円状ニムゲームに関する研究

佐藤貴之（仙台電波高専），太斎紗織（日立東日本ソリューションズ），
佐々木義史（仙台電波高専）

概要

円状に m 個の石を並べ，先手と後手が交互に 1 個以上，n 個以下の連続した石を取り合うゲーム，(m,n) 円状ニムゲームを新たに作り，n が 3 以上の円状ニムゲームは，後手が必勝であることを示した．その時の後手のアルゴリズムについて述べる．また，$(m,2)$ 円状ニムゲームの勝敗については，コンピュータシミュレーションを利用して，$m=1$ から 23 まで結果を示した．

An analysis of circular nim game

Takayuki Sato, Saori Dasai, and Yoshifumi Sasaki

Abstract

A (m,n) circular nim game is a game which is first m pebbles are arranged circularly, and two players alternately remove no fewer than 1, nor more than n pebbles. We show that in (m,n) circular nim game, if $m > n+1$ and $n > 2$ then the passive move always wins. And we provide the simple winning strategy of the passive move.

1　はじめに

昔，よく研究の対象とされてきたゲームにニムゲームがある．ニムゲームとは，初期局面として，いくつかの山に石が複数個あり，二人のプレーヤーが決められたルールの範囲内で 1 つの山から何個かの石を交互に取り合うゲームである．ニムゲームは，二人ゼロ和完全情報ゲームであるため，必勝法が存在する．また，この類のゲームは，数学的に表現することが容易であったため，理論的解析により，たくさんの興味深い結果が得られている [1].

本論文では，ニムゲームの一種である，円状ニムゲーム新たに作り，解析の対象とする．円状ニムゲームは，石の取り方で，石の列を増やすことがあるという性質を持つことから，中世のイギリスの遊戯であるケイレス，糸切りゲームやチェスの盤を使ったドーソンのゲーム [2] と同じタイプであると考えられている [1]．円状ニムゲームは，もし同じ個数の石を取ったとしても，取る場所によって石の列の数やそれぞれの列の長さが変わってくるため，一般のニムゲームより複雑なゲームであることが容易に想像できる．

本論文では，円状ニムゲームの勝敗と必勝アルゴリズムについて述べる．定理の証明には，今まで用いられていた整数論をはじめとする高度な数学の概念を使用せず，より簡単な手法を用いた．

本論文の構成は以下の通りである．まず，2 節で本論文で用いる定義を述べ，3 節で主定理を説明する．4 節で主定理の証明のためのアルゴリズムを提示し，5 節では，主定理では証明できない例外についてコンピュータシミュレーションをした結果を示す．6 節で本論文のまとめを行い，最後に未解決問題を提示する．

2　諸定義

本論文で用いる定義類について述べる．まず，円状ニムゲームを以下のように定義する．

定義 1 (m,n) 円状ニムゲームとは，m 個の石を円状に配置し，先手，後手，交互に最低 1 個，最高 n 個の連続した石を取ることを繰り返すゲームである．

(10, 3) 円状ニムゲームの初期局面を図 1 に示す．また，便宜上，石に反時計回りに 1 から m までの番号を割り当てることにする．

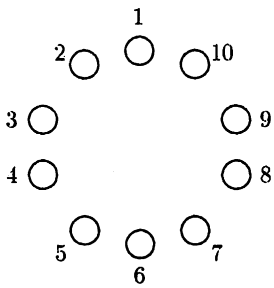

図 1: (10, 3) 円状ニムゲームの初期局面

上に述べたルールで，ゲームが途中まで進行したものを図 2 に示す．

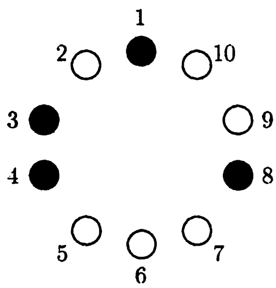

図 2: (10, 3) 円状ニムゲームの進行途中

図 2 で，既に取られた石を黒く，まだ取られていない石を白く表現する．本論文ではこれ以降も同じ表現をする．

また，図 2 において，手番のプレーヤーは 2 と 10 の石を一度に取ることはできないことに注意する．すでに 1 の石が取られているため，2 と 10 は連続した石ではないからである．

途中の状態を表現するために，ニムゲームにおける局面を定義する．その前に，まず局面の表現に必要なものを定義する．

定義 2 まだ取られていない連続した石の集合の事を列と呼び，i 番目の列を X_i で表す．また，列の長さとは，連続した石の個数の事をいい，$|X_i|$ で表す．

図 2 の場合，列は $X_1 = \{2\}, X_2 = \{5, 6, 7\}, X_3 = \{9, 10\}$ の 3 つである．そして $|X_1| = 1, |X_2| = 3, |X_3| = 2$ である．

定義 3 列の長さの集合 $\{|X_1|, |X_2|, \ldots\}$ を局面と呼ぶ．

また，局面 $\{|X_1|, |X_2|, \ldots\}$ において，石の個数の多い順に局面を表現し直しても，ゲームの勝敗は変わらないことがわかる．そこで，本論文では特に断りのない限り，もし，$i < j$ ならば，$|X_i| \geq |X_j|$ とする．

次に，本論文におけるニムゲームの勝敗を定義する．ニムゲームにおいて，最後の石を取ったプレーヤーが勝ちになる場合を正規形と呼び，最後の石を取ったプレーヤーが負けになる場合，逆形と呼ばれている [1]．一般に，ニムゲームの正規形の解析は容易であり，円状ニムゲームの場合も同様に，正規形ならば簡単に勝敗がわかる．従って，本論文では，逆形の円状ニムゲームについて取り上げる．そこで，本論文におけるニムゲームの勝敗を，以下のように定義する．

定義 4 ニムゲームは最後の石を取ったプレーヤーの負けとする．

これ以降は，特に断りのない限り，単にニムゲームと表現しているものは，逆形のニムゲームを指しているものとする．

本論文では，勝敗を扱いやすいように円状ニムゲームの勝敗関数を以下に定義する．

定義 5 円状ニムゲームの勝敗関数 $C(m, n)$ については以下のように定義する．

$$C(m, n) = \begin{cases} 1 & \text{先手必勝の時} \\ 0 & \text{後手必勝の時} \end{cases}$$

ここで，ゲームの性質上引き分けはないので，任意の m, n で $C(m, n)$ は必ず 0 か 1 の値を持つことに注意する．

3 本論文の主定理

本論文の主定理は以下の通りである．

定理 1 (m, n) 円状ニムゲームの勝敗関数を $C(m, n)$ として，$m > n + 1$ かつ $n > 2$ の時，

$$C(m, n) = 0$$

が成立する．

定理 1 を示すために，(m, n) 円状ニムゲームにおける，後手のアルゴリズムをこれ以降に述べる．

4 主定理の証明

4.1 直線状ニムゲーム

任意の (m, n) 円状ニムゲームにおいて，どこの場所の石を何個取ろうとも，最初の一手を行った後は必ず

石が直線状に一列に並んだ形になっているという性質を持つ．そこで，石が直線状に並んだ局面を初期局面とする直線状ニムゲームを解析する．直線状ニムゲームは次の様に定義する．

定義 6 (m, n) 直線状ニムゲームとは，m 個の石を直線状に配置し，先手，後手，交互に最低 1 個，最高 n 個の連続した石を取ることを繰り返すゲームである．石に左から右へ順番に 1 から m までの番号をつける．また，(m, n) 直線状ニムゲームの勝敗関数を $L(m, n)$ と書く．

ここで，番号 1 の石と番号 m の石が円状ニムゲームの場合は一度に取ることができたが，直線状ニムゲームの場合は一度に取る事ができないことに注意する．

円状ニムゲームの最初の局面の 1 手後が，必ず直線状ニムゲームになっていることから，定理 1 を示すためには，以下の補題を証明すればよい．

補題 1 $m > 1$ かつ $n > 2$ の時，$L(m, n) = 1$.

すなわち，円状ニムゲームは後手が必勝であることを証明するには，直線状ニムゲームが先手必勝であることを証明すればよいことになる．

4.2 直線状ニムゲームの先手必勝アルゴリズム

ここでは，補題 1 の証明をする．補題 1 を示すためには，(m, n) 直線状ニムゲームの先手必勝のアルゴリズムを提示すればよい．この節では，$n > 2$ とする．

$m = 2$ の時は明らかなので，$m > 2$ の場合を考える．

その必勝アルゴリズムとは，先手が「常に対称局面を作るように石を取る」というものである．対称局面を以下のように定義する．

定義 7 局面 $\{|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_{2p}|\}$ が，全ての自然数 $1 \leq k \leq p$ なる k で，$|X_{2k-1}| = |X_{2k}|$ となり，かつ，$|X_1| = |X_2| > 1$ なる局面を対称局面という．

対称局面の例を図 3 に示す．

○	●	○	○	●	●	○	○	●	○
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

図 3: 対称局面の例

図 3 の局面は，長さが 1 の列が 2 つと長さが 2 の列が 2 つあるので，対称局面であることがわかる．

また，以下のことは明らかである．

命題 1 $m > 2$ の (m, n) 直線状ニムゲームの初期局面で，先手は必ず対称局面を作ることができる．

対称局面の重要な性質として以下がある．

命題 2 対称局面 $\{|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_{2p}|\}$ での手番の者を A とし，次の手番の者を B とする．すると，A がいかなる手を行っても，B がうまく石を取ることで，また手番が A で対称局面を作ることができる．

A が X_k の左から i 番目の石から連続 j 個取った時，B が $|X_k|$ と等しい長さの列 $X_{k'}$ の左から i 番目の石から連続 j 個取ることによって，再び対称局面を作ることができる．命題 2 から，対称局面の手番の者は，相手がうまく石を取ることで常に対称局面の手番を持つ．

対称局面になるように取り続けていくと最終選択局面という局面が必ず現れる．そこで，最終選択局面について，以下のように定義する．

定義 8 局面 $\{|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_t|\}$ において，$2 \leq |X_1| \leq n + 1$ かつ，$|X_2| = \cdots = |X_t| = 1$ を満たす局面を最終選択局面という．

$(10, 3)$ 円状ニムゲームでの最終選択局面の例を図 4 に示す．

○	●	●	○	●	●	○	○	○	○
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

図 4: $(10, 3)$ 直線状ニムゲームの最終選択局面の例

最終選択局面での手番の者が，複数個の石が含まれている列からうまく石を取ることで，円状ニムゲームに必ず勝利することができる．例えば，先手の手番で図 4 の局面ならば，8 から 10 までの 3 個の石を取れば，先手が勝つことができる．

命題 3 最終選択局面での手番を持つ者が勝利する．

図 4 の例からもわかるように，長さ 1 の列が奇数個あるなら，長さ 2 以上の列の石を長さ 1 の列を 2 個作るように真ん中の石を取り，長さ 1 の列が偶数個あるなら，長さ 2 以上の列の石を 1 個除いて全て取ればよい．

対称局面と最終選択局面については，以下の性質がある．

命題 4 対称局面は最終選択局面ではない．

対称局面は，定義より，長さが 2 以上の列が 2 つ以上あるが，最終選択局面は，定義から，長さが 2 以上の列が 1 つしかないため，命題 4 は明らかである．

命題1から4までより，常に先手は対称局面を作って後手に渡すことができ，対称局面では勝つことはできない．すなわち，先手がうまく石を取る限り，後手は勝つことが不可能である．従って，(m,n) 直線状ニムゲームは先手必勝となり，補題1を示すことができる．

ゆえに，定理1を証明することができた．

5 $(m,2)$ 円状ニムゲームについて

$(m,2)$ 円状ニムゲームの勝敗関数 $C(m,2)$ について，以下の命題が成立する．

命題 5 $C(m,2) = (\neg L(m-1,2)) \vee (\neg L(m-2,2))$.

また，$\neg$ は関数の値の否定を表す．

$(m,2)$ 円状ニムゲームの初期局面で，1個の石を取った後の局面は，$(m-1,2)$ 直線状ニムゲームの初期局面と同じで，2個取った時は，$(m-2,2)$ 直線状ニムゲームの初期局面と同じである．また，手番が入れ替わるので，関数 $L(m-1,2), L(m-2,2)$ の否定を取ればよい．また，手番側が $L(m-1,2), L(m-2,2)$ を選べるので，論理和の演算子になる．

命題5から，$(m,2)$ 直線状ニムゲームについて詳しく調べればよいことがわかる．しかし，$n>2$ の場合の (m,n) 直線状ニムゲームと異なり，$(m,2)$ 直線状ニムゲームの解析は多少複雑である．具体的に言うと，もし自分の手番で石を対称に取ったとしても，$(m,2)$ 直線状ニムゲームの場合，先手が必勝ではない m が存在するということがわかった．その具体的な反例として，以下の命題がある．

命題 6 $L(9,2) = 0$.

命題は，先手の可能な取り方をしらみつぶしに調べれば，どの手でも勝てないことで証明できる．

また，次の性質も明らかである．

命題 7 $L(m,2) \geq (\neg L(m-1,2)) \vee (\neg L(m-2,2))$.

命題6から直ちに $(10,2)$ と $(11,2)$ 円状ニムゲームは，共に先手必勝であることがわかる．その為，一般の m に対する $(m,2)$ 円状ニムゲームの勝敗が具体的にわからない．

上の性質を利用し，$m=1$ から22までの勝敗をコンピュータシミュレーションした結果を表1に示す．

命題5と表1から，勝敗関数 $C(m,2)$ の値は表2の通りになる．

表 1: 勝敗関数 $L(m,2)$ の値

m	$L(m,2)$	m	$L(m,2)$	m	$L(m,2)$
1	0	9	0	17	1
2	1	10	1	18	1
3	1	11	1	19	1
4	0	12	0	20	0
5	1	13	1	21	1
6	1	14	1	22	1
7	1	15	1		
8	1	16	1		

表 2: 勝敗関数 $C(m,2)$ の値

m	$C(m,2)$	m	$C(m,2)$	m	$C(m,2)$
1	0	9	0	17	0
2	1	10	1	18	0
3	1	11	1	19	0
4	0	12	0	20	0
5	1	13	1	21	1
6	1	14	1	22	1
7	0	15	0	23	0
8	0	16	0		

6 おわりに

本論文では，(m,n) 円状ニムゲームについての理論的解析と $(m,2)$ 直線状ニムゲームのコンピュータシミュレーションの結果を用いて，$(m,2)$ 円状ニムゲームの解析を行った．

最後に，以下に未解決問題を列挙する．

- 任意の局面 $\{|X_1|,|X_2|,\ldots\}$ で，どっちが必勝かを判定する問題
- 任意の m における，$(m,2)$ 直線状ニムゲームの勝敗

$n>2$ の (m,n) 円状ニムゲームの勝敗は簡単に証明できるのに，$(m,2)$ 円状ニムゲームの勝敗が簡単に求められないことが興味深い．

参考文献

[1] 一松信, "石とりゲームの数理", 森北出版, 1968.

[2] T. R. Dawson, "Fairy Chess Review", problem 1603, pp. 94, 1934.