

Hexの必勝手順に対する新証明技法とその応用

三島 健, 櫻井 英俊, 野下 浩平

電気通信大学情報工学専攻

{mishim-k, sakura-h, noshita}@igo.cs.uec.ac.jp

概要

ゲーム Hex は、先手必勝手順の存在が証明されているが、具体的な必勝手順を示すことは長年の研究課題である。本稿では、石の連結性を定義するための新しい概念として、 σ 連結を提案し、それに基づいて、連結に
関与する領域を拡張するための新しい技法 σ 拡張を導入する。

この技法の応用として、従来の技法で記述するには複雑すぎるとされていた 8×8 盤面の初手 63 に対する必勝手順を示す。また、この技法の強力さを示す例として、 8×8 盤面の初手 54 に対する野下の必勝手順 (2005) を大幅に単純化する。同様に、 9×9 盤面に対する必勝手順を示すことができるが、本稿ではその証明木を示す (現在細部のチェック中)。

New Proof Techniques and Their Applications to Winning Strategies in Hex

Ken Mishima, Hidetoshi Sakurai and Kohei Noshita

Department of Computer Science, The University of Electro-Communications

Abstract

In the game of Hex, it has been proved existentially that the first player always wins. Constructing a winning strategy has been a long-standing research problem. We present a new notion named σ -connection which defines a certain type of connections between stones. Based on it, we introduce a new technique named σ -extension for extending the area of empty cells which supports a desired union-connection. We apply our new techniques to show a winning strategy for the 8×8 board with the first move at 63, whose proof has been regarded as intractable by previous techniques. For demonstrating the power of our techniques, we show a winning strategy for 8×8 (first at 54) which is a considerable simplification of Noshita's one (2005). Finally we present a proof-tree of our winning strategy for 9×9 (first at 55), though the details of the proof are now being checked.

1 はじめに

ゲーム Hex は、J.Nash により先手必勝手順の存在が証明されたが、具体的な手順 (構成的証明) を示すことは長年の研究課題である [4]。V.Anshelevich [1] は、仮想連結 (virtual connection) の概念を導入した。J.Yang [7] は、仮想連結による盤面分割の方法を用いて、 7×7 (初手 44) の必勝手順を示した。J.Yang は、ホームページで 8×8 以上の必勝手順を求めたとの記事を載せているが、公式に発表されておらず、詳しい内容は不明である。実際、 7×7 の場合でも証明木における探索が複雑になり正しさの検証が難しい。例えば、 7×7 の J.Yang の必勝手順 [7] は、2006 年になってコンピュータにより正しさが検証された [3]。R. Hayward 等 [2] は、仮想連結による盤面分割に基づくプログラムを作成し、 7×7 の初手 49 種類すべてに対して、いずれのプレイヤーが勝利するかを示した。しかし、盤の大きさが 8×8 以上になると、従来の方法では必勝手順を検証可能な程度に簡潔な形で扱うことができないとされてきた [2, 4]。

2004 年野下 [5, 6] は、ユニオン連結 (union-connection) の概念を導入して、これに基づき、 8×8 (初手 54) に対する完全な必勝手順を示した。この技法の強力さは、例えば、 7×7 (様々な初手) の必勝手順が (コンピュータを使わないで) 容易に検証できることをみてもわかる [6]。現在では、 8×8 や 9×9 に対する必勝手順が人手/コンピュータで扱える範囲に入ってきている。

本研究では、 σ 連結と σ 拡張の概念を提案する。 σ 連結は、 AB -property [6] を一般化した技法である。 AB -property の技法は、2つの領域が部分的に重複している場合、それらの領域を接続した領域に対して、ユニオン連結を適用できるようにするものである。しかし、それが適用できる領域の形が限定的であった。 σ 連結は、これを一般化して広範囲の領域に適用できるようにしたものである。 σ 連結は、領域における着手を限定したユニオン連結であり、領域内の後手の着手に対してそれぞれ先手の応手を指定したものと見える。 σ

拡張は、 σ 連結の外部の特定のセルに着手することにより、より大きいユニオン連結に拡張する技法である。これら新技法を用いることによって、探索が必要な盤面を大幅に減らすことができる。それにより、複雑すぎるとされていた盤面に対して完全な必勝手順を示すことに成功した。また過去に求められている必勝手順も大幅な簡略化が可能になった。本稿では、 8×8 (初手 63)、 8×8 (初手 54)、 9×9 (初手 55) の必勝手順をとりあげる。

2 Hex のルール

ゲーム Hex は、 $n \times n$ 個の正六角形のセルを菱形に敷き詰めた盤面を用いる。先手と後手がそれぞれ黒石と白石を交互に置いていき、先手は上辺と下辺を黒石で、後手は左辺と右辺を白石で連結したら勝利となる完全情報型のゲームである。Hex は引分けがない。図 1 は、黒が勝利している盤面である。本稿では左上から順に列と行にそれぞれ $1, 2, \dots, n$ と番号をふり、セルの位置を列と行の番号の対で指定する。

Hex は先手が圧倒的に有利である。従って、実際の対局では交替 (swap) ルールを採用している。これは、ゲーム開始時に一方のプレイヤーが先手番の石を置き、他方のプレイヤーは先手が後手かを選択できるというルールである。このルールのため、初手によっては先手が勝つとは限らない。それで、すべての初手に対する必勝手順は、理論的興味だけでなく、実際のゲームでも重要である。

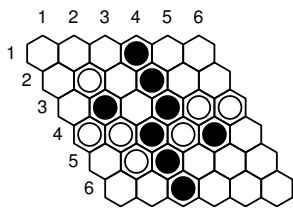


図 1: 黒の勝利盤面

3 基本概念

この節では、これまで提案されている基本的な概念をまとめる。

3.1 仮想連結

仮想連結は、盤を部分盤面に分割することで、離れた石を仮想的に連結しているとして扱う概念である [1]。

$S[ab]$ が仮想連結とする。ここで、 S は空セルの集合、 a と b は同色の石のあるセルである。仮想連結の定義として、着手を S のセルに限定するとして後手から着手を始めても先手の応手により a と b が連結する。以下、特に明記しない場合、連結とは黒の連結を表すことにする。また、黒石が置かれたセル x において、黒石が置かれていて x に直接連結しているセルの集合 (x を含む) を単に x と書くことにする。

本稿では、仮想連結 $S[ab]$ において、 S が図より明らかであるときは、 $a-b$ と書く。

図 2 は、代表的な仮想連結の例である。この例では、 S -lemma と呼ばれる $x-y$ および $t-z$ の連結と T -lemma と呼ばれる $u-b$ の連結が成り立っている [6]。ここで t は上辺、 b は下辺を表す。 $t-b$ の連結が存在する盤面は黒勝ちの盤面である。以下において、これら 3 つの仮想連結は特に断らずに使用する。

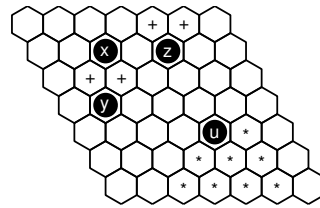


図 2: 仮想連結

3.2 ユニオン連結

2004 年に野下が提案したユニオン連結 [5, 6] は、仮想連結を一般化して、連結の論理和が扱えるようにした概念である。

$S[a_1b_1 | a_2b_2 | \dots | a_kb_k]$ をユニオン連結とする。ユニオン連結の定義として、 S に後手から着手を始めても先手の応手により、 a_i と b_i の連結が成り立つような i ($1 \leq i \leq k$) が存在する。 $k = 1$ の場合、ユニオン連結は仮想連結と一致する。

仮想連結と同様にユニオン連結も、 S が図より明らかであるときは、例えば $a-b | c-d$ のように書く。

図 3 は、ユニオン連結の例である。この例では、 $x-b | y-b$ が成り立つ。

ユニオン連結に対して、その正しさを証明することは、部分盤面 (S) において証明木 (solution tree ともいう) を示すことである。ここで、証明木は次のような証明木である。根は与えられた局面 (後手局面) である。後手局面では、与えられたあらゆる着手を枝としていて、それぞれ次の先手局面に至る。先手局面では、先手の正しい着手を示す枝が 1 つだけあり、それにより後手局面に至る。すべての葉はユニオン連結を実現する後手局面である。

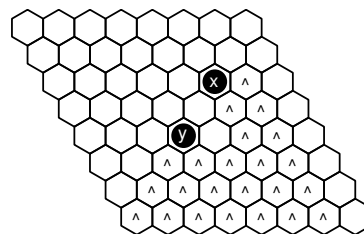


図 3: ユニオン連結

3.3 AB-property

AB -property [6] は、盤面の解析を簡略化するために、ユニオン連結を拡張した概念である。図 4 は $t-x$ のユニオン連結における AB -property の例である。この例では、 $*$ の領域 (セル A と B も含む) において $t-x$ のユニオン連結が成立するだけでなく、次に示す AB -property も同時に成り立つ: 連結の領域 (セル A と B も含む) が全て空セルの状態ではじめて、セル A への

白の着手に対して、黒はセル B に応手ができる。セル B への白の着手に対しては、連結が成り立つ黒の応手を行う（黒 22 など）。このときセル A は空セルで、その後のセル A への白の着手に対して、既に $t-x$ であるため、黒は一手余分に盤面の任意の空セルに着手できる。

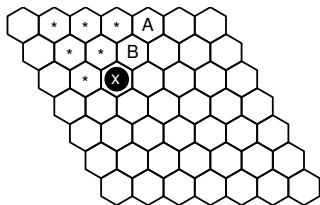


図 4: AB -property をもつユニオン連結の例

4 σ 連結と σ 拡張

この節では σ 連結を定義して、それに基づく技法である σ 拡張を説明する。

4.1 σ 連結

σ 連結は、領域における着手を指定したユニオン連結であり、領域内の後手の着手に対してそれぞれ先手の応手を指定したものである。

定義 1

σ 連結とは、ユニオン連結とその正しさを証明する証明木の対である。

ユニオン連結に対する証明木は、一般に複数個存在するが、 σ 連結ではそのうちの 1 つを指定する。すなわち σ 連結は、 AB -property では限定的であった黒の応手の指定を、全ての白の着手に対して行うように一般化した概念であるといえる。

実際の応用では、 σ 連結の証明木の中で、根および根に近い後手局面の節点が特に重要である。また、証明の文書として証明木全体を書き下すのは、多くの場合複雑すぎる。そこで、根から遠い節点を調べないで済ませるために、根に近い節点からなる部分木を考え、さらに、部分木の後手節点において、そこで成り立つ性質（論理式）を付与する。例えば、当然のことであるが、ユニオン連結は石の連結を示す論理式である。そこで、 σ 連結を次のように定義する。

定義 2 (σ 連結)

σ 連結とは、ユニオン連結と証明木の部分木の対である。ここで、部分木とは、後手局面の節点より深い節点を削除してできるものであり、後手局面の節点にはそこで成り立つ論理式を付与する。

具体例を用いて σ 連結を説明する。次に示す SC_1 -lemma と SC_2 -lemma は、本稿の必勝手順を示す上で重要な σ 連結である。

図 6 の証明木の根節点は、図 5 の記号 ‘-’ で示す領域に着手がない後手局面を表している。● の節点は後手局面を、○ の節点は先手局面を表し、根以外の節点に書かれている数字 P は、その局面に至る着手を示す。 $P+$ は、共通の解析ができる（複数の）白の着手

においてその代表を表す。これ以降で示す証明木においても同様の記述を行っている。補題 3 では補題 1 の図 5 と図 6 の証明木（部分木）を用いる。

補題 1 (SC_1 -lemma)

図 5 で記号 ‘-’ で示す領域において、ユニオン連結 $x-b$ で図 6 のような証明木をもつ σ 連結を与えることができる。ここで、証明木の各節点（深さ 2）の論理式は図 8 ~ 12 に示す通りである。

なお深さ 4 の節点は、わかりやすさのために、深さ 2 の節点 (●46) の AB -property を詳しく展開したものである（図 12 参照）。ここで、 $18+ = \{18, 28\}$, $36+ = \{36, 37\}$, $47+ = \{47, 48, 38\}$ である。この AB -property は実は補題 2 の σ 連結そのものである。

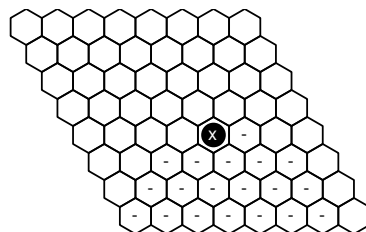


図 5: SC_1 -lemma

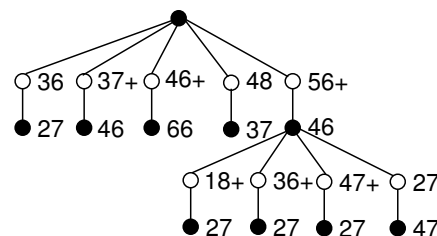


図 6: SC_1 -lemma の証明木
(論理式は図 8 ~ 12 をみよ)

証明 根の局面から後手の第一着手を図 7 の 1 ~ 5 のように分類し、図 6 の証明木に基いて黒の応手（深さ 2 の局面に至る着手）を行うとそれぞれの局面は Case 1 ~ 5（図 8 ~ 12）のような局面に至る。いずれの節点についても図に示す論理式が成り立つ。これより根において $x-b$ が成り立つことがわかる。

以上により ‘-’ で示す領域で、題意の条件を満たす σ 連結 (SC_1 -lemma) が成り立つ。

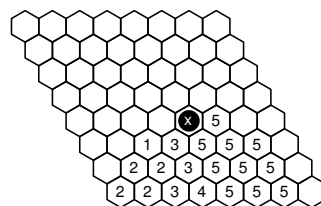


図 7: SC_1 -lemma の後手の着手の分類

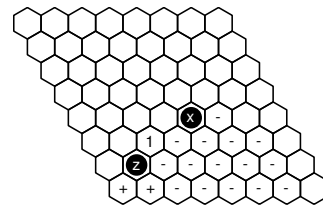


図 8: Case 1
白 ‘1’ 黒 27(z)
 $(x-z \mid x-b) \wedge z-b$
 $\Rightarrow x-b \wedge z-b$

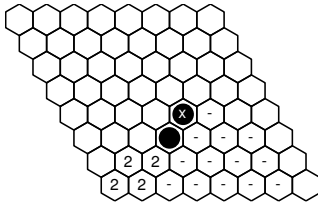


図 9: Case 2
白 '2' 黒 46
 $x-b$

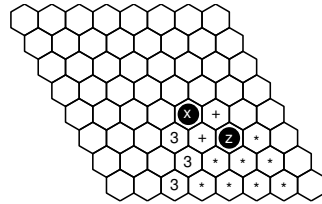


図 10: Case 3
白 '3' 黒 66(z)
 $x-z \wedge z-b \Rightarrow x-b$

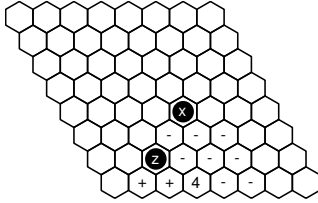


図 11: Case 4
白 '4' 黒 37(z)
 $(x-z | x-b) \wedge z-b$
 $\Rightarrow x-b \wedge z-b$

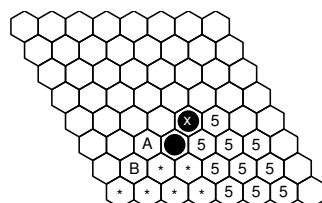


図 12: Case 5
白 '5' 黒 46
 $x-b \wedge AB\text{-property}$

補題 2 (SC_2 -lemma)

図 13 で記号 '-' で示す領域において、ユニオン連結 $t-x$ で図 14 のような証明木をもつ σ 連結が成り立つ。後手の第一着手の分類は図 15 に示す。ここで 51+ は数字 1、53+ は数字 2、72+ は数字 3 のセルである。

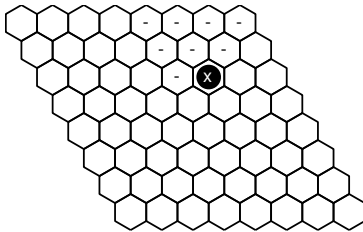


図 13: SC_2 -lemma

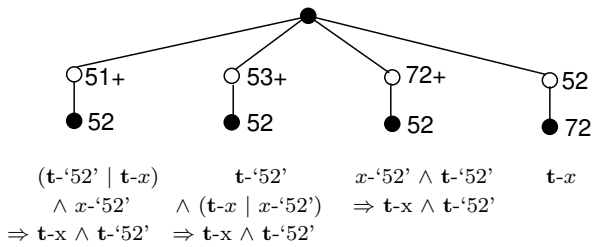


図 14: SC_2 -lemma の証明木

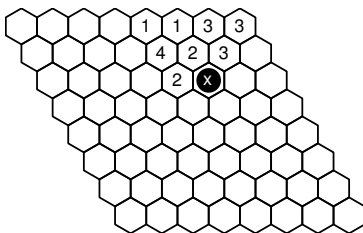


図 15: SC_2 -lemma の後手の着手の分類

4.2 σ 拡張

σ 拡張の技法は、 σ 連結の領域の外部のあるセルに石が置かれたとき、さらに大きい領域に対するユニオン連結 (またはその論理積) を得るものである。これが可能であるのは、 σ 連結のいずれの後手局面 (深さが偶数の節点) に対しても、 σ 拡張の着手を行うことにより、拡張後のユニオン連結 (またはその論理積) を得ることができるためである。

具体例で説明する。いずれも後の応用で特に重要なものである。次で示す SE_1 -lemma と SE_2 -lemma は、それぞれ前述の SC_1 -lemma と SC_2 -lemma に対する σ 拡張を表している。

補題 3 (SE_1 -lemma)

SC_1 -lemma に対し、黒 35(y) を着手することによって $x-b \wedge (y-b | y-x)$ に σ 拡張される (図 16 で拡張された領域は記号 '*' で表す)。よって $x-b \wedge y-b$ が成り立つ。

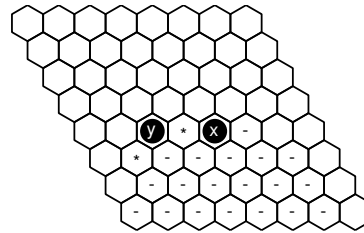


図 16: SE_1 -lemma

証明 SC_1 -lemma の Case 1 ~ 5 の盤面に対し y を着手すると図 17~21 のようになる。いずれの Case においても $x-b \wedge y-b$ が成り立つ。同様に根節点においても y の着手で $x-b \wedge y-b$ が成り立つ (図 22)。従って題意の条件を満たす σ 拡張 (SE_1 -lemma) が成り立つ。

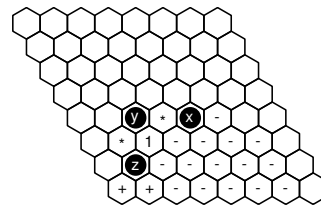


図 17: Case 1
 $(x-b \wedge z-b) \wedge (y-z | y-x)$
 $\Rightarrow x-b \wedge y-b$

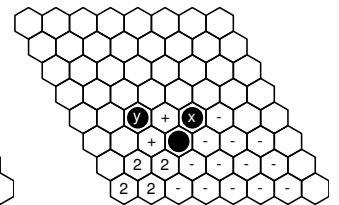


図 18: Case 2
 $x-b \wedge y-x$
 $\Rightarrow x-b \wedge y-b$

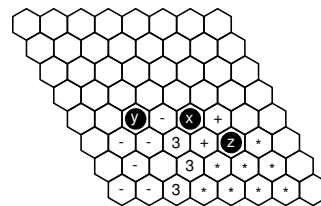


図 19: Case 3
 $x-b \wedge (y-b | y-x)$
 $\Rightarrow x-b \wedge y-b$

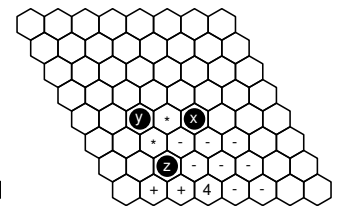


図 20: Case 4
 $(x-b \wedge z-b) \wedge (y-z | y-x)$
 $\Rightarrow x-b \wedge y-b$

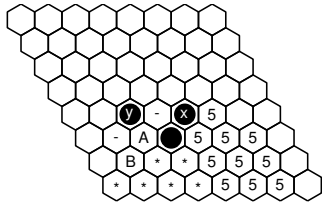


図 21: Case 5
 $(x-b \wedge AB\text{-property})$
 $\wedge (AB\text{-property} \Rightarrow (y-b \mid y-x))$
 $\Rightarrow x-b \wedge y-b$

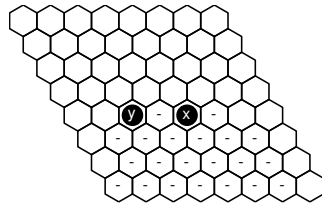


図 22: Case root (根)
 $x-b \wedge y-b$

同様に次の補題が成り立つ。

補題 4 (SE_2 -lemma)

SC_2 -lemma に対し、黒 45(y) を着手することによって $t-x \wedge t-y$ に σ 拡張される (図 23 で拡張された領域は記号 ‘*’ で表す)。

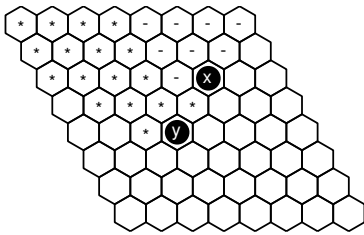


図 23: SE_2 -lemma

実際の応用に際しては、 σ 拡張ができるように後手の着手に対する先手の応手を予め決めておく。これにより、 σ 連結の内部着手を考慮せずに、盤面全体の探索 (必勝手順の検証) が進められる。こうして、繰り返しの記述と場合分けが不要になり、検証も簡単になる。実例は次節で示す。

5 応用

従来の技法に加え、本稿の新しい技法を用いることにより、これまで複雑すぎるとされていた盤面に対して完全な必勝手順を記述することができる。本稿では、 8×8 (初手 63) の必勝手順を示す。また、新しい技法の強力さを示す例として、 8×8 (初手 54) の必勝手順 [6] が大幅に簡略化できることを説明する。さらに 9×9 (初手 55) の必勝手順の証明木を提示する。

5.1 8×8 (初手 63)

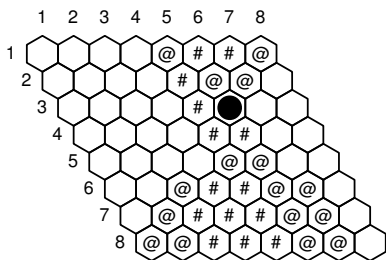


図 24: 8×8 (初手 63) における白の着手候補

図 24 の # と @ が表しているのは、従来の方法によって求めた証明木の根節点 (初手 63) の子節点 (白の着手

候補) であり、30 個ある。本稿の技法を適用すると、@ で表している着手については、簡単に (あるいは共通の応手によって簡単に) 必勝手順を求めることができる。従って詳しい解析が必要な子節点は 14 個 (#) にまで減少する。例えば、前節の SC_1 -lemma と SE_1 -lemma を用いて、白 62 の着手は黒 55 によって黒勝ちを証明できる。また、 SC_2 -lemma と SE_2 -lemma を用いて、白 55 の着手は黒 45 によって黒勝ちを証明できる。これより詳しい解析 (深い探索) は必要ない。このことは次の命題 5 と命題 6 によって得ることができる。

ここで、深い探索が必要でないとは、この局面が証明木の葉になることである。詳しくは次のことを意味する。その局面 (葉) は、後手局面であるが、この局面以降の後手の着手は強制される。すなわち、後手の着手はそれ以後一意的に (あるいはすぐ後の例で示すように複数あるが自明であるという意味で一意的に) 定まる。ちょうど将棋において、王手の連続で詰む場合、先手側の王手だけでなく、王側の応手も一意的に決っていくという特別な状況に相当する。そこで、証明木の葉局面には、この強制着手手順を付記した先手勝ちの証明をつける。この実例が次に示す命題である。命題の中では、この強制着手手順を F で表す。

命題 5

次の 8×8 の盤面 (後手局面) は黒勝ちである。

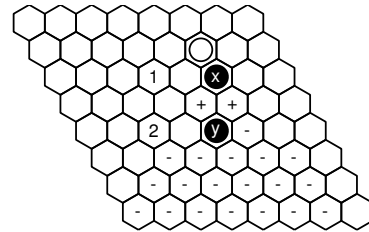


図 25: 命題 5 黒勝ち

$F : \circ \{71, 72, 81\} \bullet '1' \circ \{53\} \bullet '2' (SE_1\text{-lemma})$

証明 図 25 で示すように 63, 55 の黒石をそれぞれ x, y とする。S-lemma より $x-y$ で、 SC_1 -lemma より $y-b$ が成り立つ。従って、白は黒の $t-b$ を防がなければならぬため、着手が強制される。同様の理由により、上記の F で示している強制着手が続く。ここで、T-lemma より $t-'1'$ 、S-lemma より $'1'-'2'$ 、 SE_1 -lemma より $y-b \wedge '2'-b$ が成り立つ。よって $t-b$ が成り立つ。

命題 6

次の 8×8 の盤面 (後手局面) は黒勝ちである。

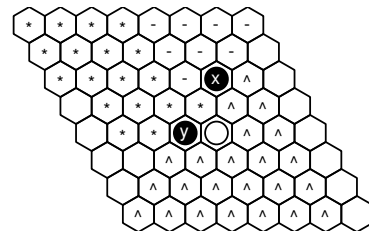


図 26: 命題 6 黒勝ち

証明 図 26 で示すように 63, 45 の黒石をそれぞれ x, y とする。 SC_2 -lemma と SE_2 -lemma より $t-x \wedge t-y$ が成り立つ。また、図 3 のユニオン連結より $x-b \mid y-b$ が成り立つ。よって $(t-x \wedge t-y) \wedge (x-b \mid y-b) \Rightarrow t-b$ が成り立つ。黒 y で終わるので、F は空列である。

このように、 σ 連結と σ 拡張のおかげで、場合分けが減少し、使用する図も従来の方法に比べて少数ですむ。

σ 連結と σ 拡張による解析を利用することで、 8×8 (初手 63) の証明木を図 29 のように示すことができる。この証明木は、総節点数 159 個からなる。葉は 40 個である。用いた σ 連結の数は 6 個、 σ 拡張の数は 13 個である。

なお証明木における節点のうち、葉でない途中の節点の解析は、よく知られている先行排除の考え方による ([2],[6],[7])。これは、後手が悪い着手を行った場合、先手が直ちに勝つことができることを利用する。実際の手順としては、先手が続けて 2 手着手した盤面を調べることにより、後手の悪い着手を求め、それ以降の解析からそのような悪手を排除する。

5.2 8×8 (初手 54)

8×8 (初手 54) の必勝手順は、2005 年 野下 [6] によって示されている。野下が示した証明木は、節点数が 108 個からなっている。 8×8 の証明木としてはこれでも十分簡潔なものであるが、 σ 連結と σ 拡張を用いることによって、さらなる簡略化が可能である。

野下の証明木は、図 27 の # と @ で示すように根節点 (初手 54) の子節点 (白の着手候補) は 12 個である [6]。 σ 連結と σ 拡張を最大限に利用すると、@ で示す 7 個の子節点は簡単に黒勝ちを示せ、着手候補から取り除くことができる。簡略化した証明木は図 28 のようになる。この結果、証明木の総節点数は 35 個に減少させることができる。葉は 6 個である。

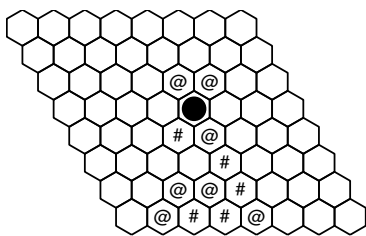


図 27: 8×8 (初手 54) における白の着手候補

5.3 9×9 (初手 55)

これまで 9×9 の盤面における必勝手順は示されていない。 σ 連結と σ 拡張を用いることにより、十分検証可能な程度に簡潔な文書として必勝手順を記述することができる。図 30 にその証明木を示す。現在その細部をチェックしている。

この証明木において、枠で囲まれている部分は次のような着手手順を表している。in x から枠内の手順に至る場合、枠内の着手の後 out x の着手に至る。枠内の後手局面において白 46 の着手があったら黒 56 と着手を行い、以降の着手が続き、out y の着手に至る。in

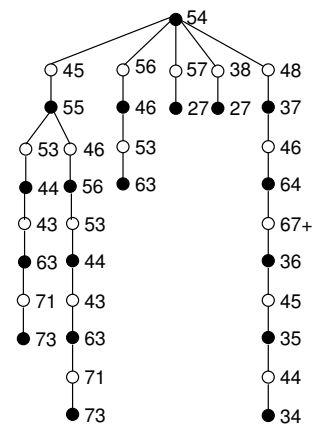


図 28: 8×8 (初手 54) の証明木

y から枠内の手順に至る場合、枠内の着手の後 out y の着手に至る。この証明木は総節点数は 218 個からなる。葉は 29 個ある。

6 おわりに

本稿では σ 連結とそれを利用した σ 拡張について述べた。その結果場合分けの数が減少し、複雑な盤面も簡単に取り扱うことができるようになった。特に 8×8 (初手 63) や 9×9 (初手 55) の必勝手順を示すことができた。また、 8×8 (初手 54) のような従来の必勝手順を大幅に簡略化できたことから σ 連結と σ 拡張の強力がわかる。

参考文献

- [1] V. Anshelevich, A Hierarchical Approach to Computer Hex, *Artificial Intelligence*, 134, 1-2 (2002), 101-120.
- [2] R. Hayward, Y. Bjornsson, M. Johanson, M. Kan, N. Po and J. van Rijswijk, Solving 7×7 Hex with Domination, Fill-in, and Virtual Connections. *Theoretical Computer Science*, 349, 2 (2005), 123-139.
- [3] R. Hayward, B. Arneson and P. Henderson, Verifying Hex Strategies, *CG 2006* (2006).
- [4] H.J. van den Herik, J.W.H.M Uiterwijk and J. van Rijswijk, Game Solved: Now and in the Future, *Artificial Intelligence*, 134, 1-2(2002), 277-311.
- [5] K. Noshita, Union-Connections and a Simple Readable Winning Way in 7×7 Hex. *Proc. of 11th Game Programming Workshop* (2004), pp. 72-79.
- [6] K. Noshita, Union-Connections and Straightforward Winning Strategies in Hex. *ICGA Journal*, 28, 1 (2005), 3-12.
- [7] J. Yang, S. Liao and M. Pawlak, On a Decomposition Method for Finding Winning Strategy in Hex game, *International Conference on Application and Development of Computer Games in the 21st Century* (2001), 96-111.

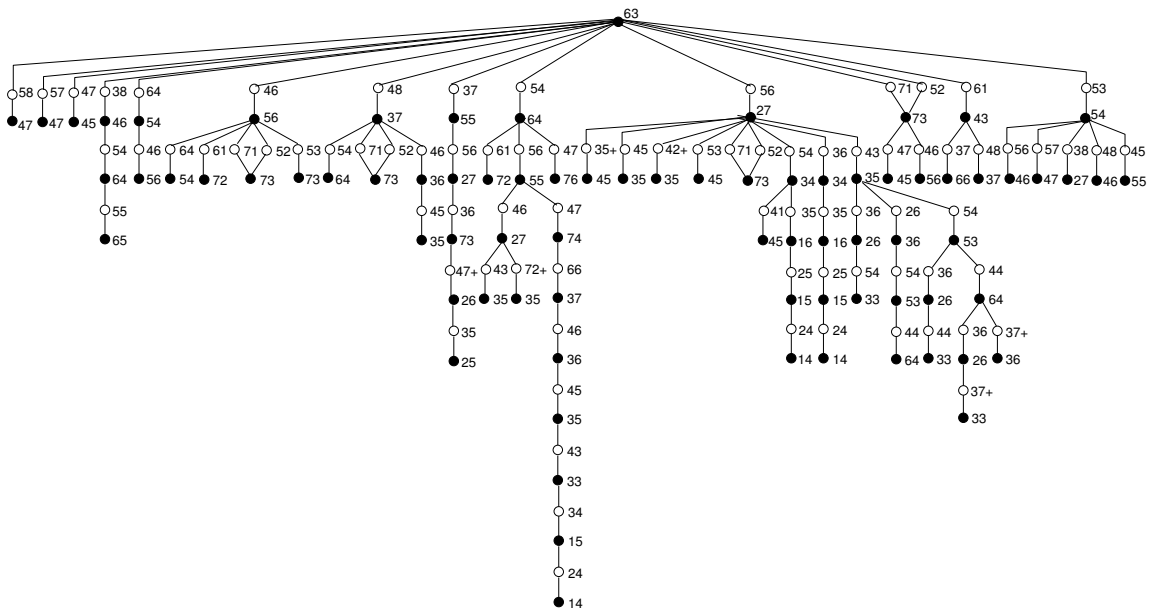


図 29: 8×8(初手 63) の証明木

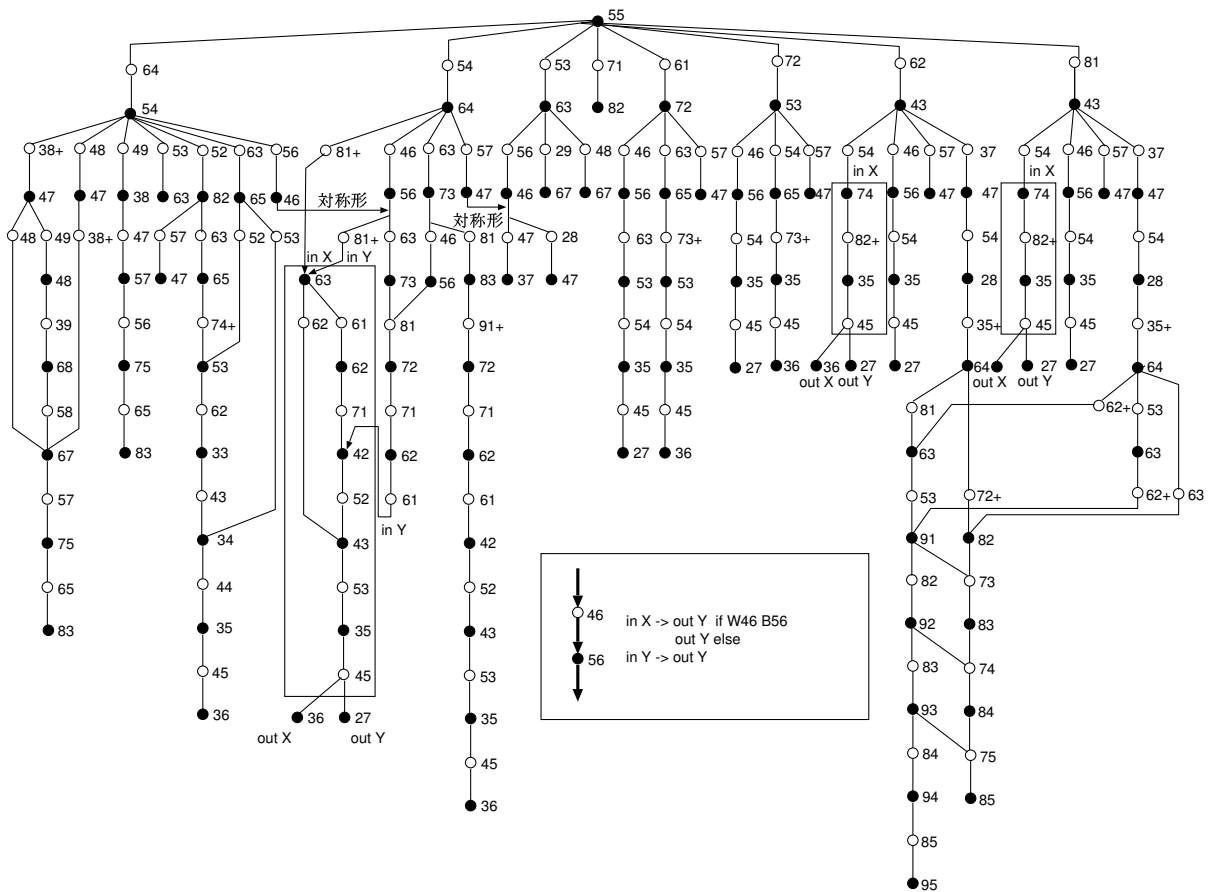


図 30: 9×9(初手 55) の証明木