

特徴点を合わせるための球面写像を用いた 2形状間の写像方法

畠中 耕平^{1,a)} 風間 正喜¹

概要：本発表では surface parameterization により、2つの形状間の写像を求める方法を説明する。Surface parameterization とは、与えられたサーフェイスとある領域（平面や球面）の間の全単射を求める手法であり、テクスチャマッピングやリメッシングなどのメッシュ処理の際に利用される。我々は三角形メッシュで表現された2つの形状に対して、surface parameterization によって2つの形状を同一の球面空間へ写像し、球面空間上での対応点を求めることによって2形状間の写像を求めようと試みた。

球面への写像を求める方法としては、エッジの長さに関するエネルギー最小化問題を解くことによって球面へ射影する手法が知られている。この従来手法によって異なる2つの形状をそれぞれ球面へ写像し、対応する点を求めると、特徴的な点（たとえば、尖った点など）は球面上で一致しない。この特徴的な点を球面上で合わせるため、固定境界条件を課し、従来手法を用いて球面から球面への写像を求めようとしたところ、写像が求まらない場合があることが分かった。

今回は、この問題点を考察し、極小曲面理論を応用したエネルギーによってこの問題を解決し、2形状間の写像を求めることができたので報告する。

1. はじめに

我々は東京大学と共同で、心臓シミュレータによるテーラード医療の実現に向けた研究開発を進めている [1]。心臓シミュレータの入力データである心臓モデルは、四面体有限要素メッシュと左心室流体部や右心室流体部などの部位を表すラベルからなる。テーラード医療を実現するためにはCTやMRIで撮像された3次元医療画像から患者固有の心臓形状を持つ心臓モデル（固有心臓モデル）を妥当な時間で生成する必要がある。しかし、患者固有の形状を持つ四面体有限要素メッシュを生成し、その結果に対して、ラベルを設定したのでは時間がかかりすぎる。

よって我々は標準的な形状を持つ心臓モデル（標準心臓モデル）を作成し、医療画像から抽出した心臓形状（固有心臓メッシュ）への全単射を構成することによってラベルを写像して、固有心臓モデルを生成しようと考えた。標準心臓モデルと医療画像から抽出した固有心臓メッシュの間の全単射を求めるためには次の2つの処理が必要となる。

- (1) 表面上の全単射を構成する。
- (2) (1) で得られた表面の写像を基に内部の点の全単射を構成する。

本論文は(1)に関するものである。

心室の形状を表す標準心臓モデルは表面に流体と心筋の境界があり、その境界は弁輪部として表現される(図1)。ラベルを正確に写像するためには、境界上の節点が固有心臓メッシュの表面の境界上へ写像される必要がある。今、標準心臓モデルの表面上の三角形メッシュ M_1 と、医療画像から抽出した固有心臓メッシュ M_2 があるとすると、

M_1, M_2 を写像 $\{\phi_i : M_i \mapsto S^2\}_{i=1,2}$ によって、球面へ写像し、球面上で対応する点を求めることで M_1, M_2 間の写像を得ることができる。

つまり M_1 から M_2 への写像は以下のように定めることができる。

$$\phi_2^{-1} \circ \phi_1 : M_1 \mapsto M_2. \quad (1)$$

しかし、標準心臓モデルの表面を構成する三角形メッシュはラベルを持っているため、それぞれ球面へ写像しただけではラベルが一致しない(図2)。ラベルを一致させるためにラベルの境界を一致させる球面から球面への写像 $\psi : S^2 \mapsto S^2$ が必要となる(図3)。したがって求めるべき写像は次のようになる。

$$\phi_2^{-1} \circ \psi \circ \phi_1 : M_1 \mapsto M_2. \quad (2)$$

そこで、Surface parameterization を適用することによって標準心臓モデルの表面から固有心臓メッシュへの全単射

¹ 富士通株式会社
神奈川県川崎市中原区上小田中 4-1-1
^{a)} hatanaka.kohei@fujitsu.com

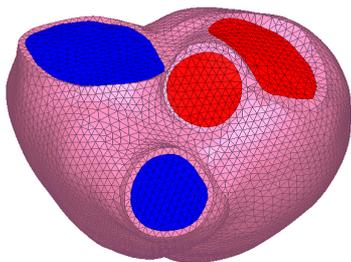


図1 標準心臓モデルの表面。赤い領域は左室流体のラベル、青い領域は右室流体のラベル、ピンクの領域は心筋のラベルを表し、それぞれのラベルの境界は大動脈弁、僧帽弁、肺動脈弁、三尖弁の弁輪部である。

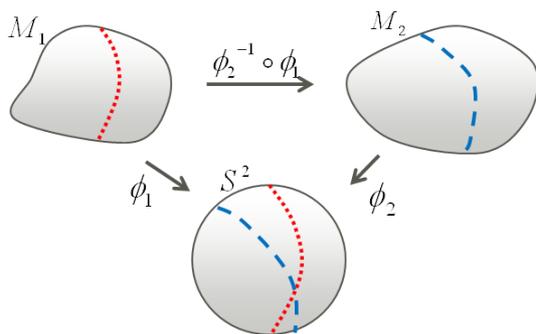


図2 写像 ϕ_1, ϕ_2 のみで M_1 から M_2 への写像を構成すると、 M_1, M_2 それぞれが持つラベル境界 (赤点線、青点線) が写像先の球面 S^2 で一致しない。すると写像によってラベルの情報を正確に写像できない。

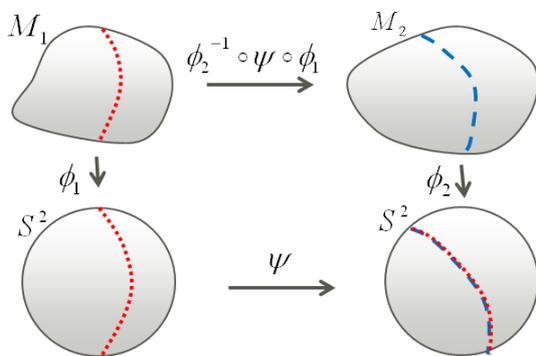


図3 境界を一致させる写像 $\psi: S^2 \mapsto S^2$ を導入することによって M_1 から M_2 の写像をラベルを保存する形で写像することができる。

(式2)を構成する方法が考えられる。しかし、球面上で境界を一致させる写像 ψ を構成するとき、従来手法では全単射が求められない場合があることが分かった。本論文ではこの問題を解決する計算方法を提案し、ラベルの境界が一致するような全単射 (式2) を構成する方法を述べる。

以降では、2節で Surface parameterization について紹介し、3節で従来手法によって球面への写像を求める方法とその問題を述べ、4節でこの問題を解決した手法を提案し、最後に5節でまとめとする。

2. Surface parameterization

Surface parameterization とは3次元空間内の表面 S からある領域への写像を求める方法である [4], [5]。CGの分野ではテクスチャマッピングやリメッシングや曲面のフィッティングや一致点探索のアルゴリズムなどに利用される。像の領域は写像される形状の種数 (穴の数) によって決められることが多い。たとえば対象とする形状の種数が0の場合は球面へ写像する。種数が1、及び形状が閉じていない場合は平面へ写像し、また種数が1より大きいときは双対空間への写像が構成される。

多くの3次元形状が切れ目を入れれば平面と同じトポロジーを持つことや部分的に平面を持つなどの理由から、平面領域への写像が多く研究されている。たとえば [4] では調和写像 $\phi: \mathcal{R}^3 \mapsto \mathcal{R}^2$ を求めるために、ラプラス方程式の解 $\Delta\phi = 0$ を以下の汎関数を最小化することによって求める。

$$F(\phi) = \int_{\Omega} |\nabla\phi|^2. \quad (3)$$

式(3)はディリクレ積分と呼ばれる。このとき、境界を写像したい領域に重なるように固定境界条件は設定される。実際の計算では、表面 S を離散化した三角形メッシュ M を用いて計算を実行する。三角形メッシュ $M = (X, E, T)$ は頂点の集合 $X = \{\mathbf{x}_i \in \mathcal{R}^3\}_{i=1, \dots, |X|}$ 、辺の集合 $E = \{e_i\}_{i=1, \dots, |E|}$ 、三角形要素集合 $T = \{t_i\}_{i=0, \dots, |T|}$ で構成される。これらをメッシュがもつグラフ構造にしたがって離散した以下のエネルギーを最小化することにより直接写像した節点 $\{\phi(x_i)\}$ を数値計算で求めることができる。

$$E_p(\phi(X)) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{|X|} \sum_{j \in N(i)} w_{i,j} |\phi(\mathbf{x}_i) - \phi(\mathbf{x}_j)|^2. \quad (4)$$

ここで、 $N(i)$ は i 番目の節点と辺を共有する頂点の集合であり、 $|N(i)|$ は $N(i)$ の要素数を表す。重み $w_{i,j}$ は $\sum_{j \in N(i)} w_{i,j} = 1$ を満たすように設定される。たとえば、 $w_{i,j} = 1/|N(i)|$ をすると [4] にある barycentric mappings となる。本研究では、CG分野で研究されてきている形状間の写像を構成する方法を心臓モデルに適用することを考えた。

3. Surface parameterization の心臓モデルへの適用

今、三角形メッシュ M_1, M_2 とそのラベルの境界が与えられているとする。我々は与えられた境界が一致するように2形状間の写像 (式(2)) を構成したい。図4は M_1 及びその境界を示す。 M_1 は心室を表す標準心臓モデルの表面である。黄点がラベルの境界 (流体と心筋の境界) を表す。また、図5は M_2 及びその境界を示す。 M_2 は医療画像から抽出された心室の形状で、黄点は求める写像で合わせたい境界である。

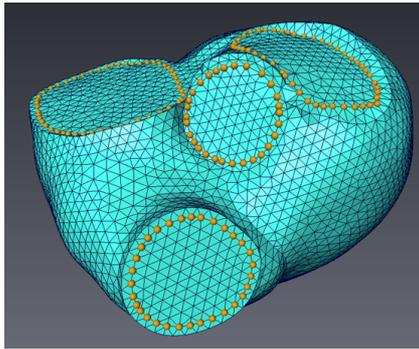


図 4 M_1 (要素数 9016) を表す。黄点は境界上の節点を表す。

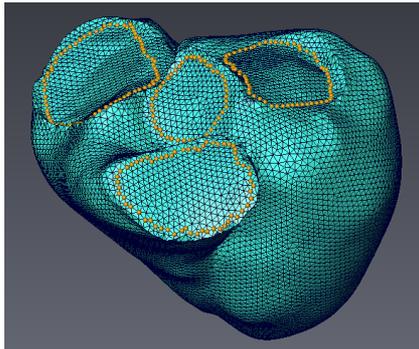


図 5 M_2 (要素数 20414) を表す。黄点は手動で設定した境界上の節点を表す。

3.1 従来手法による写像 $\{\phi_i\}_{i=1,2}$ の構成

心臓モデルの表面上の三角形メッシュの種数は 0 であるため、球面への写像を求める。その手法は、[6], [7], [8], [9] など平面でのエネルギー式 (4) を球面へ拡張することによって球面への写像を求めている。[9] にあるような以下のエネルギーの最小化問題を解くことで、 M_1, M_2 を球面へ写像すること考える。

$$E_h(\phi(X)) = E_p(\phi(X)) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{|X|} \alpha |\phi(x_i)|^2 - 1|^2. \quad (5)$$

第 2 項の係数 α は、大きくとることで、近似的に制約条件を表すペナルティ項として働き、節点を球面上に固定する効果を持つ。従来手法によって三角形メッシュ M_1, M_2 から球面の写像 $\{\phi_i\}_{i=1,2}$ を求める。図 6 はそれぞれ、計算により得られた式 (5) の最小解 $\phi_1(M_1), \phi_2(M_2)$ である。このようにして、従来の手法によって球面への写像 ϕ_1, ϕ_2 は求めることができる。

3.2 従来方法の問題点 (ψ の構成)

続いて、写像 ψ を求める。まず、写像 $\psi: S^2 \mapsto S^2$ であるため、球面写像を構成する従来の方法で求められると考えた。写像 ϕ_i の時との違いは球面上で一致するべきラベルの境界点を固定の境界条件として課すことである。したがって、式 (5) のエネルギー最小化問題に以下の境界条件を課すことにする。

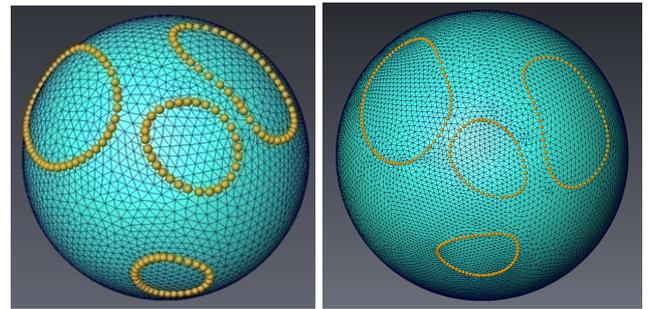


図 6 写像 $\phi_i: S_i \mapsto S^2$ の結果: 左図は $\phi_1(M_1)$, 右図は $\phi_2(M_2)$ を表す。

$$x_{\lambda(k)} = x'_k. \quad (6)$$

ここで、 $\{x_{\lambda(k)}\} \in \phi_1(M_1)$ は $\phi_1(M_1)$ の境界上の節点であり (図 6 左図の黄点), x'_k は $\phi_2(M_2)$ の境界上の点を B-スプライン関数で曲線近似し、その曲線上に $x_{\lambda(k)}$ で構成される辺同士長さの比を保つように移動した点である (図 7 右図)。図 7 左図は $(x_{\lambda(k)}, x'_k)$ の組を表す。

$\alpha = 50$ として、式 (5) の最小化問題を式 (6) の制約条件を課して解くことによって、写像 ψ を求める。図 8 は計算によって求めた最小解を表す。一部のメッシュにしわがより裏返った状態であることがわかる。このような状態では、写像は全単射とならない。

式 (5) は球面上に張られた自然長 0 のバネによって節点同士を結んだモデルとみることができる。つまり、メッシュにしわができないことを保証しているわけではない。固定点によって大きく動かしたため、バネが裏返った状態で安定することも考えられる。

そこで球面上のしわを取り、メッシュの裏返りが起きないような計算方法を次節にて導入する。

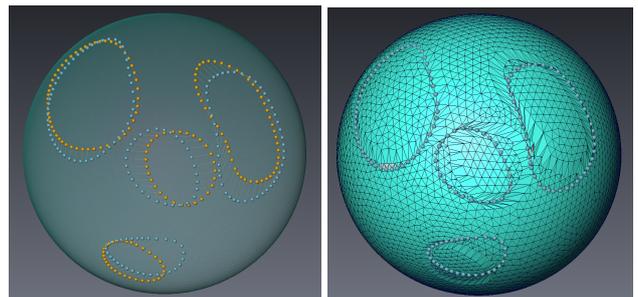


図 7 左図は $(x_{\lambda(k)}, x'_k)$ を示す。黄点が $\{x_{\lambda(k)}\}$ の境界上の節点 (図 6 の右図の黄点)。青点は $\phi_2(S_2)$ 対応する境界上の点を示す。右図は節点 $x_{\lambda(k)}$ を x'_k 上に固定した結果である。

4. 提案手法

前節では、境界を一致させるために球面から球面への写像を従来の手法に固定点を配置することによって構成しようとした。しかし、結果はメッシュの一部にしわがより、裏返った状態となった (図 8)。本節では、提案手法として新た

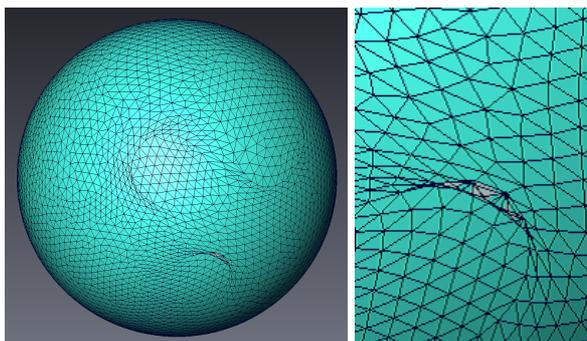


図 8 左図はエネルギー式 (5) の最小化問題を制約条件の式 (6) を課して求めた最小解 ψ によって写像した形状を表す。右図は左図の一部を拡大したものである。一部メッシュにしわができて、裏返っていることがわかる。

にエネルギーを構成した計算方法により、メッシュの裏返りが起きない写像を求めた結果を紹介する。

4.1 エネルギーの構成

たとえばシャボン玉は膜にかかる表面張力によって表面積を最小にする性質と閉じた面によって囲まれる体積を一定に保つ性質から、球面の状態で安定する [10]。エネルギーは以下のように表現できる。

$$E_s(\Omega) = a \left(\frac{1}{3} \int_{\partial\Omega} \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} dS - V_0 \right)^2 + b \int_{\partial\Omega} dS. \quad (7)$$

ここで \mathbf{n} は表面での外向き単位法線ベクトルを表し、 dS は面素を表す。また、 V_0 は単位球の体積であり、 $\partial\Omega$ は球面の領域で、 Ω は球面で覆われた領域である。 a, b はそれぞれ係数を表す。 $\int_{\partial\Omega} \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} dS$ はガウスの発散定理により以下の関係式から、

$$\int_{\Omega} dV = \int_{\Omega} \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{x} dV = \frac{1}{3} \int_{\partial\Omega} \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (8)$$

体積を表す。よって、エネルギー E_s を最小とする形状は第 1 項より、なるべく体積を V_0 を保ちつつ、第 2 項により表面積を小さくするものとなる。そのため、形状に裏返りがある場合は第 2 項のエネルギーをさらに小さくする裏返りが取れた形状が存在するため最小解にならないと考えられる。式 (8) を離散化した式 \hat{E}_s は以下ようになる。

$$\hat{E}_s(X) = a \left(\frac{1}{6} \sum_{i=1}^{|T|} \mathbf{x}_{i,1} \cdot (\mathbf{x}_{i,2} \times \mathbf{x}_{i,3}) - V_0 \right)^2 + b \sum_{i=1}^{|T|} s_i. \quad (9)$$

ここで、 $(\mathbf{x}_{i,1}, \mathbf{x}_{i,2}, \mathbf{x}_{i,3})$ は i 番目の三角形要素を構成する 3 つの節点である。しかし、上記のエネルギーのみでは、第 2 項のため、面の裏返りは抑えられるが、節点の一つの点に収束する問題が発生してしまう。したがって、以下のエネルギーを追加する。

$$\hat{E}_{tri}(X) = c \sum_{i=1}^{|T|} \left(\frac{a_i}{a'_i} - 1 \right)^2 s'_i + d \sum_{i=1}^{|T|} \left(\frac{s_i}{s'_i} - 1 \right)^2 s'_i. \quad (10)$$

ここで、 a_i は i 番目の三角形要素のアスペクト比、 a'_i は i 番目の三角形要素の初期のアスペクト比である。また、 s_i は i 番目の三角形要素の面積、 s'_i は i 番目の三角形要素の初期の面積である。したがって、式 (10) の第 1 項は初期の三角形要素のアスペクト比を保ち、第 2 項は初期の三角形要素の面積を保つ効果を持つエネルギーとなる。

最終的なエネルギーは式 (9) の \hat{E}_s に式 (10) の \hat{E}_{tri} を足し合わせた以下の式になる。

$$E(X) = \hat{E}_s(X) + \hat{E}_{tri}(X). \quad (11)$$

式 (11) の最小化問題を式 (6) の制約条件を課して解くことによって写像 ψ を求める。

4.2 計算方法

式 (11) の最小解はたとえば、最急勾配法などによって求められる。計算の方法は以下ようになる。

Step1. 境界上の頂点の設定 $\mathbf{x}_{\lambda(i)} = \mathbf{x}'_k$

Step2. 降下方向の計算 $d = -\nabla E(X)$

Step3. ステップサイズの計算

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha} E(X + \alpha d)$$

Step4. 境界以外の節点の更新 $X = X + \alpha^* d$

Step5. 収束しなかったら Step2 へ、収束したら終了

4.3 計算結果

それぞれの係数を $a = 0.5, b = 0.5, c = 50, d = 1000$ とし、上記の計算方法によって写像 ψ を求めた。図 9 は式 (11) の最小解 ψ を用いて写像した形状である。メッシュの裏返りは見られない。

以上によって写像 $\phi_2^{-1} \circ \psi \circ \phi_1$ を求めることができた。図 10 は $\phi_2^{-1} \circ \psi \circ \phi_1(M_1)$ を表す。図 5 と比較すると M_2 の境界に M_1 の境界が写像されていることがわかる。

5. まとめ

今回我々は surface parameterization によって標準心臓モデルの表面上の節点と、医療画像から抽出した固有心臓メッシュを球面へ写像し、球面上で対応点を求めることによって、標準心臓モデルの表面から固有心臓メッシュへの写像を構成する方法を考えた。ラベルを正確に写像するために球面上でラベル境界が一致するような球面から球面への写像を固定点を設定することによって求める計算方法を提案し、標準心臓モデルの表面から固有心臓メッシュへの写像を構成することができた。今回得られた表面の全単射を用いて、今後は [11] 等の手法により内部の点の全単射を求めることで、心臓間の写像を構成することを行う予定で

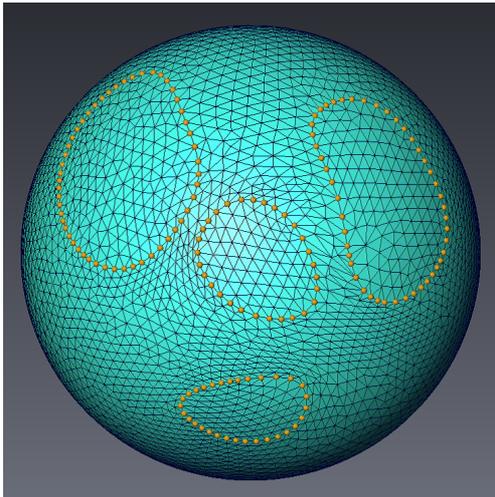


図 9 式 (11) による最適化結果. 黄点は写像された境界点を示す.

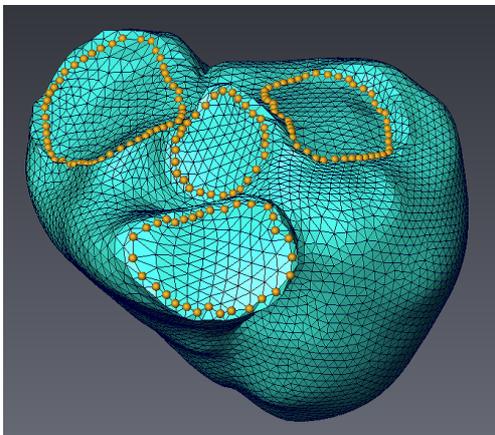


図 10 M_1 を M_2 へ写像した結果 $\phi_2^{-1} \circ \psi \circ \phi_1(M_1)$, 黄点は写像された境界を示す.

ある.

謝辞 本研究に対して, 東京大学の久田教授には心臓の形状データを頂いた. ここに記して感謝の意を表す.

参考文献

- [1] <http://www.ituaj.jp/archive/1106club.pdf>
- [2] William E. Lorensen, Harvey E. Cline: Marching Cubes *A high resolution 3D surface construction algorithm.* Computer Graphics, Vol. 21, Nr. 4, July 1987
- [3] Oliver van Kaick, Hao Zhang, Chassan Hamarneh, Daniel Cohen-Or *A Survey on Shape Correspondence* EUROGRAPHICS(2010)
- [4] Michael S.Floater and Kai Hormann *Surface Parameterization: a Tutorial and Survey*
- [5] Kai Hormann, Konrad Polthier, Alla Sheffer *Parameterization: Theory and Practice* SIGGRAPH Asia 2008 Course Notes
- [6] XIANFENG GU, SHING-TUNG YAU *COMPUTING CONFORMAL STRUCTURES OF SURFACES* COMMUNICATIONS IN INFORMATION AND SYSTEMS
- [7] Craig Gotsman, Xianfeng Gu, Alla Sheffer *Fundamentals of Spherical Parameterization for 3D Meshes* ACM(2003)
- [8] Shadi Saba, Irad Yavneh, Craig Gotsman, Alla Shef-

fer *Practical SPHERICAL Embedding of Manifold Triangle Meshes* SMI'05

- [9] LI Ying, YANG ZHOU-wang, DeNG Jian-song *Spherical parameterization of genus-zero meshes by minimizing discrete harmoni energy* Sournal of Zhejiang University SCIENCE A(2006)
- [10] ドウジェンヌ, プローシャル・ヴィアール, ケレ (奥村剛訳) *表面張力の物理学* pp.28-32 2003
- [11] Isaac Chao, Ulrich Pinkall, Patrick Sanan Peter Schroder *A Simple Geometric Model for Elastic Deformations* ACM Trans. Graph. 29, 4, Article 38 (July 2010)