Winning Strategy of the Memory Game

篠田　正人
奈良女子大学理学部

絵合わせ（神経衰弱）ゲームにおいて、取るカードの枚数の期待値を最大にするにはパスを用いた戦略が有効であることが Zwick-Paterson(1993) で報告されている。本論文では、ゲームに勝つ確率を最大とするためにも同様にパス戦略が有効であることを示し、特別な場合について勝つ確率を具体的に求めた。

Winning Strategy of the Memory Game

Masato SHINODA
Nara Women's University

We study the winning strategy of the Memory Game. In 1993, Zwick and Paterson showed that idle plies are effective for the purpose of maximizing the expected gain. In this paper, we show that idle plies are effective also for the purpose of maximizing the probability of winning the game, and we calculate the probability in some special cases.

1. 概要

The Memory Game（絵合わせ、あるいは「神経衰弱」）はよく知られたゲームである。その数学的側面の紹介記事として Stewart[1]、篠田 [2] がある。ここでは以下のような設定を考える。

(a) $1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots, N, N$ の数字のついた、全部で $2N$ 枚のカードを用いる。最初に、すべてのカードを場に伏せる。

(b) 先手番（プレイヤー P_1）、後手番（プレイヤー P_2）の２人のプレイヤーでゲームを行う。手番のプレイヤーはカードを１枚選んで表向きにする。さらにカードをもう１枚選び、先に選んだカードと同じ数字であれば場からその２枚を取る。このとき手番は移動せず、同じプレイヤーが再びカードを表向きにしていく。選んだ２枚のカードの数字が異なればその２枚のカードは場に裏向きで戻し、手番は相手に移る。

(c) 場のカードがなくなった時点で、多い枚数のカードを取っているほうが勝ちである。取ったカードの枚数が等しいときは引き分けである。

(d) いつまでも取られないカードが残ったままの場合は、それまでに取った枚数の多いほうが勝ち、同数ならば引き分け、とする。

(d) のルールの必要性については後ほど説明する。さらに、ここでは「プレイヤーの記憶力は完璧である」ことを仮定しよう。すなわち、２人のプレイヤーはそれまでに一度でも表向けられたカードの数字をすべて記憶しているものとする。すると、単純な戦略として次の策が考えられる。

2-戦略：手番のプレイヤーはまず今まで表向けられたことのないカード（以後「未知のカード」と呼ぶことにする）を１枚表向きにする。このとき、そのカードと同じ数字のカードが既に表向けられたことがあれば（以後「既知のカード」と呼ぶ）それを２

枚目に再度表向きにして取る。もし同じ数字のカードが既知のカードでなければ、未知のカードをもう１枚表向きにする。

この戦略は、とりあえず未知のカードを１枚表向きにし、もしその数字が初めて出たものであれば新たに未知のカードを表にして偶然に賭けるという意味であり、実際のゲームでも多く用いられていると思われる。ところが、この戦略が必ずしも最善とは限らないことが次の例で言える。

例１：$N = 4$（$1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4$ のカードを使用）で、P_1 が最初に 1,2 を開けたとする。次に P_2 がまず未知のカードを開けたところ 1 であり、そこで既知の 1 を開けて取り、続いて P_2 が 3 を開けた局面を考える $(*)$。ここで P_2 がさらに未知のカードを開け、それが 4 である（この確率は 2/4）ならば P_1 が 2,3,4 のカードをすべて取って P_1 の勝ちになってしまう。また、それが 2 である（この確率は 1/4）ならば、P_1 は自分の手番ですぐ 2 を取ることができる。そこで、$(*)$ の場面で P_2 はリスクを避け、敢えて既知の 2 を開け（パスをする）、P_1 に手番を渡すという戦略が考えられる。このとき、リードされている P_1 は 2-戦略を採るのが最善となる。簡単な計算により $(*)$ の局面で P_2 について

- 未知のカードを開けると勝つ確率が 1/4、引き分けの確率が 1/12、負ける確率が 2/3
- パスをすると勝つ確率が 1/2、負ける確率が 1/2

であり、パスが有効であるとわかる。

この例のようなパスを用いる戦略を、以下の２通りに分類する。

<u>1-戦略</u>：手番のプレイヤーはまず未知のカードを１枚表向きにする。このとき、そのカードと同じ数字のカードが既知のカードであればそれを２枚目に再度表向きにして取る。もし同じ数字のカードが既知のカードでなければ、別の既知のカードを１枚表向きにし、相手に手番を渡す。

<u>0-戦略</u>：手番のプレイヤーは既知のカードを２枚表向きにし、相手に手番を渡す。

すなわち、1-戦略と 0-戦略では、プレイヤーはカードが取れないと知りつつわざと既知のカードを表向きにし、相手に手番を渡す代わりに余計な情報を与えないようにする。ルールの (d) は、両者ともに 0-戦略を取った場合の勝敗判定法を与えている。簡単な帰結として、「それまでに取ったカードの枚数が少ないプレイヤーは 0-戦略を選択できない」ことが言えるため、両者 0-戦略を取って (d) が適用されるのは引き分けの場合のみとわかる。本研究では 2-戦略、1-戦略、0-戦略の３つについてのみ考察する。これ以外の戦略については第４節で述べる。

Zwick-Paterson[3] において、各状態における「手番側が取るカード枚数」−「相手が取るカード枚数」の期待値が最大となるような戦略が考察されている。戦略の選択は残りカード枚数および既知のカード枚数によって定まる。[3] の主結果は以下の通りである。

定理A（Zwick-Paterson）$1, 1, 2, 2, \ldots, n, n$ の $2n$ 枚のカードが場にあり、そのうち $1, 2, \ldots, k$（$0 \leq k \leq n-1$）が１枚ずつ既知である局面を考える。
(i) $k \geq \frac{2(n+1)}{3}$ かつ $n+k$ が奇数であるとき、0-戦略が最善である。
(ii) $k \geq 1$ かつ $n+k$ が偶数であるとき、あるいは $(n, k) = (6, 1)$ であるとき、1-戦略が最善である。
(iii) 上記 (i)(ii) 以外の場合は、2-戦略が最善である。

定理B（Zwick-Paterson）定理Aと同じ局面で「手番側が取るカード枚数」−「相手が取るカード枚数」の期待値を $E(n, k)$ とするとき、$N \to \infty$ において
(i) N が奇数のとき、$E(N, 0) = \frac{1}{2N+1} + O(N^{-3})$。
(ii) N が偶数のとき、$E(N, 0) = -\frac{1}{2N-1} + O(N^{-3})$。

注意：初期局面からの優劣や期待値を述べるときは特にカード枚数を $2N$ 枚と大文字で表記している。すなわち、$E(N, 0)$ はゲームの初期状態から「先手が取るカード枚数」−「後手が取るカード枚数」の期待値を表している。

すなわち、手番側が取るべき戦略は $n+k$ の偶奇に強く依存し、また初期状態での先手後手の優劣は N の偶奇に依存して決まることがわかっている。

本研究では、ゲームに勝つときの取得ポイントを 1、引き分けのときの取得ポイントを 1/2 とし、取得ポイントの期待値を最大とする戦略について考察する。[3] の場合と異なり、この戦略選択は「残り

カード枚数、既知のカード枚数」に加えて「その時点までに互いの取ったカード枚数」にも依存する。そこで、定理Aの仮定同様に場の残り枚数が $2n$ 枚、そのうち $1, 2, \ldots, k$ の k 枚が既知のカードであり、さらにそれまでに取った手番側と相手のカード枚数の差が $2s$ 枚である（$s > 0$ なら手番側の取った枚数のほうが多い）としたときの選択すべき戦略を $S(n, k, s)$ と書くことにする[1]。例えば $S(3, 1, 1) = 1$ である（これは例１の場合に該当する）。S は n, k, s の値により複雑な挙動を示す。例として、$n = 4, 5$ の場合を表に示す。

表１　$n = 4$ のときの戦略選択

$k\backslash s$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	2	2	2	2	2	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	2	2	2	2	0	0	0	2	2

表２　$n = 5$ のときの戦略選択

$k\backslash s$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	2	2	2	2	2	0	0	0	0	2	2

この表からもわかるように、0,1,2-戦略の選択には n, k の偶奇性が関係していると予想される。ただし、$s \geq 0$ であると部分的に 0-戦略が現れ、選択を複雑にしている。

また、上記の状況での手番側の取得ポイントの期待値を $f(n, k, s)$ で表すことにする。例えば $f(2, 0, 0) = 1/3$, $f(2, 1, 0) = 2/3$ である。各手番で未知のカード枚数は非増加であるため、f の値は n が小さく k が大きい場合から順次定まっていくことにも注意しておく。定義から $f(n, k, s)$ は s について単調非減少であり、$s < -n$ ならば $f(n, k, s) = 0$、$s > n$ ならば $f(n, k, s) = 1$、また $f(n, n, s) = 1$（$s > -n$）などもわかる。この $f(n, k, s)$ についても、例として $n = 4, 5$ の場合を表に示す。こちらも n, k, s について複雑な挙動を示し、例えば $f(4, k, 1)$ は k に関して単調非減少であるが $f(4, k, 0)$ はそうではない。

表３　$n = 4$ のときの $f(n, k, s)$ の値

$k\backslash s$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
0	$\frac{29}{210}$	$\frac{29}{105}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{43}{105}$	$\frac{52}{105}$	$\frac{61}{105}$	$\frac{22}{35}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{13}{15}$
1	$\frac{29}{210}$	$\frac{29}{105}$	$\frac{13}{35}$	$\frac{44}{105}$	$\frac{53}{105}$	$\frac{62}{105}$	$\frac{23}{35}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{13}{15}$
2	$\frac{7}{45}$	$\frac{14}{45}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{19}{45}$	$\frac{23}{45}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{13}{15}$
3	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{17}{20}$

表４　$n = 5$ のときの $f(n, k, s)$ の値

$k\backslash s$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0	$\frac{41}{378}$	$\frac{41}{189}$	$\frac{268}{945}$	$\frac{319}{945}$	$\frac{26}{63}$	$\frac{157}{315}$	$\frac{110}{189}$	$\frac{89}{135}$	$\frac{673}{945}$	$\frac{109}{135}$	$\frac{122}{135}$
1	$\frac{41}{378}$	$\frac{41}{189}$	$\frac{268}{945}$	$\frac{319}{945}$	$\frac{26}{63}$	$\frac{157}{315}$	$\frac{110}{189}$	$\frac{89}{135}$	$\frac{673}{945}$	$\frac{109}{135}$	$\frac{122}{135}$
2	$\frac{13}{120}$	$\frac{13}{60}$	$\frac{43}{140}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{89}{210}$	$\frac{43}{84}$	$\frac{251}{420}$	$\frac{47}{70}$	$\frac{76}{105}$	$\frac{83}{105}$	$\frac{94}{105}$
3	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{38}{105}$	$\frac{13}{35}$	$\frac{47}{105}$	$\frac{19}{35}$	$\frac{22}{35}$	$\frac{73}{105}$	$\frac{79}{105}$	$\frac{17}{21}$	$\frac{19}{21}$
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{13}{15}$

本論文では、特に k が大きい（$k \geq n-2$）場合についての最善の戦略を決定し、$f(n, k, s)$ の値を求めている（命題３〜４、第２節）。また、他の場合における戦略選択についての予想を述べ（第３節）、最後に 0,1,2-戦略以外の戦略の可能性について述べる（第４節）。

2. 戦略の選択と決定

プレイヤーが 0,1,2-戦略を決定するにあたり、いくつかの重要な関係式について述べる。まず、手番側のプレイヤーが 0,1,2-戦略を取るときのポイントの期待値は、カードを選ぶ確率からそれぞれ以下のように表される。

$$
\begin{aligned}
f_0(n,k,s) &= 1 - f(n,k,-s), \\
f_1(n,k,s) &= \frac{k}{2n-k} f(n-1,k-1,s+1) \\
&\quad + \frac{2n-2k}{2n-k}(1 - f(n,k+1,-s)), \\
f_2(n,k,s) &= \frac{k}{2n-k} f(n-1,k-1,s+1) \\
&\quad + \frac{2n-2k}{2n-k} g(n,k,s),
\end{aligned}
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
g(n,k,s) = \ & \frac{1}{2n-k-1} f(n-1,k,s+1) \\
& + \frac{k}{2n-k-1}(1 - f(n-1,k,-s+1)) \\
& + \frac{2n-2k-2}{2n-k-1}(1 - f(n,k+2,-s)).
\end{aligned}
$$

[1] 複数の戦略が該当する場合は、$0 > 1 > 2$ 戦略の順に優先することとする

ここで、以下のことを注意しておく。

- 上の関係式では、どちらのプレイヤーももし確実に取れるカードがあればすぐ取るものとしている。(#)
- プレーヤーが 0-戦略を取るためには $k \geq 2$ が、1-戦略を取るためには $k \geq 1$ が必要である。
- $s < 0$ のとき 0-戦略は無効である。

プレーヤーの取るべき戦略は
$f_j(n,k,s) = \max\{f_0(n,k,s), f_1(n,k,s), f_2(n,k,s)\}$
をみたす j を選ぶことによって決定される。特に、1-戦略と 2-戦略の比較は $(1 - f(n,k+1,-s))$ と $g(n,k,s)$ の大小によって決まる。

簡単にわかる事実を２つ挙げる。

命題１ $k \geq 2$ のとき

$$f(n,k,s) + f(n,k,-s) \geq 1.$$

特に $k \geq 2, s \geq 0$ のとき $f(n,k,s) \geq 1/2$。

証明：$k \geq 2$ であるので 0-戦略が実行可能であり、

$$\begin{aligned} f(n,k,s) &\geq f_0(n,k,s) \\ &= 1 - f(n,k,-s). \end{aligned}$$

この式で $s = 0$ を代入すると $f(n,k,0) \geq 1/2$ が得られる。

命題２ $f(N,0,0) \to 1/2$ $(N \to \infty)$ である。

証明：命題１より、まず $f(N,0,0)$ の上からの評価について

$$\begin{aligned} & f(N,0,0) \\ = & \frac{1}{2N-1} f(N-1,0,1) + \frac{2N-2}{2N-1}(1 - f(N,2,0)) \\ \leq & \frac{1}{2N-1} \times 1 + \frac{2N-2}{2N-1} \times \frac{1}{2} \\ = & \frac{N}{2N-1} \to \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$f(N,0,0)$ の下からの評価については、初期局面からプレイヤー P_1, P_2 の手番がそれぞれ終了し再び P_1 の手番となった時点では、必ず場の２枚以上のカードが既知のカードとなっていることに注意して命題１を用いればよい。すなわち、P_1, P_2 ともにカードを取れず再び P_1 の手番となる確率が少なくとも $\frac{2N-2}{2N-1} \times \frac{2N-4}{2N-2} \times \frac{2N-4}{2N-3}$ あることから、

$$f(N,0,0) \geq \frac{(2N-4)^2}{(2N-1)(2N-3)} \times \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$$

と示すことができる。

命題２から、十分カード枚数が多ければこのゲームは公平に近いものであると言える。ただし、1/2 との大小比較については簡単ではない。参考のため、N が小さいときの $f(N,0,0)$ の値を表にまとめておく。

表５　$f(N,0,0)$ の値

N	$f(N,0,0)$	N	$f(N,0,0)$
1	1	2	$\frac{1}{3} = 0.33333$
3	$\frac{7}{15} = 0.46667$	4	$\frac{52}{105} = 0.49524$
5	$\frac{157}{315} = 0.49841$	6	$\frac{5204}{10395} = 0.50063$
7	$\frac{68213}{135135} = 0.50478$	8	$\frac{1008109}{2027025} = 0.49733$
9	$\frac{2473873}{4922775} = 0.50254$	10	$\frac{108523004}{218243025} = 0.49726$
11	$\frac{6887974417}{13749310575} = 0.50097$	12	$\frac{623319392}{1249937325} = 0.49868$
13	$\frac{233016759307}{465050210625} = 0.50106$	14	$\frac{20956965052}{41994500625} = 0.49904$
15	$\frac{3101779782505321}{6190283353629375} = 0.50107$	16	$\frac{3302075578682662}{6617199446983125} = 0.49901$

この表から、以下のように予想する。

予想１ $2N$ 枚のカードによる神経衰弱では、N が十分大きいとき、N が偶数ならば後手有利、N が奇数ならば先手有利である。

この予想は第１節で紹介した定理Ｂと同様である。現時点で未だ数学的証明を得ていないが、近い将来示せるものと考えている。

3. 既知のカードが多い場合

解析が比較的容易な場合として、k が n に近いときを考えよう。第１節でも述べたように、$k = n$ のときは、手番側は 2-戦略によってすべてのカードを取ることができるので $f(n,n,s) = 1$（$s > -n$）である。次に $k = n - 1$ の場合を考える。このとき、1-戦略が無効であることは明らかである。前節で述べた通り、$s < 0$ ならば 2-戦略を用いるよりない。結局、$s \geq 0$ の場合に 0-戦略を用いるべきかどうかのみが問題となるが、以下のことがわかる。

命題３ $n \geq 3$ とする。$0 \leq s \leq n-2$ ならば $S(n, n-1, s) = 0$、$-n \leq s \leq -1$ または $s = n-1, n$ では $S(n, n-1, s) = 2$ である。このとき、

$$f(n,n-1,s) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & (s=-n), \\ \dfrac{2}{n+1} & (s=-n+1,-n+2), \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{s}{n+1}+\dfrac{s(s-3)}{2n(n+1)} & (-n+3 \leq s < 0), \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{s}{n+1}+\dfrac{s(s+3)}{2n(n+1)} & (0 \leq s \leq n-3), \\ \dfrac{n-1}{n+1} & (s=n-2), \\ \dfrac{n^2-n+2}{n(n+1)} & (s=n-1), \\ \dfrac{n^2+1}{n(n+1)} & (s=n). \end{cases}$$

この命題は、まず $s < 0$ の場合の期待値は 2-戦略を繰り返し用いて計算され、$s \geq 0$ の場合は 0-戦略を用いたときの $1 - f(n, n-1, -s)$ の値と 2-戦略を用いたときの値を比較することで示される。この命題において、２つの重要な点を指摘しておく。まず、$s \geq 0$ ならばプレイヤーはパスをして相手により不利な勝負をさせるよう仕向けるのが良いが、$s = n, n-1$ という「あと２枚取れば勝ち」という状況に立っている場合は自ら２枚を取りに行くことで勝つ確率を高めることができる。２つめに、f の値を見ると $s \sim 0$ で $f(n, n-1, s)$ は s についてのほぼ一次関数とみなせ、特に $f(n, n-1, 0) \to 1/2$ $(n \to \infty)$ である。しかし、続いて $k = n-2$ の場合を考えると大きな違いが現れる。

命題４ $n \geq 3$ とする。

(i) すべての $-n \leq s \leq n$ について $S(n, n-2, s) = 1$ である。

(ii) n が偶数のとき

$$f(n, n-2, 0) = \frac{17n^4 + 6n^3 - 8n^2 - 48n}{24(n-1)n(n+1)(n+2)},$$

n が奇数のとき

$$f(n, n-2, 0) = \frac{17n^4 + 6n^3 - 8n^2 - 54n + 39}{24(n-1)n(n+1)(n+2)}.$$

(iii) $-1 \leq \alpha < 0$ であるとき、$n \to \infty$ で

$$f(n, n-2, \alpha n) \to \frac{17}{24} + \frac{6\alpha}{5} - \frac{3\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^4}{24},$$

$0 \leq \alpha \leq 1$ であるとき、$n \to \infty$ で

$$f(n, n-2, \alpha n) \to \frac{17}{24} + \frac{6\alpha}{5} - \frac{3\alpha^2}{4} - \frac{7\alpha^3}{6} - \frac{7\alpha^4}{24}.$$

この命題の証明は、まず 1-戦略を繰り返し用いた場合の $f(n, n-2, s)$ の期待値を計算し、0-または 2-戦略ではこの値を超えられないことを示して得られる。なお、命題では $s \neq 0$ のときは $f(n, n-2, s)$ の n に関する漸近挙動のみを示しているが、実際には (ii) 同様に具体的な表示を求めることができる（ただし n, s の偶奇、s の正負による場合分けが必要で煩雑なためここでは書くことを省略している）。

この命題で特に重要な点は、$n \to \infty$ で $f(n, n-2, 0) \to 17/24$ と $1/2$ を大きく超えた値に収束することである。$f(n, n-2, \alpha n) \to 1/2$ となるのは $\alpha = -0.1575\ldots$ のときであり、これは既知のカードが $n-2$ 枚ある局面では手番を握ることが（多少のカード枚数の不利よりも）重要であることを示している。これは以下のように説明される。$k = n-1$ の局面では、$s \geq 0$ であるときのほとんどで 0-戦略を用いる。つまり、パスをして相手に手番を渡すことになるので、どちらの手番であるかはあまり重要でない（結局負けているほうが未知のカードを開けさせられる）。従って、$k = n-2$ の局面では「1 枚開けて外れのカードであっても、そこで手番を渡せばダメージを受けない」ことになる。すなわち、$k = n-2$ のときは「外れが出るまで 1-戦略を採り続ける」ことが可能となる。n が十分大きければ外れが出る確率は低いため、ここで大きくカード枚数を稼ぐことができ、勝つ確率が高くなる。

以上のように、$k = n-1$ は「手番の価値が低い」、$k = n-2$ は「手番の価値が高い」と言える。すると、$k = n-3$ では手番側は 1-戦略よりも 2-戦略を選ぶべきと言える：なぜなら、1-戦略では相手にわざわざ「手番の価値が高い位置」で手番を渡すことになるからである。$k = n-4$ では逆に、2-戦略を採ると相手に $k = n-2$ で手番を渡す可能性が生じるため 1-戦略を採用することになる。こうした繰り返しにより、$n-k$ の偶奇（$n+k$ の偶奇と同じ）によって戦略の選択が変わるものと考えられる。ただしやはり s の値も関係する（特に 2-戦略と 0-戦略の選択）ため、一筋縄では証明できない。参考として、$n = 15, 16$ のときの戦略の選択を Appendix に示しておく。

4. 特殊な戦略

前節までに、0,1,2-戦略の選択について考察した。これら３つ以外の戦略が考えられないかどうかについて述べる。なお、[3] においてもまず 0,1,2-戦略のみが考察され、他の戦略については文末の注釈という形で Gerez[4] を引用して言及している。

例２：ゲームの途中で $1,1,2,2,3,3$ の６枚が残り、1 のカードが１枚既知であるとし、ここまでの２人のプレイヤー P_1, P_2 の取ったカード枚数は同じであるとする。ここで P_1 が未知のカードを開けたところ 1 であった (**)。ここで既知の 1 を開けて取ると、P_1 の取得ポイントの期待値は $f(2,0,1) = 1/3$ である。ところが、(**) の局面で既知の 1 を敢えて開けずわざと別の未知のカードを開けて手番を P_2 に渡すと、P_2 は既知の２枚の 1 を取ることができるが、結局このときの P_1 の取得ポイントの期待値は $1 - f(2,1,1) = 1/3$ と変わらない。

この例は、「カードが取れる状況でもわざと取らない」という戦略が一概に否定できないことを示している。ただし、これはカードの残り枚数が少ないために起こった特殊な状況とも考えられる。そこで、新しい戦略を以下のように定義する。

x-戦略：自分の手番のときに未知のカードを１枚開け、それが既知のカードの１つと一致したときに敢えて別の既知のカードを開ける。

y-戦略：自分の手番のときに未知のカードを１枚開け、それが既知のカードの１つと一致したときに敢えて別の未知のカードを開ける。

前節まででは、1-戦略および 2-戦略では既知のカードと一致したら取ることを前提としていた（第２節の仮定 (#)）。また、「カードを取れる状況」がもう一つあることに注意し、次の戦略も定義する。

i-戦略：自分の手番において既知のカードの中に同種のカードが２枚あるとき、敢えて同種のカードを取らないで別のカードを開ける。

こちらも、前節まででではまず同種のカードを取ることを前提としていた。こうした x,y,i-戦略は一見不自然であり、ほとんど実効はないと思われる。

予想２ x,y,i-戦略が真に有効である局面は存在しない。

ここで、「真に」と言う意味は「x,y,i-戦略を用いると、用いないときに比べて取得ポイントの期待値が正値増加する」ことを意味している。上で述べた例２は「y-戦略を用いても期待値は（変わらないが）増加していない」ので、この予想とは矛盾していない。

この予想に関する部分的結果を述べる。場の残りカードが $1,1,2,2,\ldots,n,n$ の $2n$ 枚とする。そのうち既知のカードが $1,1,2,2,\ldots,p,p,p{+}1,p{+}2,\ldots,p{+}k$、すなわち既知のカードで同種のものが p 種、残りの既知のカードが k 枚であるとする。それまでに取った自分と相手のカード枚数の差は $2s$ 枚であるとし、このときの手番側の取得ポイントの期待値を $f^{(p)}(n,k,s)$ で表すことにする。$p = 0$ ならば今まで同様に $f(n,k,s)$ で表す。

命題５

(i) x-戦略は、$(p,k) = (0,2)$ または $(1,1)$ でなければ真に有効とはならない[2]。

(ii) y-戦略は、$(p,k) = (0,2)$ または $(1,1)$ でなければ真に有効とはならない。

(iii) $p \geq 3$ のとき、$f^{(p)}(n,k,s) = f^{(p-1)}(n-1,k,s+1)$ である。

証明：(i) の $p = 0$ の場合について示す。$k \geq 3$ とする。プレイヤー P_1 が１枚目に開けた未知のカードの数字が既知のカードの１つと一致したとき、P_1 がそのカードを取り、引き続いて 0-戦略を用いるとすれば P_1 から見た期待値は $1 - f(n-1,k-1,-s-1)$ となる。これに対し、P_1 が x-戦略を採るとすれば、P_2 がすぐそのカードを取ることができるので P_1 からみた期待値は $1 - f(n-1,k-1,-s+1)$ 以下となる。$f(n-1,k-1,-s-1) \leq f(n-1,k-1,-s+1)$ であるから、この場合に x-戦略は真に有効とはならない。(i) の $p > 0$ のとき、また (ii)、(iii) についても、単に x,y,i-戦略を用いた場合と、取れるカードを取った後で対応する戦略を用いた場合とを比較すれば示すことができる。

簡単に言うと、$k = 0$ になるとパス戦略が使えないので、手番を渡して相手にカードを与えてもパス戦略を使う権利は保持していたい、というのが x,y,i-戦略の意図である。従って、元の状態で $k \geq 3$ や $p \geq 3$ のように既知のカードが十分あればわざわ

[2]「$(p,k) = (0,2)$ または $(1,1)$ のときは真に有効である」と言っているわけではない。(ii) も同様である。

ざパス戦略を使う権利の心配はしなくてよい、ということを命題５は示している。前の予想ではもう一歩踏み込んで「どのような局面でも x, y, i-戦略は考えなくてよい」ことまで述べているが、この証明には $f(n, k, s)$ の値についてのある程度の情報が必要と思われる。ただし、0-戦略を許さないゲーム（各手番で少なくとも１枚は未知のカードを開けなければならない）では x-戦略が真に有効な場合が存在することが [4] において示されており、必ずしも上記の予想が明らかに成り立つものとは言えない。

5. まとめと今後の課題

この論文では、プレイヤーの記憶力が完璧である場合の「神経衰弱」に関してパス戦略が有効であることを示し、既知のカード枚数が多い場合についてポイントの期待値を具体的に計算した。今後の課題としては、まず 0,1,2-戦略だけを考えれば十分であること（予想２）を数学的に証明し、0,1,2-戦略からどの戦略を選択すればよいかをすべての局面について決定し、カード枚数が多いときの先手後手の優劣を決定する（予想１）ことである。

また、ルール設定を変更したゲームにも興味がある。例えば引き分けの場合の取得ポイントを 1/3 をする、あるいは予め同点の場合は先手（または後手）勝ちとして「引き分けを避ける」設定も考えられる。さらに、実際のゲームと関連付ければ、プレイヤーの記憶が不完全である場合についても同様の問題が考えられる。

参考文献

[1] I.N.Stewart, Concentration: A Winning Strategy, *Mathematical Recreations section of Scientific American*, October 1991.

[2] 篠田正人、神経衰弱の確率、「大学への数学」2008 年 7 月号.

[3] U.Zwick and M.S.Paterson, The memory game, *Theoretical Computer Science* 110, 169-196 (1993).

[4] S.H.Gerez, An analysis of the ”Memory” game (in Dutch), 65-afternoon project report, Department of Electrical Engineering, University of Twente, Holland, June 1983.

Appendix

表６　$n = 15$ のときの戦略選択

$k \backslash s$	-15	$-14 \sim -1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
14	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2

表７　$n = 16$ のときの戦略選択

$k \backslash s$	-16	$-15 \sim -1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
15	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2