操作パズルの新しいメディアへの応用にむけて

前田篤彦* 杉山公造* 間瀬健二†
* 北陸先端科学技術大学院大学 知識科学研究科
† ATR 知能映像通信研究所

Abstract

実体を伴った操作パズルを数理的なモデルで完全に記述できるとすればどうであろうか．本研究では，ある種の操作パズルについて，その本質を数理表現で一般化し，これまでにない物理形態の上での具現化，特に，パズル以外の機能を持ったメディアの上での具現化を試みる．このことによって，従来のパズルの機能とそれ以外の機能を兼ね備えた，新しい次元のパズルを創作する．本稿では，2 種類の操作パズルのグループを見出し，それぞれを群論を用いた数理表現で捉えることにより，既存のパズル以外にも様々なバリエーションが存在することがわかり，実際に具現化することができた．また，得られた抽象表現をもとに，操作パズルと組み立てブロック，あるいは音楽メディアとの融合について考案し，一部を試作した．

1 はじめに

数ある玩具のなかでも，パズルは数理的な概念と最も相性がよい．実際，パズルの解法を発見しようとするときや，その解法をわかりやすく他者に説明しようとするとき，あるいは，解のないことを証明したりするのに，パズルを数理的なモデルに当てはめて考えるということは，頻繁に行われている．

仮に，ある種の実体を伴った操作パズルを数理的なモデルで完全に記述できるとすればどうであろうか．それ固有のもの，そのような表現形態でしか成立しないものと思われている既存の操作パズルは，実はその本質を具現化した一表現形態でしかない可能性がある．抽象的なモデルで記述できれば，それを介して，今まで思いもかけなかった表現形態に変換することができる可能性があり，また，そのモデルがパラメーターを備えていれば，一表現形式においても，パラメーターを変えて，実に様々なバリエーションをつくることができる．

本研究では，操作パズルの枠組みや可能性を広げるための研究として，ある種の操作パズルを，その抽象的表現を介して，他の表現形態やメディアに変換するという試みを行いたい．具体的には，次のような工程で行う（図 1 参照）．

1. いくつかの既存の操作パズルを分析し，それらをまとめて表現できるような，一つの数理モデルを考案する．それは例えば，そのモデルに備わっているいくつかのパラメーターを変えれば，パズル A やパズル B になるというような表現である．
2. パラメーターの値として，既存の操作パズルには対応するものが存在しない値についても，対応する実体を具現化して，それらも操作パズルとして成立するのかどうか試す．パラメーターの値を具現化するのに，既存の操作パズルが用いる表現では物理的な制約があり困難な場合は，他の表現形式を用意して行う．
3. 既にパズル以外の機能を持っているメディアや物理属性を持ったものの上で，操作パズルの数理モデルを具現化する．このことによって，これまでのパズルの機能とそれ以外の機能を兼ね備えた，新しい次元のパズルを創作する．

そのため本稿では，まず 1 を実施する際に，なる

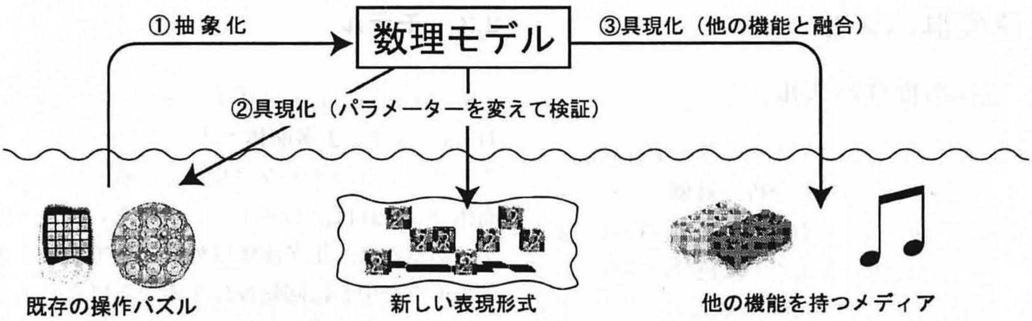

図 1: 検討の流れ

べく多くの既存の操作パズルに当てはまるようにモデルを考案した．その結果，2 種類の操作パズルのグループを見出し，それぞれについてモデルを考案した．そのうちの一つは，既存研究からの発展である．

2 に関しては，考案したモデルのパラメーターの変化に柔軟に対応して，具現化できるような表現形式を考え，様々な値でパズルとして成立するかどうか確かめた．

3 に関しては，組み立てブロックや音楽メディアとの融合を考えた．

以下，用語の定義を行った後，2 章では，ある種の操作パズルについて，置換群による一般化を行い，その応用として，組み立て可能なパズルのブロックを開発したので解説する．3 章では，巡回群による一般化を行い，応用として音によるパズルを考案したので解説する．4 章では，まとめと今後の研究課題について述べる．

1.1 操作パズル

本稿では操作パズルを次のような行為が成立する対象であると定義する．

- 複数の状態を取り得る対象であり，状態はユーザの操作によって，変化させることができる．
- 初期状態からパズルを解いた状態に変化させるのに必要な最小の操作手数に対して，一般的なユーザが達成するのにかかる平均的な操作手数が著しく多くなる．

具体例を示す．例えば，全て同じ規格サイズでつくられた，ボールとそれが一つは入る大きさの箱が 10 万セットあったとして，どのボールも箱に入っていない状態を A，全てのボールがそれぞれの箱に一つずつ入っている状態を B とする．ユーザには，ボールを一つずつ手作業で箱にしまうという操作のみがゆるされているとする．このとき，ユーザが状態 A から状態 B に変化させる行為に対して，これらの対象を操作パズルとは呼べない．ボールを手作業で一つずつ箱にしまうという行為を 10 万回繰り返すのは大変な作業であると思われるが，それは最小の操作手数であることには違いない．しかし，ボールの大きさが目測では容易に判別しがたいほど微妙に異なる規格でできており，それぞれにちょうどよい大きさの専用の箱が割り当てられているとすると，たとえボールと箱のセットが 10 個だとしても，おそらく多くのユーザは 10 回以上，行為を試行錯誤することになるだろう．本稿ではこのような行為が成立する対象を操作パズルと呼ぶことにする．

また，難易度ついては，高くなるほど，初期状態からパズルを解いた状態に変化させるのに必要な最小の操作手数に対して，一般的なユーザの達成手数が大きくなることとする．

2 置換群パズル

2.1 既存の操作パズル

本節では，ルービック・キューブやPyraminxといった既存の操作パズルを分析の対象とする．ルービック・キューブとは，立方体の各面が，3×3の要素に分割され，立方体の各面ごとに色分けがなされており，この状態をパズルを解いた状態として，これらの要素がバラバラに置換された状態から元に戻すことが，ユーザに課せられた操作パズルである．ユーザには，決められた位置にある複数の要素を決められたやり方で置換する操作のセットのみが与えられており，これらの操作の組み合わせだけでこのパズル解くことは，実際かなり困難である．Pyraminxとは，形状が正四面体で，分割された要素数と与えられた置換操作のセットが異なるだけで同様の操作パズルである．ほかにも，形状が球形のものや，正十二面体のものなどがある（図2参照）．

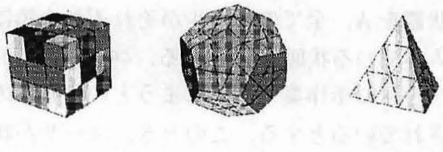

図2: 左からルービック・キューブ，Megaminx，Pyraminx

2.2 既存研究

Singmaster[3, 4]は，群論を用いてルービック・キューブの数理モデルを考案した．ルービック・キューブ上で操作される54個の要素を集合Xとし，プレイヤーが可能な操作の集合については，集合Xを全単射する群，すなわち置換群として捉えた．

Turnerらは，Singmasterによるルービック・キューブの数理モデルのパラメーターだけを変更したモデルで，形状が正多面体でその頂点を中心に要素が回転する操作パズル（Pyraminx, Megaminxなど）を捉え，それらのパズルの解法について述べている．

2.3 モデル

Singmasterは立方体のルービック・キューブ，Turnerらは，正多面体で頂点を中心に回転する操作パズルについてのみ言及している．しかし，正多面体でなければ，パズルとして成立しないのだろうか．あるいは，正多面体以外の表現でも，正多面体上で頂点を中心に回転操作することによって生成される置換群と同等のパラメーターの値をとらなければ，操作パズルとして成立しないのだろうか．

著者らは，様々なパラメーターをとっても，パズルとして，成立するのではないかと考えた．このことを整理すると，以下の抽象表現を具現化したときに，一般的にパズルとして成立するということである．

モデル. 操作パズル上で置換される要素を集合Xとし，操作パズル上で可能な操作の集合が，Xを全単射する置換群をなすもの．このとき，パラメーターとして，(1) Xの要素数，(2) 置換群をなす操作の数，(3) 置換群を構成する各操作が置換する要素が存在する．

しかし，正多面体を用いた表現形式では，パラメーターを任意に変えようとしても，それに対応するように実体を変更することが大変困難である．そこで，上記の数理表現がパラメーターに様々な値をとったとしても，柔軟に対応して表現できるような表現形式を考案した．

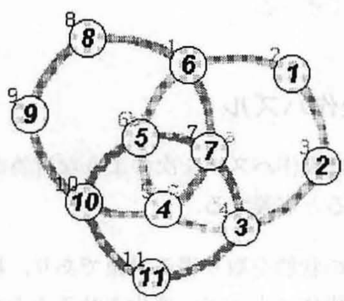

図3: 表現形式

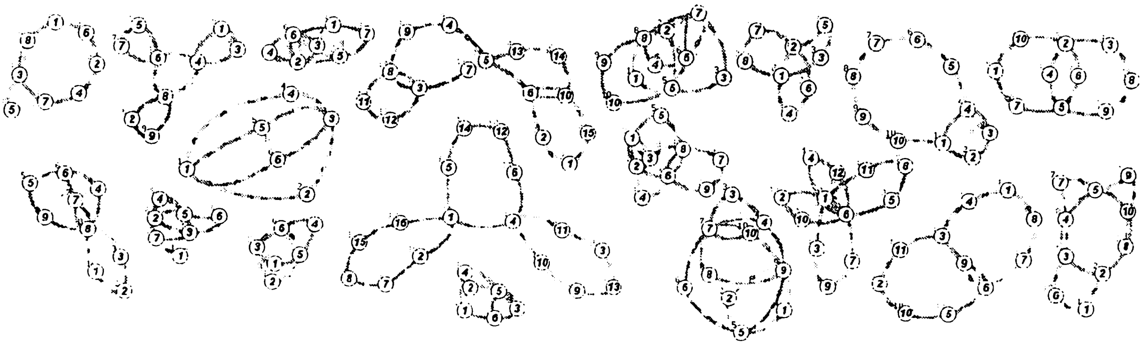

図 4: 置換群パズルのバリエーション．著者らの経験から難易度が高いと思えたものほど右側にくるように並べた．

2.4 柔軟な表現形式で検証

コンピュータ・グラフィックスによる 2 次元グラフ表現を用いて表現形式を考案した（図 3 参照）．グラフの頂点には，数字の記された円と，その左肩に小さな数字が表記されている．前者は置換される要素を表わし，後者は同一の番号が振られた円の本来の位置を表わす．置換群をなす操作は，それぞれの操作が置換する要素を Bezier 曲線による輪で結ぶようにして表わされている．

実際の操作はできる限り直感的になるように工夫を行った．与えられた各操作を実行するには，操作したい輪の上にある円をマウスで選択し，その輪の上で隣接する，操作したい方向にある円にドラッグすると，そのように操作した結果がアニメーションで表示される．

著者らは，この表現形式で，モデルのパラメーターを様々な値に変えて，それらに対応するバリエーションを具現化し（図 4 参照），それらを試した結果，以下のことがわかった．

- 全体の要素数が極端に少ないことなどにより，取り得る状態数が極端に少なくなる場合を除いて，どのような場合でもパズルとして成立する．
- ルービック・キューブでは，置換される要素の数は 54 個だが，それよりかなり少ない 10 個程度でも，大抵の人は解けずに諦めてしまうような難易度の高い操作パズルがいくつも生成できる．

2.5 パズル・ブロック

どのように組替えても，パズルとして成立する性質をいかし，この表現形式をつかって，ユーザが自由に置換群パズルを組み立て，創作できる，パズルのブロックを試作した．図 5 に，その概観を示す．このソフトウェアには，(1) 輪の追加/削除，(2) 輪の上で置換される要素数の変更，(3) 輪と輪の重複関係の変更，(4) データの保存機能（例えば図 3 のようなデータを以下のようなテキスト形式で保存する）が実装されている．

```
a=(1,2,3,4,5,6)
b=(4,11,10,6,7)
c=(1,7,5,10,9,8)
```

このシステムによって，いくらでも多様なバリエーションをつくることができる．置換群を表わす輪には，スプリング・モデルと呼ばれる，グラフの自動レイアウト・アルゴリズム [1] を実装している（図 6 参照）．しかし，これだけでは十分綺麗にレイアウトすることは不可能なので，ユーザ自身が，マウス・ドラッグで好きなように輪を配置することができる

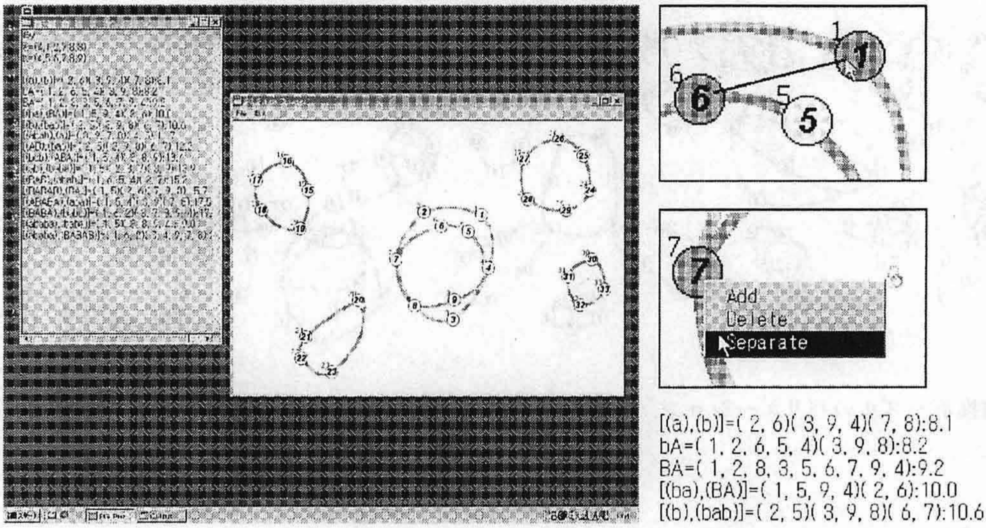

図 5: パズル・ブロック (左は全体図．右上及び右中はそれぞれ，重複関係の追加，重複関係の削除をしているところ．右下は，発見したマクロ操作の表示例)

ようにもなっている．これらの機能を併用した結果，輪をドラッグすると，輪ゴムを引っ張っているような感じをユーザに与える．

また，このシステムで作られた操作パズルを解くには，すでに定位置に戻した要素には手をつけずに，まだ定位置にない要素だけを置換するための，プリミティブな操作を連続的に組み合わせたマクロ操作をどうしても用いる必要があるが，それを見つけるための補助機能も実装した．マクロ操作を探索する方法として，Commutator と呼ばれる連続操作がよく用いられる．それは，ユーザに与えれた操作として，X 及び Y というものがあったとすると，$XYX^{-1}Y^{-1}$ というような連続操作になる．このとき，操作 X と Y が重複したブロックを持っていれば，このような連続的な操作の結果は，両操作で重複する部分の要素のみを置換し，それ以外を置換しないので，一度により少ない部分だけを元に戻して，段階的にゴールに近づけるようになる．さらに，このような部分的な置換は，X や Y 自体が，連続的な操作の組み合わせであっても当然同様の効果を持つ．それゆえ，マクロ操作を分析するのに，次のようなアルゴリズムを用いた．

for $i := 1$ **to** s **do**
  for $j := 1$ **to** r **do**
  begin
    X:=長さ i 以内の連続操作をランダムに生成
    Y:=長さ i 以内の連続操作をランダムに生成

    以下の 4 つの置換数×操作手数を求め
    リストに，低い順にソートして追加する
      XY
      XY^{-1}
      $XYX^{-1}Y^{-1}$
      $X^{-1}YXY^{-1}$
  end

リストの上位 n 番までを出力

2.5.1 使用感

著者の一人が，このソフトウェアを使用してみて，受けた主な印象は次の二点である．

- 組み立てた操作パズルは，実際に解いてみるまで，その難易度がほとんど予想できない．置換される要素の数や輪の数，さらには輪の重複数を増やしつづけたり，減らしつづけたりしても，難易度が段階的に変化するということはない．従って，前もって想定した難易度の操作パズルをつくろうという意図を持ってパズルを組み立てようとするのではなく，「このように組み立てると，どの程度の難易度のパズルになるだろう」といった，探索的な使い方をしてしまう気がする．

- できれば，コンピュータ・グラフィックスを使うよりも，ハードウェアとして実体化したほうが，より楽しめるのではないかと感じた．

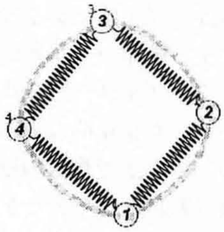

図 6: スプリング・モデルのイメージ

3 巡回群パズル

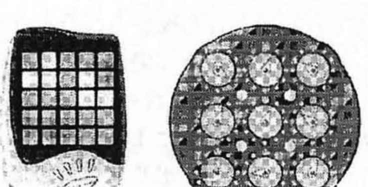

図 7: ライツアウトとルービック・クロック

3.1 既存の操作パズル

本節では，ライツアウトやルービック・クロックといった既存の操作パズルを分析の対象とする．ライツアウトとは，光が点いたり消えたりする電光パネルが，5 行 5 列並んでおり，初期状態として，ライトごとに光が点いたり，消えたりしている状態から，全てのライトが消えている状態へ操作することがユーザに課せられた操作パズルである．このタスクはそう簡単ではない．その理由は，特定のライトを消したり，点けたりしようとすると，そのライトの上下左右に別なライトが隣接していた場合，それらのうち，点灯していたものは消え，消えていたものは点灯してしまう仕掛けになっているからである．一方，ルービック・クロックでは，針が一つだけついた時計が，本体の表と裏にそれぞれ 9 つずつ並んでいる．ユーザには，それらのうちの決められたいくつかを同時に動かす操作のセットが与えられている（詳細は省略）．こちらのパズルでは，それぞれの時計がバラバラの時刻を示している状態から，すべての時計が 12 時を指すように操作することがユーザに課せられたタスクである．

3.2 モデル

モデル．これらの操作パズルのモデルについて，以下のように考えた．

1. それぞれの動作が，同じ位数の巡回群をなす要素の集合 X
2. それらの要素のいくつかを同時に動かす（ユーザに与えられた）操作の集合によってできる群

例えば，ライツアウトでは，各ライトの動作を位数が 2 の有限巡回群としてとらえ，それらのいくつかを同時に動かせる操作が 25 種類定義されたものとして捉えることができる．ルービック・クロックでは，各時計の動作を位数が 12 の有限巡回群としてとらえ，やはり，それらのいくつかを同時に動かす操作が定義されているものとして捉えることができる．

このモデルをもとに，次のような手続きをコンピュータ・プログラムによって繰り返すことにより，各パラメーターの値を求めると，パズルとして成立する値の組み合わせが何通りも求められることがわかった．

1. モデルのパラメーターの値をランダムに決める．
2. 各要素を（位数-1）回，一定方向に操作して，そこからもとの状態まで，定位置にない要素のみを定位置に操作しつづけるということを繰り返し，操作回数が（各要素×（位数-1））の倍に達しても解けなかったものを選別する．

3.3 表現形式

その確認に用いたコンピュータ・グラフィックスによる表現形式を図 8 に示す．この表現では，要素 X の数だけ箱を一列に並べ，巡回群をなす動作を上下に動く箱の動きとして表現した．巡回群の位数は，箱が動く範囲で表現されている．例えば，位数が 3 である場合は，同じ方向に 3 回動かすと，もとの高さに戻るようになっている．操作方法には，マウスやカーソルキーで箱を一つ選択して上下に動かすと，それに付随していくつかの箱も上下に動くというような方式を採用した．

図 8: 表現形式

得られたパラメーターの値を具現化したもので，最もシンプルなものは図 9 の左に示すようなタイプである．半透明の 3 つの箱の位置は，パズルを解いた状態，透明ではない 3 つの箱は，初期状態を示している．各箱は，無限巡回群として上下に動作する（画面サイズの限界はあるが）．図 9 の右側の図は，各箱を選択して動かしたときに，付随して動く他の箱を示している．各箱からでている矢印は，矢印の始点に該当する箱を動かしたときに，矢印の終点に該当する箱が従属して動くことを示している．付随して動く箱の動作方向は，直接動かした箱に対して常に逆方向になっている．

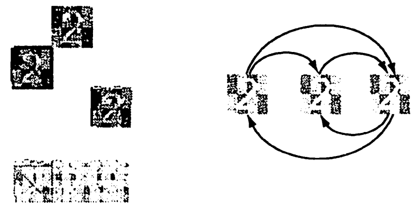

図 9: パズルの一例

3.4 音によるパズル

また，著者らは，巡回群による操作パズルの応用として，音楽による操作パズルというものを考案した．巡回群によるパズルは，パズルの状態を表わす方法として，必ずしも視覚的な方法を選択する必要はなく，なんらかの方法で複数の巡回群的な動きをする要素で状態を表わすことができさえすればよい．例えば，我々は，複数の音階や音色が同時に鳴っているか鳴っていないかについて，ある程度聞き分けることができる．それゆえ，音によっても巡回群パズルを具現化することができる．最も簡単な音の操作パズルは，いくつかの異なる音階や音色について，鳴っている状態となっていない状態に切り替えることができるようにし，特定の音を消したり，鳴らしたりしたときに，その音の操作に付随して，従属関係が定義された他の音も操作されるようなものであろう．しかし，音階を使う場合，鳴る音の組み合わせによっては，不協和音となってしまう．そこで，例えば，複数の楽器の合奏によって作り出される楽曲の各パート，あるいは，ポリリズムを形成する複数の打楽器の各パートの鳴る鳴らないなどによって巡回群を形成し，それぞれのパートを操作したときの従属関係を設定するといった方法をとれば，音楽的な機能を加味した，新しい操作パズルができる．

4　まとめ

本論文では，いくつかの既存の操作パズルについて，その本質を抽象的表現で表わし，それを介して，他の表現形態やメディアに変換しようという試みを行った．その結果，2種類の操作パズルのグループを見出し，それぞれを一つの数理モデルで捉え，それぞれのモデルのパラメーターの値に柔軟に対応して，具現化できるような表現形式を考え，様々な値でパズルとして成立するかどうか確かめた．また，パズル以外の機能をもつメディアへの応用として，組み立てブロック式の操作パズルを開発したり，音によるパズルの実現可能性について解説した．

今後の研究課題としては，音による操作パズルの具現化や，さらなる他のメディアへの応用例の考案，本稿でモデル化できなかった操作パズルについての数理モデル等の開発が挙げられる．

A　群とは

群とは，以下4つの条件を満たす集合 G のことである．

1. 集合 $G = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ は有限もしくは無限の集合で，その上に2変数の関数 $\psi(a,b) = c$ が定義され，その値は常に G に属する．この $\psi(a,b) = c$ を $ab = c$ で表わす．
2. 任意の3要素 a, b, c に対して結合法則が成立する．

$$(ab)c = a(bc)$$

3. G は $ae = ea = a$ なる要素 e を含む．このような e を単位元という．
4. G の任意の要素 a に対して $aa^{-1} = e$ となるような a^{-1} が G に含まれる．a^{-1} を a の逆元という．

A.1　置換群

集合 X に対して，X からそれ自身への全単射（1:1対応）全体のなす集合

$$S_x = \{\sigma : X \to X | \sigma \text{は全単射}\}$$

とおくとき，S_x は写像の結合

$$\sigma\tau = \sigma \circ \tau$$

を演算として群をなす．　$(\sigma \circ \tau(x) = \sigma(\tau(x)))$

S_x の単位元は恒等写像であり，逆写像

$$\sigma^{-1} : X \to X(\sigma^{-1}(y) = x \quad (\sigma(x) = y))$$

が，σ の逆元である．

この群 S_x のことを対称群といい，対称群の部分群を置換群という．

A.2　巡回群

巡回群とは，群である集合 M がただ一つの元 a_0 で生成される場合である．すなわち，M の全部の元が a_0 の何倍かになってしまうこと，すなわち

$$M = \{na_0 | n \in Z\}$$

となっている群のことである．このとき，n を巡回群 M の**位数**という．

参考文献

[1] Peter Eades.: "A heuristics for graph drwaing", *Congress Numerantium*, Vol.42, pp.149-160, 1984.

[2] E. C. Turner and K. F. Gold.: "Rubik's Groups" *American Mathematical Monthly*, vol. 92 No. 9 November 1985, pp. 617-629.

[3] David Singmaster.: "Notes on Rubik's 'Magic Cube'", 5th ed., London, 1980.

[4] Alexander H. Frey, Jr and David Singmaster.: "Handbook of Cubik Math". Enslow publishers,1982.