# 囲碁の複合的攻合いの解析法

中 村 貞 吾[†]　二 井 洋 平[††]

組合せゲーム理論 (CGT) は，全体の局面が独立した部分局面の和に分解できるようなゲームの解析に大きな威力を発揮する．囲碁はそういった部分性の強いゲームであり，これまでに CGT を囲碁に適用した研究として，最終盤のヨセの手止りの解析，コウを含むヨセ局面の数理的評価，眼形の解析に加えて，最近では，攻合いの勝敗を数理的に解析する手法の研究が報告されている．攻合いとは「眼のない石同士が活きるために互いに相手の石 (対象ブロック) を取ろうとしている局面」であり，互いの対象ブロックの手数の大小によって攻合いの勝敗が決まる．我々は，対象ブロックの手数をスコアとする組合せゲームを考慮することによって，全体として連結した単一の対象ブロック同士の攻合いを部分局面に分割し，各部分局面の解析結果の和として全体の攻合いの勝敗をヨセと同様な計算によって判定する手法を提案している．

本論文は，その手法の適用範囲を拡張して，複数の対象ブロックが複雑に絡み合った攻合いの解析に CGT を適用する手法を示す．

# A Method for Analysing Complex Capturing Races of Go

Teigo Nakamura[†] and Youhei Nii

Applications of combinatorial game theory (CGT) to the game of Go have been focused on endgames and eyespace values so far. We proposed another application of CGT to Go, that is, to count liberties in capturing races a few years ago. Capturing race, or *semeai* is a particular kind of life and death problem in which two adjacent opposing groups are fighting to capture the opponent's group each other. Human expert players usually count liberties for each part of blocks involved in semeai and sum up them. A position of capturing races can also be decomposed into independent subpositions like the cases of endgames and eyespaces. We showed a method of analysing capturing races that have no shared liberty or have only simple shared liberties using combinatorial game values of external liberties and an evaluation formula to find out the outcome of the capturing races.

In this paper, we extend our methodology to be applied to multiple capturing races in which three or more groups are involved.

## 1. はじめに

組合せゲーム理論 (CGT) は，全体の局面が独立した部分局面の和に分解できるようなゲームの解析に大きな威力を発揮する．囲碁はそういった部分性の強いゲームであり，これまでに CGT を囲碁に適用した研究として，最終盤のヨセの手止りの解析[1)]，コウを含むヨセ局面の数理的評価[2)]，眼形の解析[3)] が行なわれてきたが，数年前より，我々は，囲碁に対する CGT の新たな適用分野として「攻合い」を取り上げ，その数理的な解析を行なっている[6)~9)]．

攻合いとは「眼のない石[☆]同士が活きるために互いに相手の石 (対象ブロック) を取ろうとしている局面」であり，互いの対象ブロックの手数の大小によって攻合いの勝敗が決まる．文献 6) では，対象ブロックの手数をスコアとする組合せゲームを考慮することによって，全体として連結した単一の対象ブロック同士の攻合いを部分局面に分割し，各部分局面の解析結果の和として全体の攻合いの勝敗を判定する手法が示されている．これにより，着手によって手数が 2 手以上増減するような複雑な攻合いがヨセと同様な計算によって解析できるようになった．

他方，囲碁の攻合いに関しては,「大ナカ小ナカ」などを含む 1 対 1 の攻合いの勝敗条件を示した Müller の研究[4)] や，複数の対象ブロックが関与する複合的な攻合いを静的に解析する手法を示した K.Nakamura

† 九州工業大学大学院 情報工学研究院 知能情報工学研究系
Department of Artificial Intelligence, Kyushu Institute of Technology
E-mail: teigo@ai.kyutech.ac.jp
URL: http://www.dumbo.ai.kyutech.ac.jp/~teigo/
†† トッパン・フォームズ株式会社
Toppan Forms Co., Ltd.

☆ 単独で 2 眼を作ることはできず，また，味方の活きている石に連絡することもできない状況を指す．

の研究[5] がある．しかし，これらはいずれも対象ブロックの手数が単純な数値で表わされる，すなわち，1 手ずつ単調にダメをつめていくような攻合いが対象であり，組合せゲーム的要素を含む攻合いは考慮されていなかった．

そこで，本論文では，文献 6) の手法の適用範囲を拡張して，複数の対象ブロックが複雑に絡み合った複合的攻合いの解析に CGT を適用することを試みる．

## 2. 囲碁の攻合い

### 2.1 用　　語

以下に，攻合いで用いられる基本的用語について説明する．

**対象ブロック:**　攻合いの対象となっている石群．相手方の対象ブロックを取ることが攻合いの目的である．対象ブロックに隣接している空点はダメと呼ばれる．

**安全ブロック:**　活きている，あるいは，安全であることが仮定されている石群．攻合いでは，対象ブロックを取り囲んでいる石群は一般に安全ブロックであるとみなされる．

**不明ブロック:**　対象ブロックでも安全ブロックでもないブロック．不明ブロックが取られても攻合いの勝敗には無関係である．

**ダメ領域:**　少なくとも 1 つの対象ブロックとその他の対象ブロックまたは安全ブロックによってよって囲まれる空点および不明ブロックを含む領域．境界となるブロックに両者の対象ブロックが含まれる場合を内ダメ領域，含まれない場合を外ダメ領域と呼ぶ．また，境界が一方の側の対象ブロックのみで構成される領域を眼形領域と呼ぶ．眼形領域はそのサイズに応じて分類され，サイズが 0, 1〜3, 4, 5, 6, 7 の 6 つのクラスがある．サイズが大きい眼形クラスの方に優位性がある．

**外ダメ:**　外ダメ領域にある対象ブロックのダメ．

**内ダメ:**　内ダメ領域にある対象ブロックのダメ．

**単純ダメ:**　対象ブロックのダメのうち，相手方の安全なブロックにのみ隣接しているダメ．すなわち，ダメを詰めるのに余分な手入れを必要とせず 1 手ずつ単調に確実にダメを詰めることができ，また，相手からの手を延ばす着手も存在しないようなダメを意味する．

**眼形ダメ:**　眼形領域内のダメ．ナカ手で取る場合には，眼形内部の攻め方の石が何度も打ち上げられるため，ダメ数以上の手数を必要とする[4]．その手数は，攻合いの勝敗の判定においては外ダメと同様の性質を持つ．

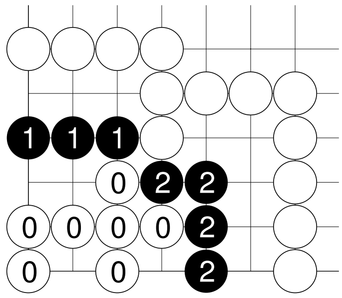


**図 1**　複合的攻合いの例

**攻撃側と防御側:**　外ダメ領域においては，対象ブロックの側のプレイヤが防御側プレイヤ，その相手方のプレイヤが攻撃側プレイヤとなる．内ダメ領域においては，両者の対象ブロックの眼形クラスに応じて攻撃側プレイヤと防御側プレイヤが決まる．

### 2.2 複合的攻合い

複合的攻合いとは，3 個以上の対象ブロックが攻合っている局面のことであり，図 1 にその例を示す．番号のついた石群が攻合いの対象ブロックである．また，外側を取り囲んでいる印のついていない石のブロックは安全ブロックであると仮定する．

### 2.3 関 連 研 究

このような複合的攻合いを静的に解析する手法を示した研究に K.Nakamura の研究[5] がある．K.Nakamura は，対象ブロックのダメ数が単純な数値で表わされるような攻合いに対して，ブロック間の関係を攻合いグラフと呼ばれるラベル付きグラフを用いて記述し，隣接するブロック間の部分的な勝敗関係をもとにして，全体の攻合いの勝敗を判定する手法を提案している．以下にその概要を説明する．

**【定義：攻合いグラフ】**

連結した石のブロックをノード (二重丸のノードは攻合いの対象ブロックを表わす) とし，ノード間のリンクは，異なる色の 2 つの石のブロックが接しているか，または，共通の空点領域に隣接していることを表わす．

ノードに付随する数値は，そのブロックの眼形ダメの数を表わし (安全ブロックであると仮定されるブロックの値は $\infty$ とする)，リンクに付随する数値は，ブロック間のダメの数を表わす．

図 3 は，通常の 1 対 1 の攻合いの場合の攻合いグラ

フである．この攻合いグラフで表わされる攻合いの勝敗は，$d_B, d_W, D, B, W$ の値に応じて 4 通りの場合に分類して決定される．文献 4) では，1 対 1 の攻合いの勝敗条件が図 2 に示す簡潔な式で表現されており，ここではその記法にならって説明する．

**【1 対 1 の攻合いの勝敗】**

(1)　$B = W = 0$ の場合 (双方 0 眼の場合)
以下の 2 つの場合をチェックする．

（a）　$\Delta = d_B - d_W$，$F = \max\{D-1, 0\}$ として $\Delta \geq F$ ならば「黒先黒攻合い勝ち」

（b）　$\Delta = d_W - d_B$，$F = \max\{D-1, 0\}$ として $\Delta \geq F$ ならば「白先白攻合い勝ち」

そして，(a) と (b) の両方が成立する場合は「先着側の攻合い勝ち」であり，(a) か (b) のいずれか一方のみが成立する場合は，(先着するか否かにかかわらず)「一方のプレイヤの攻合い勝ち」となり，(a) も (b) もいずれも成立しない場合は「セキ」となる．

(2)　$B > 0$，$W = 0$ の場合 (1 眼対 0 眼の場合)
これは「眼アリ眼ナシ」と呼ばれる攻合いの形で，眼の無い側 (眼形クラスの劣っている側) のみが攻撃側となる．したがって，次の 1 つの場合のみをチェックすれば良い．

（a）　$\Delta = d_W - (d_B + B)$，$F = D$ として $\Delta \geq F$ ならば「白先白攻合い勝ち」

そして，(a) の条件の等号が成り立たない場合は「白の攻合い勝ち」，(a) の条件の等号が成り立つ場合には「先着側の攻合い勝ち」，そして，(a) が成立しない場合には「黒の攻合い勝ち」となる．

(3)　$B > 0$，$W > 0$ かつ，眼形クラスが等しい場合
(1) と同様に以下の 2 つの場合をチェックする．

（a）　$\Delta = (d_B + B) - (d_W + W)$，$F = D$ として $\Delta \geq F$ ならば「黒先黒攻合い勝ち」

（b）　$\Delta = (d_W + W) - (d_B + B)$，$F = D$ として $\Delta \geq F$ ならば「白先白攻合い勝ち」

そして，(a) と (b) の両方が成立する場合は「先着側の攻合い勝ち」であり，(a) か (b) のいずれか一方のみが成立する場合は，(先着するか否かにかかわらず)「一方のプレイヤの攻合い勝ち」となり，(a) も (b) もいずれも成立しない場合は「セキ」となる．

(4)　$B > 0$，$W > 0$ かつ，黒の眼形クラスが優位な場合
これは「大ナカ小ナカ」と呼ばれる攻合いの形で，(2) の「眼アリ眼ナシ」の場合と同様の判定を行なうことができる．

**【Müller の攻合い判定式】**

$\Delta$　:　攻撃側から見た外ダメの数の優位性
(対象ブロックの外ダメの数の差)

$S$　:　内ダメの数

$$F = \begin{cases} S & (S = 0 \text{ または防御側に 1 眼}) \\ S - 1 & (S > 0 \text{ かつ防御側に眼がない}) \end{cases}$$

$\boxed{\Delta \geq F \text{ ならば攻撃側の攻合い勝ち}}$

**図 2**　Müller の攻合い判定式

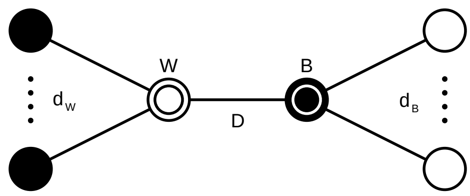


**図 3**　1 対 1 の攻合いの攻合いグラフ

（a）　$\Delta = d_W + W - (d_B + B)$，$F = D$ として $\Delta \geq F$ ならば「白先白攻合い勝ち」

そして，(a) の条件の等号が成り立たない場合は「白の攻合い勝ち」，(a) の条件の等号が成り立つ場合には「先着側の攻合い勝ち」，そして，(a) が成立しない場合には「黒の攻合い勝ち」となる．

### 2.4　複合的攻合いとその解析法

次に，1 対 2 の場合の複合的攻合いについて述べる．図 4 は，1 個の白の対象ブロックと 2 個の黒の対象ブロックが攻合っている攻合いグラフを表わしている．

文献 5) では，この全体の攻合いの勝敗が，部分的な攻合いの勝敗関係を用いて，図 5 の (1)〜(10) のパターンに分類して判定できるとしている☆．ここで，部分的な勝敗判定の際には，注目している対象ブロック以外のブロックは安全ブロックであると仮定する．

図 5 では，$X, Y$ はそれぞれ色の違う対象ブロックで，矢印の記号は次のことを意味している．

☆ 文献 5) では，(10) は (5) と同じカテゴリに分類されていて全体で 9 パターンであるが，実際には (5) と (10) の条件は違うのでここでは別の分類とした．

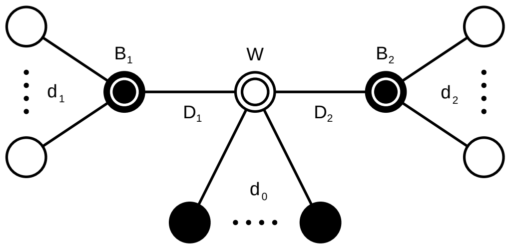


**図 4**　1 対 2 の攻合いの攻合いグラフ

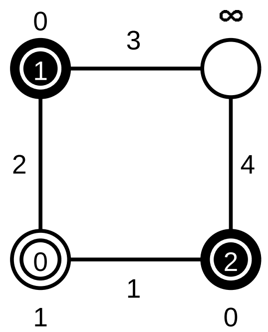


**図 6**　図 1 の攻合いの攻合いグラフ

**【1 対 2 の攻合いの勝敗関係】**

(1) $X1 \Longleftarrow Y \Longrightarrow X2$ :　Y の勝ち
(2) $X1 \Longrightarrow Y \Longleftarrow X2$ :　X の勝ち (例外あり)
(3) $X1 \Longrightarrow Y \Longrightarrow X2$ :　Y の勝ち
(4) $X1 \Longleftrightarrow Y \Longleftrightarrow X2$ :　Y の勝ち
(5) $X1 \Longleftrightarrow Y \Longrightarrow X2$ :　Y の勝ち
(6) $X1 \Longleftrightarrow Y \Longleftarrow X2$ :　Y の勝ち
(7) $X1 \longleftrightarrow Y \longleftrightarrow X2$ :　先着勝ち (例外あり)
(8) $X1 \longleftrightarrow Y \Longrightarrow X2$ :　Y の勝ち
(9) $X1 \longleftrightarrow Y \Longleftarrow X2$ :　先着勝ち
(10) $X1 \longleftrightarrow Y \Longleftrightarrow X2$ :　Y の勝ち

**図 5**　1 対 2 の攻合いの勝敗関係

$X \Longrightarrow Y$ :　X 先で X の攻合い勝ち，かつ Y 先でも Y は勝てない

$X \longleftrightarrow Y$ :　先着側の攻合い勝ち

$X \Longleftrightarrow Y$ :　セキ

例えば，図 1 の攻合いの攻合いグラフは図 6 のように表わされ，ノードおよびリンクの数値より，部分的な攻合いの勝敗関係は次のようになる．

(1)　$B_1$ と $W_0$ の部分的な攻合い
「1 対 1 の攻合いの勝敗」の (2) の場合に該当する．黒のみが攻撃側となり，

$$\Delta = 3 - (1+1) = 1$$
$$F = 2$$

であるので，$\Delta \ngeq F$ となり，攻撃側の黒は攻合いに勝てない．したがって，$B_1 \Longleftarrow W_0$ である．

(2)　$B_2$ と $W_0$ の部分的な攻合い
黒のみが攻撃側となり，

$$\Delta = 4 - (1+2) = 1$$
$$F = 1$$

であるので，$\Delta = F$ となり，先着側の勝ちとなる．したがって，$W_0 \longleftrightarrow B_2$ である．

以上より，この攻合いは

$$B_1 \Longleftarrow W_0 \longleftrightarrow B_2$$

となるが，これは，図 5 の (8) の場合に該当するので，この局面は「白の攻合い勝ち」と判定される．

### 2.5　問　題　点

文献 5) では，図 5 の (2) と (7) の場合について,「ほとんどの場合に成立するが例外がある」として，図 7 と図 8 の攻合いグラフが挙げられている (下は攻合いグラフに対応する攻合い局面の一例)．実際の結果は，図 7 の攻合いは「セキ」で，図 8 の攻合いは「黒先セキ，白先白攻合い勝ち」であるが，例外はこれだけにはとどまらない．

例えば，図 9 の攻合いグラフで示される局面も図 5 の (2) に分類されるが，実際にはこの攻合いの結果は「先着側の攻合い勝ち」である．

このように，例外パターンとして記述しきれない状況を網羅するためには，局所的な攻合いの結果を組み合わせて全体の勝敗判定を行なう際に起きるこの種の現象が何に起因するかをもう少し詳細に検討してやる必要がある．

本章で扱っている攻合いは，すべて対象ブロックのダメの数が単純な数値として記述できるもの☆のみであるが，それを着手による手数の増減が 1 手より大きい攻合い局面に拡張しようとする際にもこれと同様の現象が発生する．

☆ 言いかえると，着手によるダメの数の変化が 1 以下であるような攻合い．

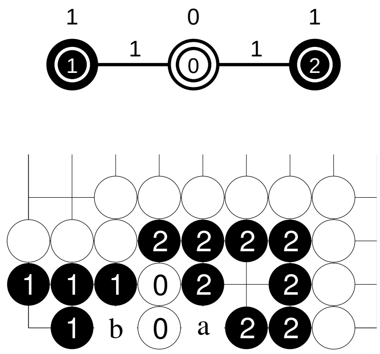

**図 7**　図 5 の (2) の例外

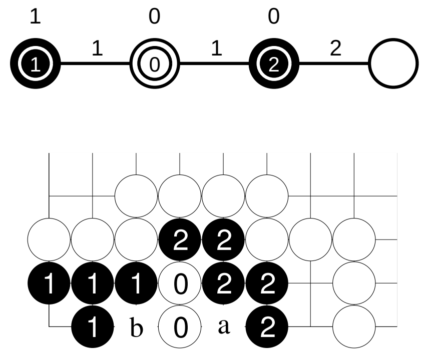

**図 9**　図 5 の (2) の別の例外

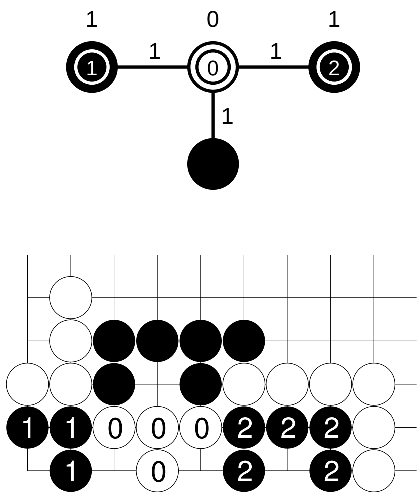

**図 8**　図 5 の (7) の例外

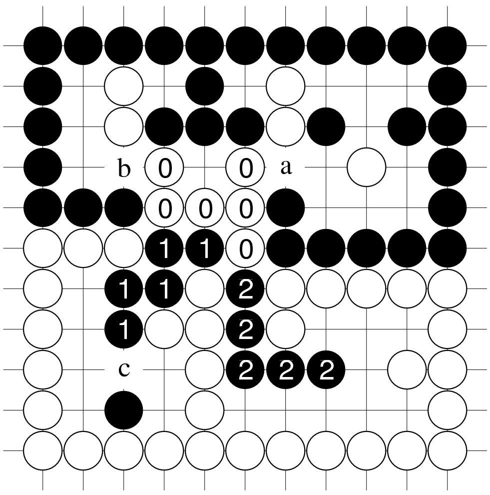

**図 10**　複合的攻合いの例 (2)

## 3. CGT を用いた複合的攻合いの解析

前節の関連研究で扱われていた対象ブロックの手数は，相手が 1 手ダメを埋めることによって 1 つずつ減少していくような単純な数であるが，ここでの手数の計算に CGT を用いた手法を適用して，着手によって手数が 2 手以上増減するような一般的な攻合いへとその適用範囲を拡張する．

図 10 は，着手によって手数が 2 手以上増減するような部分局面を含む 1 対 2 の複合的攻合いの例である．

この攻合いは，図 11(a)〜(d) の部分局面に分割することができ，それぞれの部分局面の値は表 1 のようになる．また，全体の攻合いグラフは図 12 のように表わされる．

ここで，$W_0$ と $B_1$ の間の攻合いにおいては，手数の合計の冷却値は

$$(4*)\ +\ (-2*)\ +\ (-2\uparrow)\ +\ (-1)\ =\ -1\uparrow$$

となる．$0 > -1\uparrow > -1$ であるので，この部分の攻合いは文献 6) によれば「先着側の勝ち」である．

一方，$W_0$ と $B_2$ の間の攻合いにおいては，手数の合計の冷却値は

$$5\ +\ (-2*)\ +\ (-2\uparrow)\ +\ (-1)\ =\ \uparrow *$$

となる．ここで，$\uparrow * <> 0$ であるので，この部分の攻合いの勝敗も「先着側の勝ち」である．したがって，全体の攻合いの勝敗関係は

$$B_1 \longleftrightarrow W_0 \longleftrightarrow B_2$$

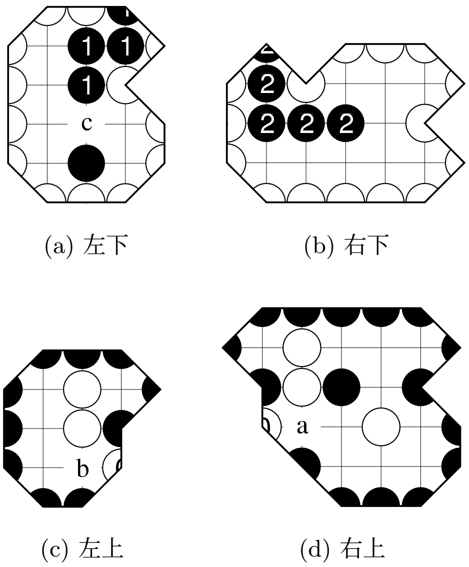


**図 11**　図 10 の複合的攻合いの部分局面

**表 1**　部分局面の値

| 部分局面 | CGT 値 | 冷却値 |
|---|---|---|
| 図 11(a)「左下」の局面 | $\{6 \mid 2\}$ | $4*$ |
| 図 11(b)「右下」の局面 | $5$ | $5$ |
| 図 11(c)「左上」の局面 | $\{0 \mid -4\}$ | $-2*$ |
| 図 11(d)「右上」の局面 | $\{0 \mid \{-2 \mid -6\}\}$ | $-2\uparrow$ |

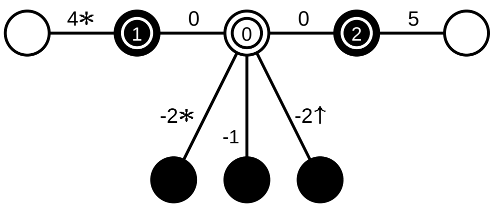


**図 12**　図 10 の攻合いの攻合いグラフ

となり，これは図 5 の (7) の場合 (先着側の勝) に該当するが，実際には，黒は先着してもこの攻合いに勝つことはできない．

なぜなら，$W_0$ と $B_1$ の間の攻合いでは，黒の正解手は $a$ (すなわち，$\uparrow$ に対する着手) であるが，$W_0$ と $B_2$ の間の攻合いでは，黒の正解手は $b$ (すなわち，$*$ に対する着手) であって，双方の部分的な攻合いにおける正解手が異なるため，黒はその両方を同時に満たす着手を行なうことができないからである．

これと同様のことは，前章の図 7〜図 9 に例外として上げられた攻合いにおいても成立する．例えば，図 7 において，$B_1 \Longrightarrow W_0$ の部分的攻合いの黒の勝ち手は a であるが，$W_0 \Longleftarrow B_2$ の部分的攻合いの黒の勝ち手は b であるので，黒は先着してもその両方を同時に満たすことはできない☆．また，図 9 においては，$B_1 \Longrightarrow W_0$ の部分的攻合いの黒の勝ち手は a で，$W_0 \Longleftarrow B_2$ の部分的攻合いの黒の勝ち手は a と b であるので，黒先では a に打てば黒が勝てる．一方，白が先着すると，全体の勝敗関係は

$$B_1 \Longrightarrow W_0 \longleftrightarrow B_2$$

となり，$W_0 \longleftrightarrow B_2$ の部分的攻合いの黒の勝ち手は b となるのでこの後，黒は勝てない☆☆．したがって，図 9 の複合的攻合い全体の勝敗関係は「先着側の勝ち」となるのである．

これらの例からわかるように，部分的攻合いの勝敗を利用した複合的攻合いの勝敗判定においては，部分的攻合いの勝ち負けの状態だけでなく，勝ち手がどこにあるかが全体の勝敗判定のための重要な情報となる．

そこで，以下のような手順で複合的攻合いの勝敗判定を行なうことを提案する．

**【部分的攻合いの結果を用いた勝敗判定法】**

(1)　解析対象となる複合的攻合い局面の攻合いグラフを作成する．(ただし，リンクの値 (ブロックの手数) は，次のステップで与える)

(2)　ノードとなる対象ブロックを文献 6) の手法を用いて部分局面に分割し，各部分局面内の手数の冷却値を基にして，リンクの値を計算する．

(3)　隣接する 2 つのノード間の部分的な攻合いの勝敗と勝ち手の集合を求める．

(4)　図 5 の分類にしたがって，全体の攻合いの勝敗判定を行なうが，このとき，2 つの部分的攻合いの勝ち手集合に共通要素があるかどうかをチェックし，一方のプレイヤのみが共通の勝ち手を持っている場合は，そのプレイヤの勝ちとし，両方が共通の勝ち手を持っている場合は先着勝ちと判定する．

☆ さらに，一方の部分的攻合いの勝ち手である a (および b) は，他方の攻合いの負け手 (自殺手) になっているので，結局，黒からは手出しできない．また，白からも手出しはできないので，結果は「セキ」となる．

☆☆ このことから，図 5 の (9) にも例外があることがわかる．

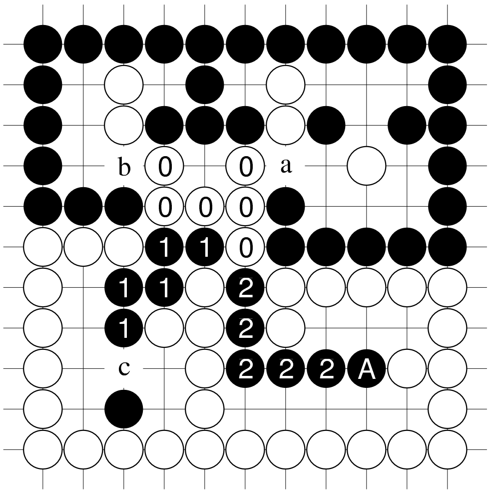


**図 13**　複合的攻合いの例 (3)

この判定法を図 13 の攻合いに適用してみる．図 13 は，図 10 の右下部分に黒 A の 1 子を追加して変更した複合的攻合いである．黒の 1 子の追加により，右下部分の黒の対象ブロックの手数は 6 手となっている．したがって，$W_0$ と $B_2$ の間の攻合いにおいては，手数の合計の冷却値は

$$6 + (-2*) + (-2\uparrow) + (-1) = 1\uparrow*$$

となる．ここで，$1\uparrow* <> 1$ であるので，この部分的攻合いの勝敗は図 10 の場合と同様に「先着側の勝ち」である．しかし，図 13 における $W_0$ と $B_2$ の部分的攻合いでは，黒 a に加えて黒 b も勝ち手に含まれる☆．すなわち，図 13 の攻合いは

$$B_1 \longleftrightarrow W_0 \longleftrightarrow B_2$$

であり，かつ，$B_1 \longleftrightarrow W_0$ に対する黒の勝ち手集合が $\{a\}$，$W_0 \longleftrightarrow B_2$ に対する黒の勝ち手集合が $\{a, b\}$ であり，黒 a が共通要素になっているので，この攻合いは「黒先黒勝ち」となる．もちろん，白先なら白攻合い勝ちであるので，最終的な勝敗は，図 5 の (7) にあるとおり「先着勝ち」となる．

## 4. おわりに

K.Nakamura が文献 5) に示している 1 対 2 の複合的攻合いの判定法を拡張して，着手によって手数が 2 手以上増減するような部分局面を含む 1 対 2 の複合的攻合いに対する判定法を与えた．ここでは，各々の部分的攻合いの勝敗に加えて，その勝ち手集合を考慮することにより，複数の対象ブロックを有する攻撃側が両方の部分的攻合いに同時に勝つことが可能かどうかをチェックしている．これにより，文献 5) では例外として扱われていたパターンも同じ枠組みの上で説明できるようになった．

今後の課題としては，4 個以上のブロックからなるより一般的な複合的攻合いへの適用，複雑な形状の内ダメ領域を持つ攻合い，コウを含む攻合いへの拡張などがあげられる．

☆ 黒 b，すなわち，$*$ への着手は，部分的には最善手ではない．黒 a なら黒が打てたダメツメの手止りを相手に譲ることになるので，黒 a に比べて 1 手損をすることになるが，それでも部分的な攻合いには勝てる．

## 参 考 文 献

1) Elwyn Berlekamp and David Wolfe: "Mathematical Go –Chilling Gets the Last Point–", A.K.Peters, (1994).
2) Elwyn Berlekamp: "The Economist's View of Combinatorial Games", *Games of No Chance*, Cambridge University Press, pp.365–405, (1996).
3) H. A. Landman: "Eyespace Values in Go", *Games of No Chance*, Cambridge University Press, pp.227–257, (1996).
4) Martin Müller: "Race to capture: Analyzing semeai in Go", Game Programming Workshop '99 (GPW '99), pp.61–68, (1999).
5) Katsuhiko Nakamura: "Static analysis based on formal models and incremental computation in Go programming", Theoretical Computer Science, Vol.349, pp.184–201, (2005).
6) 中村貞吾："囲碁の攻合の数理的解析 –組合せゲーム理論に基づく手数の評価法–", 情報処理学会論文誌, Vol.48, No.11, pp.3477–3489, (2007).
7) 中村貞吾："内ダメを含む囲碁の攻合いの数理的解析", ゲームプログラミングワークショップ, GPW03, pp.161–167, (2003).
8) 中村貞吾："コウを含む囲碁の攻合いの解析", ゲームプログラミングワークショップ, GPW04, pp.32–39, (2004).
9) 中村貞吾："囲碁の攻合いの数理的解析 –内ダメ領域内のコウ–", ゲームプログラミングワークショップ, GPW05, pp.68–75, (2005).