任講師．平成 6 年より関西大学総合情報学部助教授．平成 13 年より関西大学総合情報学部教授．理論経済学，情報学と人文社会科学との接点に関する研究に従事．博士（経済学）．日本経済学会，日本オペレーションズ・リサーチ学会各会員．