ペンシルパズルにおける確定定理の自動獲得

†是川　空 ††白井　裕己 †††柴原　一友 †††小谷　善行

人間がペンシルパズルを解く際には候補値による解探索よりも,問題の制約を元にした確定的な解法が用いられている.このような確定定理と呼ばれる解法について,ペンシルパズルの問題から自動的に解法に用いられる変数の範囲とその構造を獲得する手法を提案する.本手法ではペンシルパズルの解答を入力として,局面から確定定理に必要な変数以外を逐次的に消去する.着目する解答箇所に対して確定定理を適用することができる必要十分条件を満たしている局面を確定定理の事例データとして取り出す.収集した事例データを同じパターンを持つもの同士をまとめあげることで確定定理として用いることができるようにする.この手法を用いてナンバープレイス問題の確定定理について事例データを収集し,事例データをまとめ上げることで既知の確定定理と同様のパターンが存在することを示した.

The Automatic Extraction of Resolutional Rules from Pencilpuzzle

Takashi KOREKAWA Hiroki SHIRAI Kazutomo SHIBAHARA Yoshiyuki KOTANI

When human solves the Pencilpuzzle, he uses determinate method by restriction of problem rather than solution search by candidate value. For such a method that is called resolutional rules, we proposed algorithms that get ranges of variable to which refers and their structure automatically from Pencilpuzzle's problems. The solutions of Pencilpuzzle input to our algorithms. The algorithms delete an unnecessary variable to resolutional rules from state one after another. Then check states are able to be applied resolutional rules about a target part of solution by solution search. The variable of the remainder is taken out as case data of resolutional rules. The collected case data can be used as resolutional rules by bringing up the one with the same pattern mutually. By using their algorithms, the case data of resolutional rules of the NumberPlace problems was collected, and it was shown that the pattern similar to already-known resolutional rules existed in bringing the case data together and raising it.

１.はじめに

ペンシルパズルの解法の研究において,変数の推論による確定的な解答の決定方法である確定定理を用いることで解探索を効率化する方法が示されている[2].この探索の効率化は人間のペンシルパズルの解答過程における思考方法を模倣するものであり,人間の思考方法を考える指標になりうる.確定定理は問題の状態を表す変数の一部を参照することである未確定の変数を確定することができる定理である[1].しかし既知の確定定理では解答を決定できないペンシルパズルの局面も存在している.

このような確定定理を用いることが出来ない局面では解探索による解法が用いられるが,本研究では,確定定理のみを用いてペンシルパズルの解を得る方法を実現するため,ナンバープレイスの問題から未知の確定定理を自動獲得し問題に適用する手法を考える.

本研究ではペンシルパズルの一種であるナンバープレイス問題を対象に問題から確定定理の要素となる,参照すべき変数とその構造を取り出す手法を提案する.この手法はナンバープレイスの問題の局面から確定定理の事例パターンを取り出すフェイズと,取り出された事例パターンを一般化するフェイズに分かれている.

２.ペンシルパズル

ペンシルパズルとは紙などに図示できる有限で確定性のあるパズルの種類である.代表的なものとしてナンバープレイス,お絵かきロジック,スリザーリンクなどが挙げられる.ペンシルパズルは問題のルールと,問題の形,問題のヒントなどから構成される.世間一般に存在するペンシルパズルの問題は成立する解状態が一つしかないように調整して構成されている.

ペンシルパズルの解を得る方法として部分問題の解答を候補値から仮定して制約に矛盾しない解状態を探す解法が存在している[3].解探索においてペンシルパズルの確定的な推論を用いた改良手法が存在している.

†東京農工大学大学院 工学府 電子情報工学専攻
Department of Electronic and Information Engineering, Graduate school of Technology, Tokyo University of Agriculture and Technology
††東京農工大学大学院 工学府 情報工学専攻
Department of Computer and Information Sciences, Graduate school of Technology, Tokyo University of Agriculture and Technology
†††東京農工大学大学院 工学府
Department of Computer and Information Sciences, Tokyo University of Agriculture and Technology

３.ナンバープレイス

ナンバープレイスは９×９の正方形によるマスで構成されており,それがさらに９つの３×３マスのブロックに分割されている形をもっている.

ナンバープレイスの解状態では全ての行,列,ブロックにおいて１～９の数字が一つずつ入るという制約がある.この制約を満たすような変数の組み合わせを探す問題である.

４.確定定理

確定定理[1]とはペンシルパズルのある局面において,その変数の一部を取り出し推論を行うことで,ある未確定の変数一つの状態が一通りに定まることを示す定理である.確定定理はペンシルパズルを構成する問題の制約と状態を表す変数を元に,参照する変数の範囲とその変数が満たすべき論理式によって示すことができる.

問題の種類によって確定定理を構成する変数の範囲や論理式の形状は異なり,また問題の種類ごとに複数の確定定理が存在する.

確定定理を用いた解法は人間の思考過程に近いものとなる.人間の探索できる範囲には限界があり,計算機による探索の解法とは大きく異なる思考過程を取る.

５.確定定理の自動獲得

主な確定定理は人間が問題を解き進めていく際に用いられるヒューリスティックな解法を元に作られている.しかし複数の確定定理をもってしても,確定可能な箇所が存在しないような未解決局面が存在する.このような局面では通常,仮定による探索を行って問題を解決するが,本研究ではこの未解決局面を解決する未知の確定定理が存在するとし,この問題を解決する確定定理を自動で導き出すことを考える.

この確定定理の自動獲得は問題から確定定理が適用される局面を事例パターンとして収集し,収集された事例パターンのうち制約の論理式が同じになるようなものをまとめあげることで行われる.

６.ナンバープレイス問題からの事例獲得

ナンバープレイス問題の局面を使用し,あるマスに入りうる数値が一通りであることを示している局面を取り出し,確定定理の事例として獲得する方法を考える.

局面の変数を参照しマスの数値が一通りであることを示すには,その局面において着目する解答箇所にある数字を仮定して探索を行ったときに解が一つ以上存在し,その数字以外の数字を仮定して探索を行った場合に解が一つも存在しないことを示せばよい.このような局面では局面中に表出する数字のうちの一部が着目する解答箇所に入りうる解答候補を制限していると考えられる.単に局面を取り出した場合,表出する変数の中には着目する解答箇所の制約に関係しない物も含まれている.局面から表出数字を削り,残った数字だけで確定定理が成り立つかどうかを調べることで,最小の表出数字を得ることにする.

図１は２×２の枠で構成されるペンシルパズルの局面の木構造のイメージの一部を示したものである.図中の左上太枠を着目する解答箇所として,Ａの解局面から着目する解答箇所の解答を消去した局面Ｂを作る.実線で示した経路を上方向に辿り他の解答箇所の解答を消去した局面Ｃ,Ｄ,Ｅがあるとする.このＣ,Ｄ,Ｅの局面から解探索を行うとそれらの局面は破線の経路でつながった局面を子局面に持つ.Ｃ,Ｄは着目する解答箇所に〇を書き込んだ場合は解状態をその葉に持ち,別解の×を書き込んだ場合は解が成立しない.一方Ｅは着目する解答箇所に×を書き込んだ場合でも探索の結果別解が成立したとする.これは局面Ｃ,Ｄでは確定定理によって着目する解答箇所の解を一通りに示すことができ,一方局面Ｅは他の解答箇所を確定するまで確定定理を適用することができない局面であることを表している.

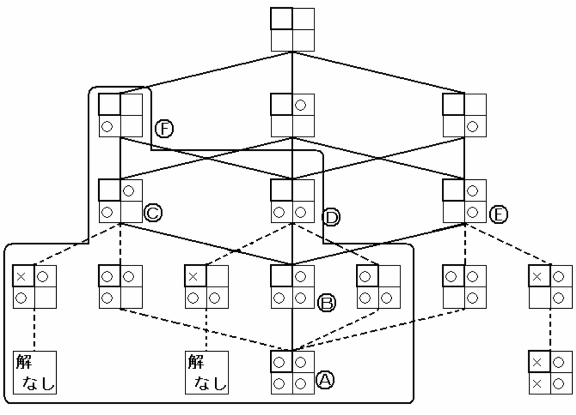

図１　局面の木構造と確定定理の事例

さらに実線を上に辿り局面から解答の削除を行った場合,局面Ｆは着目する解答箇所に対して確定定理が適用可能であり,これ以上解答の消去を行うと別解を持ってしまう局面であることがわかる.以上よりこの問題からは局面Ｆの持つ変数の状態とその構造が太枠の解答箇所の確定定理の事例として示すことができる.

こうして獲得した局面を元に,表出している数字とその制約の構造を問題の確定定理の事例として扱う.確定定理の収集のためにこれらの

事例を自動的に獲得する方法を考える.

ナンバープレイスの解局面から逐次的に数字を削除し,削除したあとの各局面が正答以外の別解を持つ局面であるかどうかを解探索によってチェックし,事例として取り出すアルゴリズムを図２に示す.

```
state=input(solution);        //解局面の入力
 point p=select_position(); //局面中のある一箇所に着目
delete(p);                   //着目した箇所の解答を消す
while(消去不可のマスだけになるまで){
      point c=rand();         //ランダムで一箇所選ぶ
      delete(c);              //選ばれた箇所の解答を消す
      for(x=着目箇所の正答以外の解答候補,cnt=0){
            set(p,x);         //着目箇所に正答以外を代入
            if(search(state)>0){        //探索を行う
                  set(c,answer[c]);     //解が一つ以上存在した場合
            }                           //最後に消去した箇所に
      }                                 //数字を再び入れる
}
output(state);               //得られた事例を出力
```

図２　事例獲得の擬似コード

このアルゴリズムではナンバープレイスの解局面を入力し,そのうちの一箇所を着目する解答箇所として,それ以外の解答箇所の数字を逐次的に削除した局面を作る.作られた各局面で,着目する解答箇所に正答以外の数字が入った場合の局面を仮定し,その先の解探索を行う.いくつかの解答箇所の数字が削除されていることでその局面は本来の解局面とは別の解答を持つ場合がある.着目する解答箇所に誤答を書き込んだ局面から別解が見付かった場合,その局面では着目した解答箇所の解答を一通りに絞り込むことができず確定定理が適用不可能である.このような場合,最後に削除した解答を元に戻す.逐次的に解答の消去を繰り返し,これ以上数字を消去すると着目する解答箇所が別解を持ってしまう場合にアルゴリズムは終了し,その局面を確定定理の事例として出力する.

解答の消去順や着目する解答箇所をランダムに設定し複数回繰り返すことで一つの問題から多くの確定定理の事例を取り出すことができる.さらに複数の問題を入力として用いることでさらに多くの確定定理の事例を獲得する.

７.事例パターンのまとめ上げ

この章では６章で獲得した大量の確定定理の事例データを抽象化し,同じパターンを持つもの同士をまとめ上げることで問題の他の局面にも応用できる形にする.

続いてペンシルパズルの問題ごとの制約をこの変数による CNF によって表現し,ペンシルパズルの問題を SAT 問題として記述する[5].CNF によって問題を記述したときに制約式の各節に含まれる変数を問題の制約グループとする.

ここまでをナンバープレイスを具体例にあげて説明する.ナンバープレイスには複数のマスが存在しており,それらの中には１～９の数字が解答候補として存在している.９×９の各マスに「マス(X,Y)には数字 Z が入る」という意味を持つ変数を割り当てると全部で 729 個の変数が存在することになる.ナンバープレイスの制約はこの 729 個の変数を各行,列,ブロックとマスに対しての制約によって CNF で示すことができる.ナンバープレイスの制約は,各行,各列,各ブロックでは,それぞれ数字ごとに「このグループ内のその数字に対応する変数の内いずれか一つだけ真である」という制約と,各マスにおいて「このマスに対応する変数のうちいずれか一つだけ真である」という制約によって成り立っている.ナンバープレイス問題ではこの行,列,ブロックとマスの制約式で同じ節に含まれる変数同士を制約グループとして扱う.ナンバープレイス問題の特徴としてこれらの制約は行,列,ブロック,マスの全てが同じ構造をしている.

このようにして得られた変数を同じ制約グループに含まれている変数同士を枝で結んだグラフ構造に置き換える.ナンバープレイスにおいては,一つの変数はそれぞれ一つの行,列,ブロックとマスに所属しており,それらの変数同士を枝で結ぶことになる.

このグラフを着目する解答箇所の正答である変数を始点として,枝を辿ってどのような経路でその変数までたどり着くのかという情報だけに抽象化する.

ナンバープレイスのグラフは行,列,マスを接続し立方体にブロックの制約による枝を追加した４次元の方向を持つグラフとして表現できる.着目する変数を始点とし行,列,ブロックとマスのどの方向に移動するとその変数にたどり着けるかの経路をそれぞれの方向に対応したベクトルとして表現する.

各方向への移動を順序付けし,行方向への移動を V_1～V_9,列方向への移動を H_1～H_9,ブロック方向への移動を B_1～B_9,マス方向への移動を C_1～C_9 と再ラベルする.これをベクトルとして表現し,同じ行のあるマスの同じ数字に対応する変数への移動は（V_1,0,0,0）,同じ列にある違う数字に対応する変数への移動は（0, H_1,0, C_1）ように表すことができる.（0, H_1,0, C_1）と（0, H_1,0, C_2）は始点と同じ列にある同じマスの違う数字に対応する変数を表している.

変数の再ラベル化は一定の規則によって再ラベル化が行われれば問題ない.ここでは後にま

とめ上げを行うことを考慮し,各座標や数字を出現頻度が多いものから順に順序付けを行う.この再ラベル化によって行や列の座標の違いなどをまとめ上げ同じパターンとして表現することができる.

さらにナンバープレイス問題では各行,列とマスはそれぞれ同じ制約の構造をしているため,それぞれを置き換えても制約の構造は変化しないと考えられる.そこで一定の規則（こちらもここでは出現頻度を用いる）によって V,H,C のベクトルを X,Y,Z に再ラベルする.この再ラベル化によって行,列,マスの違いを無視して同じパターンにまとめ上げることができる.

８.実験

ペンシルパズルの問題より事例を獲得し,得られた事例パターンをまとめ上げることで既知のペンシルパズルの確定定理と同じパターンを見つける.同じ確定定理が適用されていると思しきいくつかの事例が同じパターンにまとめ上げられていることを確認する.

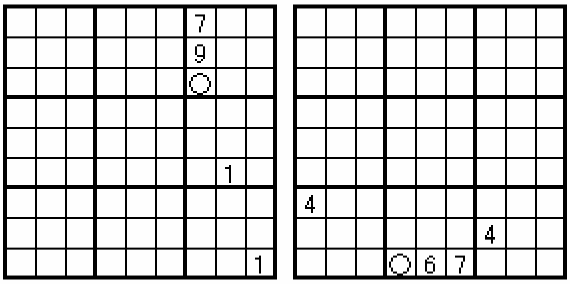

図３　獲得された事例データ

ナンバープレイスの問題から確定定理の事例を獲得し,その中からいくつかの事例を取り出した（図３）.図３左は着目する変数が(7,3)が１であるという変数 S_{731} であり,そのほかに S_{861},S_{991},S_{717},S_{729} が真である局面である.同様に図３右は着目する変数が S_{494} で,他に S_{174},S_{784},S_{596},S_{697} が真である.この二つをまずベクトルの形へと再ラベルする.図３左は始点(0,0,0,0)に対して４つの変数が$(0,H_1,B_1,0)$, $(0,H_2,B_1,0)$, $(0,H_3,0,C_1)$, $(0,H_4,0,C_2)$であり,図３右は始点(0,0,0,0)に対して,$(V_1,0,B_1,0)$, $(V_2,0,B_1,0)$, $(V_3,0,0,C_1)$, $(V_4,0,0,C_2)$の４つの変数で表すことができる.この二つを更に再ラベルするとどちらも,$(X_1,0,0,B_1)$,$(X_2,0,0,B_1)$,$(X_3,Y_1,0,0)$,$(X_4,Y_2,0,0)$にまとめ上げることができる.この確定定理はブロックユニークと言う名前で知られている形の一つであり,着目している変数と同じブロック内にそこ以外の箇所にその変数と同じ数字が入らないことから成り立っている.

９.おわりに

ナンバープレイス問題の確定定理を自動的に獲得する方法として,問題からの事例の収集とパターンのまとめ上げの二つを組み合わせた手法を示した.この方法によって問題から多くの事例データを収集し,それらを元にパターンのまとめ上げの操作を行うことで,問題の確定定理を網羅することが可能である.

本研究で扱ったナンバープレイスのまとめ上げでは行,列,マスの制約グループが同じ式形状をしていることを利用したが,ブロックの制約グループは他の制約グループと形状が異なるため,ナンバープレイスから確定定理を獲得するためにはこの制約を捉えることがポイントとなってくる.

これらの手法は制約式の構造を把握すれば例にあげたナンバープレイス問題以外にも応用可能である.問題の制約グループを把握し再ラベルの方法を多く取り入れることで,一つの確定定理からより多くの状態に対応できるようになる.

この手法を用いて多くの事例を獲得していくことで,従来の方法では解探索を行う以外に解法が見つかっていなかったような局面でも確定定理を発見することが可能である.また今後の研究では得られた確定定理を論理的に証明するような方法を考える.

参考文献

[1] 是川　空, 五十嵐　力, 柴原　一友, 但馬　康宏, 小谷　善行: "ペンシルパズルにおける「解き筋」の概念の提案", Game Programming Workshop 2007 pp.99-106, 2007.

[2] 白井　裕己, 五十嵐　力, 但馬　康宏, 小谷　善行: "スリザーリンクの解答システムと問題作成システム", Game Programming Workshop 2006 pp.32-39, 2006.

[3] 松原　康夫: "数独の推論規則と難易度に関する考察", 情報処理学会研究報告 2006-EC-5 (1), pp.1-6, 2006

[4] Helmut Simonis: "Sudoku as a Constraint Problem", In CP Workshop on Modeling and Reformulating Constraint Satisfaction Problems, pp.13-28, 2005.

[5] Inês Lynce, Jöel Ouaknine: Sudoku as a SAT Problem, Proceedings of AIMATH 06, 2006.