# 将棋における実現可能局面数について

篠田　正人
奈良女子大学理学部

将棋のゲームとしての複雑さを測る指標として、「指し始めの局面から実現可能である局面数」を提案する。本稿ではこの局面数が $10^{60}$ 以上 $10^{70}$ 未満であることを証明しその数え上げの方法の概略を述べることで、局面数がおおよそ $10^{68} \sim 10^{69}$ 程度と推測できることを説明する。

# The number of the legal positions in Shogi

Masato SHINODA
Nara Women's University

We study the number of the legal positions in Shogi to characterize its complexity as a game. We give an estimate that the number is at least $10^{60}$ and not more than $10^{70}$. In this report we show the outline of a proof, and give a suggestion that the number is about $10^{68} \sim 10^{69}$.

## 1. 概要

将棋や囲碁のゲームとしての複雑さを測る指標として、そのパターン数の概算値がしばしば用いられる。将棋においては、一局の平均手数が約 115 手、各局面での可能な指し手の数が約 80 通りであることから $80^{115}$、すなわち $10^{220}$ 程度のパターンがある、と説明されている。しかしこの考え方では、例えば初手から「▲７六歩△３四歩▲２六歩△５四歩」と「▲２六歩△５四歩▲７六歩△３四歩」という局面を区別しない、すなわちそこまでの手順前後や迂回を考慮しないことになる。将棋においてはこういった「途中からの同一局面への合流」が非常に多いため、本報告では初形から実現可能である局面の数の概算値を求め、新たな指標として提案する。ここで言う初形から実現可能である局面とは指し始めの図から将棋のルールに基づいて現れ得る局面であり、「盤上の駒配置・持駒・手番」のいずれか１つでも異なれば別局面とみなす。ただし、局面を「盤上の駒配置・持駒・手番すべて先後逆にしたもの」は同一とみなす（よってすべての局面を先手番として考えてよい）。また、盤の左右を反転させただけの局面については別のものとみなす。主結果は以下の通りである。

**主結果** 将棋の実現可能局面数は $10^{60}$ 以上 $10^{70}$ 未満である。

将棋の実現可能局面数 $= L$ と表記することにする。$10^{60} \leq L < 10^{70}$ という上下からの評価は改良の余地があり、$L$ はおおよそ $10^{68} \sim 10^{69}$ 程度ではないかと推測しているが、本報告は実現可能局面数という新たな指標の提案が主目的であるため、精密な評価については深入りしていない。以下、第 2 節で $L$ の上からの評価、第 3 節で下からの評価についての証明を述べ、第 4 節で精密な評価を得るためのアイデアについて簡単に説明する。

## 2. 上からの評価

まず、$L$ を上から評価する方針について述べる。最初に簡単な評価法で $L < 10^{100}$ であることを示

そう。40 枚の駒をすべて区別し（例えば 2 枚の角も別のものとして扱う）、それぞれを盤上のいずれかの枡または駒台に置き、先手後手および成不成の場合の数を数えると、

$$L < (81+1)^{40} \times 2^{38} \times 2^{34} < 1.7 \times 10^{98}$$

という評価式が得られる。この評価において、無駄なものを算入している要素を以下に挙げる。

- A 同一局面を 2 度以上数えている（同種の駒を区別しているため）
- B 同じ枡に複数の駒がある
- C 行きところのない駒がある
- D 二歩である
- E 双方の玉が隣接している
- F （先手番なのに）後手玉に王手がかかっている
- G 先手玉に実現不可能な王手がかかっている
- H その他の理由で初形から進み得ない配置となっている

以上のうち、ABCDEF について部分的に考慮した方法を述べる。まず、双方の玉が同じ筋にある場合を数える。盤上の同じ筋に双方の玉と双方の歩があるパターンのうち ABCDEF の条件をクリアしているものは 9 筋 ×1620 通りである。残りの 8 つの筋のうち、歩が 2 枚ある筋が $x$ 筋、歩が 1 枚ある筋が $y$ 筋あるものとする。このとき残りの駒（歩は残り $16-2x-y$ 枚）について、盤上に飛（竜）、角（馬）、金、銀（成銀）、桂（成桂）、香（成香）、と金がそれぞれ $a$、$b$、$c$、$d$、$e$、$f$、$p$ 枚あるものとすると、これらを飛から順に空き枡に置き（条件 C,F,G,H については考慮しない）、残りはどちらかの持ち駒とすればその配置数は

$$\begin{aligned}
&9 \times 1620 \times B(9,x)B(9-x,y)57^x 16^y \\
&\times B(79-2x-y,a)4^a(3-a) \\
&\times B(79-2x-y-a,b)4^b(3-b) \\
&\times B(79-2x-y-a-b,c)2^c(5-c) \\
&\times B(79-2x-y-a-b-c,d)4^d(5-d) \\
&\times B(79-2x-y-a-b-c-d,e)4^e(5-e) \\
&\times B(79-2x-y-a-b-c-d-e,f)4^f(5-f) \\
&\times B(79-2x-y-a-b-c-d-e-f,p) \\
&\times 2^p(17-2x-y-p)
\end{aligned}$$

となる。ここでの $B$ は二項係数である。また、57（16）は 1 つの筋に 2 枚（1 枚）の歩を配置する場合の数であり、$79-2x-y$ は玉、歩を盤上に配置した後の盤上の空き枡の数、$4^a$ は盤上の飛の先手後手／成不成の区別、$3-a$ は持駒の配分の場合の数である。これらを $a,b,c,d,e,f,p$ について和を取ることで、「玉同筋・歩 2 枚」の場合の数の評価が得られる。こうした場合の数の評価を双方の玉が同じ筋にある場合、異なる筋にある場合それぞれについて求める。なお、双方の玉が異なる筋にある場合は、双方の玉が隣接するパターンも除外して数えると、総計は $1.0813 \times 10^{70}$ 通りで上から評価される。

ここで、上記の方法でまだ無駄に数えているものを確認すると

- C' 行きところのない駒がある（香または桂）
- F' （先手番なのに）後手玉に歩以外での王手がかかっている
- G 先手玉に実現不可能な王手がかかっている
- H その他の理由で初形から進み得ない配置となっている

である。そこで、さらに F' の条件について部分的に考察する。ここまでの $1.0813 \times 10^{70}$ 通りのうち、

> 後手玉の前の枡（△５七玉型であれば５八の枡）から先手の飛、竜、馬、金、銀、成銀、成桂、香、成香、と金で王手がかかっている

ものを排除する。これは、最初の玉と歩配置パターンのうち後手玉の前の枡が空いているものを選び、その後の飛〜と金の配置においてこの枡に該当する駒がある場合の数、として数えることができる。この結果、

$$L < 1.0813 \times 10^{70} - 1.669 \times 10^{69} = 9.14 \times 10^{69}$$

という上からの評価が得られる。

上からの評価のさらなる精密化のためには、特に C' および F' の条件（後手玉に正面以外から王手がかかっている）をチェックする必要がある。ここで、盤面にある駒が（玉を含めて）37 枚以下であるものは $3 \times 10^{68}$ 通り未満であることが簡単に示せるため、当面はほとんどすべての駒が盤上にあるものと考えることにする。C' の条件については、盤面

にある（成っていない）桂はおよそ 2/9、香はおよそ 1/9 の確率で行きところがないため、半数以上の局面で C' の条件にひっかかるものと思われる。また F' の条件については、後手玉に真正面以外からの王手が掛かっているものも半数以上あると思われる。これに加えて G の条件、例えば先手玉に 2 枚の金で同時に王手が掛かっているようなもの考慮に入れると、$9.14 \times 10^{69}$ 通りのうちすべての条件をクリアするものは 1 割程度ではないかと推測される。より正確な $L$ の値を知るためには、ここまでで述べた局面作成アルゴリズムによって局面をランダムに発生させ、それらのうちどの程度が本当に実現可能局面であるかを判定してその割合を見積もる、といった手段が考えられる。この方法の実行については第 4 節で改めて述べる。

## 3. 下からの評価

下からの評価に関しては、具体的に実現可能局面である条件を述べ、その条件を満たすものの数を数える。

| | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | h | h | h | h | h | h | h | A | 玉 | 一 |
| | h | | | | | | | と | B | 二 |
| | h | | | | | | k | | h | 三 |
| ▽ | h | | | | | k | | | h | 四 |
| | h | | | | k | | | | h | 五 |
| ▲ | h | | | k | | | | | h | 六 |
| | h | | k | | | | | | h | 七 |
| | D | と | | | | | | | h | 八 |
| | 玉 | C | h | h | h | h | h | h | h | 九 |

上図のように、

- 先手玉は１一、後手玉は９九に置く。先手２二と、後手８八とを置く。
- 残りの 36 枚の駒は、１一、１二、２一、２二、８八、８九、９八、８九以外の 73 枡のいずれかまたは駒台に置く。ただし、行きところのない駒はないようにする。
- 盤面 h の枡には飛または竜は置かない。
- 盤面 k の枡には角または馬は置かない。

**補題** 上記条件を満たす局面はすべて実現可能局面である。

実際、上記条件を満たす局面は次のように実現することができる。

1 初形から盤面の駒を先手１一玉、後手９九玉のみとし、持ち駒を調整する。
2 先手２二と、後手８八とを発生させる。
3 残りの盤上の駒のうち、成駒を作って配置する。
4 成っていない駒を盤上に打つ。先手後手の手数調整は▲２一と▲２二と、または△８九と△８八との往復で行う。

の順で行えばよい。この補題により、あとは条件を満たす局面数を数えればよいことになる。ここで、上記補題は先手の２二とが２一または１二、後手の８八とが８九または９八、また全体を左右反転させても同様に成り立つことを考えると、上図の条件を満たす局面数を $3 \times 3 \times 2$ 倍した下からの評価が得られることになる。

まず、歩の配置を考える。3〜7 筋のうち歩を 2 枚置く筋が $x$ 筋、歩を 1 枚だけ置く筋が $y$ 筋あり、1,2,8,9 筋のうち歩を 2 枚置く筋が $z$ 筋、歩を 1 枚だけ置く筋が $u$ 筋あるとすると、二歩禁を考慮すればこれらの組み合わせは

$$B(5,x)B(5-x,y)57^x16^yB(4,z)B(4-z,u)36^z13^u$$

通りある。ここで、36（13）は１三〜１九の枡に歩を 2 枚（1 枚）置く場合の数である。残りの飛（竜）、角（馬）、金、銀（成銀）、桂（成桂）、香（成香）、と金をこの順に盤上または駒台に順に置き、その先手後手および成不成を定めることにする。まず 1 枚目の飛の盤上の位置は、盤上 h の位置を除いても少なくとも $47-K$ ヶ所（$K = 2x+y+2z+u$）あることがわかる。このようにして、飛（竜）、角（馬）、金、銀（成銀）、桂（成桂）、香（成香）、と金を盤上にそれぞれ $a$、$b$、$c$、$d$、$e$、$f$、$p$ 枚配置し残りは持駒とすると、この場合の数は

$$\begin{aligned}
&B(47-K,a)4^a(3-a)\\
&\times B(68-K-a,b)4^b(3-b)\\
&\times B(73-K-a-b,c)2^c(5-c)\\
&\times B(73-K-a-b-c,d)4^d(5-d)\\
&\times B(73-K-a-b-c-d,e)3^e(5-e)\\
&\times B(73-K-a-b-c-d-e,f)3^f(5-f)\\
&\times B(73-K-a-b-c-d-e-f,p)\\
&\times 2^p(17-K-p)
\end{aligned}$$

通り考えられる。$3^e$ は桂を盤上に置くときどの枡であっても先手後手／成不成の区別が少なくとも 3 通

りはあることによる。これらの積を $a, b, c, d, e, f, p$ について和を取ることで、

$$L > 4.65 \times 10^{62}$$

という下からの評価が得られる。

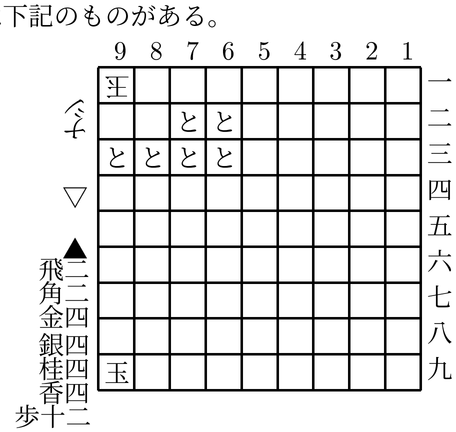
以上の評価では、なるべく簡明に $L \geq 10^{60}$ を示すことを目的としたため最善の評価とは言い難い。例えば、2二の駒をと金から金に変えることで何通りかの場合を新たに作ることができる。ただし、具体的に実現可能な局面を構成していく方針では到底よい評価にはたどり着けず、たとえ玉位置も変えていくなどとしてもせいぜい $L > 10^{66}$ 程度が限界ではないかと思われる。

## 4. より正確な評価に向けて

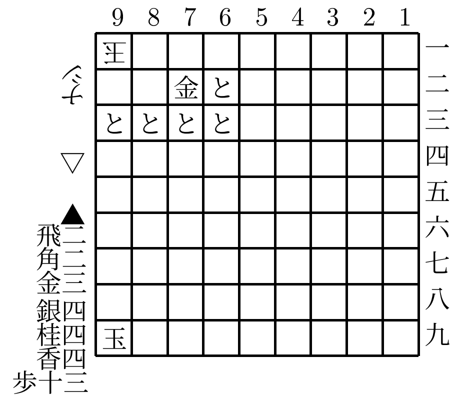
最終目標である $L$ のよい評価（例えば、有効数字1桁目の確定）のためには、第2節の最後で述べたような確率的判断が必要ではないかと考える。そのためには、まず（実現可能かどうかわからない）局面をランダムに発生させるアルゴリズムと、ある提示された局面が「実現可能かどうか」を判定するアルゴリズムが必要となる。

前者については、特にA・B以外の細かい条件を指定せず、例えば駒を玉から歩までを盤上にランダムにおいていき、もし玉が隣接したり二歩が発生したらその時点でキャンセルする、としたほうが、多少無駄が生じるにしてもわかりやすくなるものと思われる。

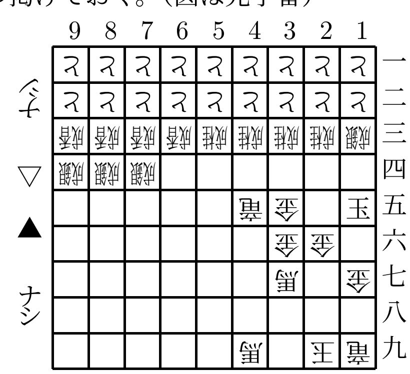
後者については、問題になるのは「実現可能かどうかの判定が微妙」な局面である。最初に述べた条件のうち「H：その他の理由で初形から進み得ない配置となっている」についてここまで説明しなかったが、A〜G に該当せず H に該当する局面の例には下記のものがある。



上の局面（先手番）で後手玉に王手がかかっているわけではないが、この直前の指し手が存在しないことから実現不可能局面であることが言える。しかし似たような局面であっても、次の局面（先手番）は実現可能局面である。



この局面は▲7二金（打）△9一玉としたものとみなせる。もちろん、この節の最初に述べた「有効数字1桁の確定」程度の目標であれば、こうした「実現可能かどうか疑わしい局面」はすべて捨ててもそれほど影響はないものと思われるが、この2つの図の違いを正確に自動判定するようなアルゴリズムの構成も一つの興味として考えられる。参考のため、一見で実現可能とはわかりにくい局面の例をもう一つ掲げておく。（図は先手番）



## 5. まとめ

本稿では $4.65 \times 10^{62} < L < 9.14 \times 10^{69}$ という評価を得た。今後の課題として考えられることは

- $L$ のより正確な評価または推測値を得る
- 他のゲーム（囲碁等）における局面数の推測
- ある局面が実現可能であるかどうかを判定するアルゴリズムの考案

などがある。