一般化三並べの拡張: 一手 p 石

ディプタラマ[1]　成澤　和志[1]　篠原　歩[1]

概要：一般化三並べは，Frank Harary によって提案された 2 人完全情報ゲームであり，無限盤面において動物と呼ばれる様々な形を先に作った方が勝ちとなる，三並べを一般化したゲームである [1], [2], [3]．本論文では，一般化三並べを拡張し，先手の初手は q 個，その後交互に p 個の石を置いていく $\mathsf{GTTT}(p,q)$ を提案する．$\mathsf{GTTT}(p,q)$ において，特に $\mathsf{GTTT}(2,1)$ および $\mathsf{GTTT}(2,2)$ について解析を行い，それぞれのゲームの性質およびゲーム間の関係について述べる．また，一般化三並べでは，後手必勝となる動物は存在しないが，$\mathsf{GTTT}(p,q)$ では，後手必勝となる動物が存在する．そこで，本論文では $\mathsf{GTTT}(2,1)$ および $\mathsf{GTTT}(2,2)$ において，動物を先手必勝型，後手必勝型，引き分け型の 3 種類に分類する．$\mathsf{GTTT}(p,q)$ の引き分け型の証明では，一般化三並べで用いられる証明方法が利用できないため，新たな証明方法である拡張畳敷き戦略と 4×4 マス戦略を提案する．

Extension of Generalized Tic-Tac-Toe: p stones for one move

Diptarama[1]　Kazuyuki Narisawa[1]　Ayumi Shinohara[1]

Abstract: Generalized Tic-Tac-Toe is an achievement game introduced by Frank Harary, which two players alternately put a stone on an infinite board and the player who first achieves given polyomino, called animal, is the winner. In this paper, we propose a new achievement game, Generalized Tic-Tac-Toe(p,q) (shortly $\mathsf{GTTT}(p,q)$). In $\mathsf{GTTT}(p,q)$, opening move of black player puts q stones and after that players alternately put p stones. We analyse $\mathsf{GTTT}(2,1)$ and $\mathsf{GTTT}(2,2)$, and show some properties and relations between the games. In addition, there exist three types animals in $\mathsf{GTTT}(p,q)$ that are winner, loser, draw, although the Generalized Tic-Tac-Toe has no animal that white player wins. We classify animals in $\mathsf{GTTT}(2,1)$ and $\mathsf{GTTT}(2,2)$ into these three types. We also propose a new method to prove draw type because typical methods in the Generalized Tic-Tac-Toe can not apply to $\mathsf{GTTT}(p,q)$.

1. はじめに

一般化三並べは Frank Harary によって提案された 2 人ゲームであり，碁盤面上に先手後手が交互に石を 1 つずつ置き，目標とする石の配置を先に作ったプレイヤが勝ちという完全情報ゲームである [1], [2], [3], [4]．ここで目標とする石の配置を**動物**と呼び，その動物を構成する石の数を**細胞数**と呼ぶ．このゲームでは，動物とは辺で連結した石の配置の形である．また，90 度ごとの回転や反転した配置は同じ動物であると見なす．細胞数や石の連結の仕方によって，図 1 に示した様々な動物を作ることができる．動物の形によっては Tic や El などの名前がついているものもある．このゲームで使われる盤面の大きさは一般的に自由に決めることができるが，本研究では盤面の大きさを無限大とする．

一般化三並べの性質として，後手には必勝手順が存在せず，動物の形によって先手に必勝手順が存在するか，または勝敗がつかずにゲームが無限に続くかのどちらかであることが知られている．先手に必勝手順が存在する動物は勝ち型と呼ばれ，そうではない場合，すなわち後手がうまく防御すれば無限にゲームを続けられる動物は負け型と呼ばれている．

既存研究では，唯一，Snaky と呼ばれる細胞数 6 の動物だけが未解決問題として残されているが，他の動物については勝ち型か負け型かの判定ができているため，ハンディキャップや盤面の大きさの制限など一般化三並べの拡張を行った場合で，Snaky をはじめとする動物の判定に関する

[1] 東北大学情報科学研究科
Graduate School of Information Science, Tohoku University

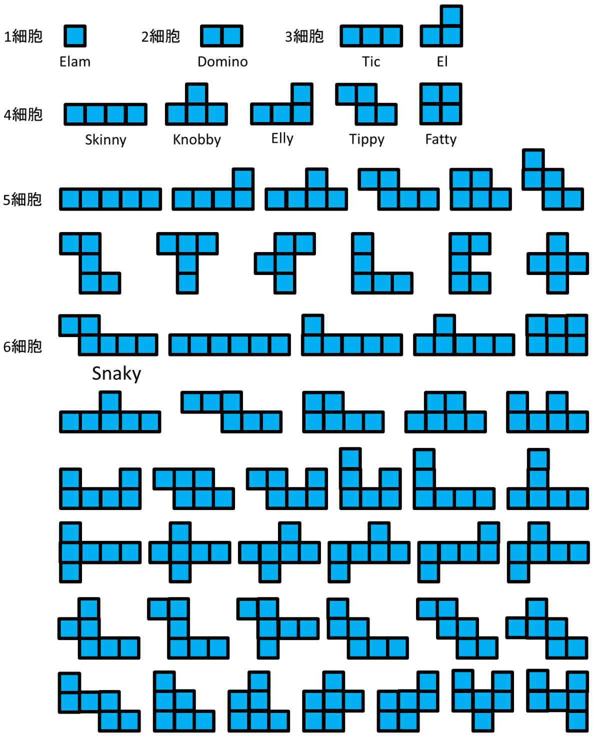

図 1　動物の例の一覧

研究が行われてきた [3], [5], [6]．拡張された一般化三並べのひとつとして，2 つの動物を組み合わせた場合の研究も行われている [7], [8]．本論文では，一般化三並べを別の方向へ拡張し，先手後手が一度に p 個（ただし，先手の初手のみ q 個）の石を置けるゲームを提案し，その考察を行う．なお，先手が 1 つ，後手が 2 つずつ石を置くことができる一般化三並べは，既に研究されている [9], [10]．また，石を斜めを許して直線的に並べる k 目並べに対する同種の拡張は既に知られており [11]，本研究の記法もその先行研究に倣うことにする．

2. 提案ゲーム

ここでは，Frank Harary が提案した一般化三並べに対して，プレイヤが 1 回の手番で置ける石を p 個に増やしたゲームである Generalized Tic-Tac-Toe(p,q)（以下 GTTT(p,q) と表す）を提案する．

定義 1. $p \geq 1$，$q \geq 1$ とする．GTTT(p,q) は無限に広がる格子盤面上に，先手が最初に q 個の石を置き，その後は各プレイヤが交互に石を p 個ずつ置き，目標とする動物を，反転と回転を許して先に作った方が勝ちというゲームである．

例えば，GTTT$(1,1)$ は既存の一般化三並べそのものであり，GTTT$(1,q)$ は先手に $q-1$ 石のハンディキャップを与えた一般化三並べと見なすことができる．特に，GTTT$(1,1)$ では未解明である Snaky も，GTTT$(1,2)$ においては勝ち型になることが示されている [12]．

既に述べたように GTTT$(1,1)$ では後手が必勝になることはないが，本論文で一般化した GTTT(p,q) では，p,q の値と動物によっては，後手勝ちになる場合も出てくる．そこで誤解を避けるために，動物の型を以下のように定義する．

定義 2. GTTT(p,q) において，目標とする動物について，先手がどんな後手の手に対しても必ず勝てるような戦略が存在するとき，その動物を**先手必勝型**と呼ぶ．一方，先手がどんな手を打っても，後手が必ず勝てるような戦略が存在するとき，その動物を**後手必勝型**と呼ぶ．また，先手も後手も必勝戦略が存在せず，互いに最善手を打つとき，決着がつかずにゲームが無限に続くとき，その動物を**引き分け型**と呼ぶ．

本論文では，特に GTTT$(2,1)$ と GTTT$(2,2)$ についての解析を行い，各ゲームの性質とゲーム間の関係を述べる．また，各動物に対して先手必勝型および後手必勝型，引き分け型の分類を行う．

3. GTTT$(2,1)$ と GTTT$(2,2)$ の性質

3.1 GTTT$(2,1)$ の性質

2 細胞動物の Domino からも容易にわかるように，GTTT$(2,1)$ では後手必勝型となる動物がいくつか存在することがわかった（詳しい分類結果は 5 節参照）．これは，通常の一般化三並べである GTTT$(1,1)$ には見られなかった新たな性質である．

GTTT(p,q) において，細胞数が偶数である動物を**偶数細胞動物**，細胞数が奇数である動物を**奇数細胞動物**と呼ぶ．また，ゲームの途中において相手が動物を作ることを阻止するように相手の石の近くに自分の石を置くことを**防御する**と言う．

GTTT$(2,1)$ において，偶数細胞動物に関して次の性質が成り立つ．

補題 1. GTTT$(2,1)$ において目標動物が偶数細胞動物であるとき，先手と後手が互いに防御せずに離れたところに石を置き続けると，後手が先に目標動物を作ることができる．

証明. 細胞数が $2n$（$n \geq 1$）である偶数細胞動物を目標とする GTTT$(2,1)$ を考える．最初に先手が盤面に 1 つの石を置き，後手が石を 2 つ置く．次に 2 番目の手番では先手も後手も石を 2 つ置くため，盤面上には先手の石が 3 つ，後手の石が 4 つ置かれている状態になる．同様にして，n 番目の手番後に先手の石が $2n-1$ 個，後手の石が $2n$ 個置かれていることになる．ここで，お互い防御をしていないため，後手が先手より先に動物を作ることができる．　□

補題 1 を用いることで GTTT$(2,1)$ に関する以下の定理を導くことができる．

定理 1. GTTT$(2,1)$ において，細胞数が偶数の動物は先手必勝型ではない．

証明. GTTT$(2,1)$ において，細胞数が偶数である先手必勝型の動物が存在すると仮定する．最初に先手が盤面に 1 つ

の石を置く．次に，後手が先手の石より十分離れているところに，動物を作るためだけに石を 2 つ置く．このとき，先手が防御をしなければ，補題 1 より後手が先に動物を作ることができるため，先手は後手に対して防御を行う必要がある．さらに仮定より，この動物は先手必勝型であるため，先手が後手に対して防御し，かつ先手が勝つことができる戦略が存在する．しかし，後手は最初から先手の初手に対してこの戦略を先に行うことができる．この戦略を使うことで後手が勝つことができる．これは，仮定と矛盾するため，偶数細胞動物は先手必勝型はではない． □

3.2 GTTT$(2,2)$ の性質

次に GTTT$(2,2)$ について考える．GTTT$(2,2)$ では GTTT$(1,1)$ の場合の議論と同様に，常に先手が有利となり，後手には必勝手順が存在しないことを示すことができる．

定理 2. GTTT$(2,2)$ において，後手必勝型になる動物は存在しない．

証明. 後手が必勝であると仮定する．この仮定より，後手は先手の初手に対して防御を行い，かつ勝てるような戦略が存在する．しかし，先手が後手より先に同じ戦略を行うことができるので，先手が勝つことができる．よって，後手必勝の仮定と矛盾するため，GTTT$(2,2)$ は後手必勝型ではない． □

また，この定理は同様の議論によって，$p=q$ である任意のゲームに対して成り立つことがわかる．

定理 3. GTTT(p,p) において，後手必勝型になる動物は存在しない．

3.3 GTTT$(2,1)$ と GTTT$(2,2)$ の関係

最後に，GTTT$(2,1)$ と GTTT$(2,2)$ の関係について考える．一般に，初手の石数 q の増加は，先手の不利に働くことはないため，GTTT$(2,1)$ で先手必勝型であれば，GTTT$(2,2)$ でも先手必勝型となる．ただし，定理 1 より，実質的には奇数細胞動物にのみ有用である．また，偶数細胞動物に関しては，次の性質が成り立つ．

定理 4. 細胞数が偶数の動物は，GTTT$(2,1)$ で後手必勝型のとき，かつそのときに限り GTTT$(2,2)$ で先手必勝型である．

証明. まず，細胞数が偶数かつ GTTT$(2,1)$ で後手必勝型である動物は，GTTT$(2,2)$ では先手必勝型であることを証明する．GTTT$(2,1)$ において細胞数が偶数であり後手必勝型である動物を考える．補題 1 より，後手は先手の石の近くではなく，遠く離れた位置に石を置いた方が有利であり，それらの石を用いた後手必勝となる戦略が存在する．ここで，GTTT$(2,2)$ においては，この戦略を最初から先手が実行すれば，先手は必ず勝つことができる．よって，GTTT$(2,1)$ で後手必勝型である動物は，GTTT$(2,2)$ では先手必勝型である．

(p,q)	偶数			奇数		
(2,1)	~~先~~	後	引	先	後	引
(2,2)	先	~~後~~	引	先	~~後~~	引

図 2 GTTT$(2,1)$ および GTTT$(2,2)$ の性質のまとめ

次に，細胞数が偶数かつ GTTT$(2,2)$ で先手必勝型である動物は，GTTT$(2,1)$ では後手必勝型であることを証明する．GTTT$(2,2)$ において細胞数が偶数で先手必勝型である動物を考える．この動物は先手必勝型であるため，先手が勝つことができる戦略が存在する．ここで，GTTT$(2,1)$ においては，先手の初手に対して，後手が遠く離れているところに GTTT$(2,1)$ での先手必勝となる戦略を実行すれば，ある時点で，先手は後手よりも多い石を置くことはできないため，後手は必ず勝つことができる． □

定理 1 および定理 2，定理 4 より，以下の関係を導くことができる．

定理 5. 細胞数が偶数の動物は，GTTT$(2,1)$ で引き分け型であるとき，かつそのときに限り GTTT$(2,2)$ で引き分け型である．

図 2 に GTTT$(2,1)$ と GTTT$(2,2)$ の関係についてまとめた図を示す．これらの性質を用いれば，1 つのゲームで動物の型を判定することで，他のゲームにおける型も決定することができる．

4. GTTT(p,q) における型判定

4.1 先手必勝型と後手必勝型

動物が先手必勝型（後手必勝型も同様）であることを証明する方法の 1 つとして必勝手順を提示する方法がある．必勝手順を提示する方法はすべての後手の石の置き方に対して先手が必ず勝てるような手順を示さなければならない．しかし，すべての可能性を考えると示さなければならない盤面は膨大になる．特に 1 つの手番で複数の石を置くと，1 つの手番の石の置き方はその石の数に対して指数的に増える．その膨大な盤面の数を圧縮するためにいくつかの手をまとめて，同時に証明することで効率的に必勝手順を示すことができる．

図 3 に，5 細胞の L 字の動物を目標とする GTTT$(2,1)$ の必勝手順の例を示す．先手の初手に対する後手の置き方は，図 3 の (a)〜(e) に示す 5 通りである．ここで，後手は先手を防御するために初手の石に隣接した場所に置く場合のみを考える．また，石の中の数字は石を置く順番を表す．次に，先手が図のように 2 番の黒石を置いたとすると，後手は先手の勝ちを防ぐために点線の円で示すすべての場所に石を置かなければならない．しかし，後手が石を 2 つしか置くことができないため，先手は目標の L 字を必ず作る

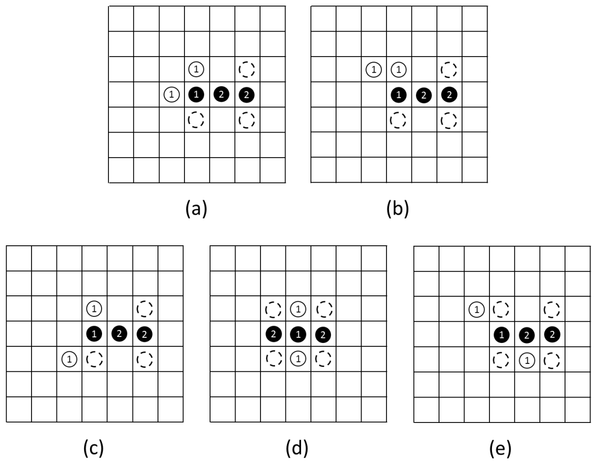

図 3　L 字型の 5 細胞動物を目標とする GTTT(2,1) の必勝手順

ことができる．

4.2　引き分け型

4.2.1　GTTT(1,1) における証明方法

ここでは，GTTT(1,1) において動物が引き分け型であることを証明する既存方法である，畳敷き戦略を用いた証明方法と 3×3 マスの盤面を用いた 2 つの証明方法を紹介する [1], [3].

畳敷き戦略とは，連続した 2 マスを 1 つの畳として盤面上に畳を重ならずに敷き詰め，先手の手に対して後手が同じ畳に石を置くという戦略である．この戦略によって 1 枚の畳に対して必ず先手と後手の石が置かれていることになる．動物をどこに置いても必ず 1 つ以上の畳を含む畳の敷き詰め方が存在すれば，その動物は引き分け型である．つまり，先手が任意の位置に動物を作ろうとしても，その動物の形の中に必ず後手の石が含まれるので，先手は動物を作ることができない．

畳敷き戦略の例として，図 4 に，十字型の 6 細胞動物を目標とする GTTT(1,1) における畳敷きの方法を示す．ここでは黒が先手，白が後手とし，十字の動物を防ぐ畳敷き戦略を示す．(a) は畳敷き戦略に置ける石の置き方を示し，黒の石の配置に対して，白が同じ畳に置く．(b) は先手が十字型の動物を作ろうとしたとき，この動物を任意の位置に置いたとしても必ず畳を 1 枚は含むことを示す．これより，この動物は GTTT(1,1) において引き分け型であることが証明できる．

3×3 マスの盤面を用いた証明は，三目並べの性質を利用した証明方法である．三目並べでは先手後手がともに最善手を打てば，必ず引き分けになるので，3×3 マスの盤面に先手および後手が直線を作ることができない．この性質を利用して，5 マス以上の直線が含まれている動物が引き分け型であることを証明する．

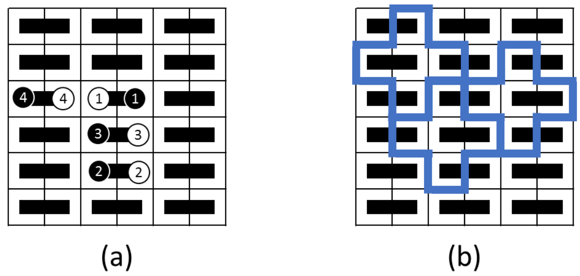

図 4　十字型の動物を目標とする GTTT(1,1) における畳敷き戦略

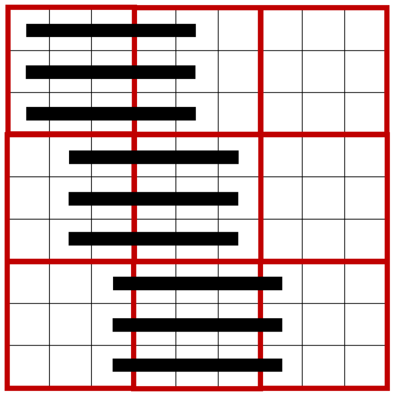

図 5　3×3 マス戦略の例

図 5 に示すように盤面上に畳敷き戦略と同様に 3×3 のマスを 1 組として盤面上に敷き詰める．ここで，細胞数 5 の直線の動物を盤面上のどこにおいても必ず 3×3 マスの中に 3 マスの直線が含まれている．三目並べの性質より，3×3 マスの盤面に直線を作ることができないので，この動物を作ることができず，引き分け型であると判定できる．

この 2 つの証明方法は GTTT(1,1) に対しては有効であるが，GTTT(2,1) および GTTT(2,2) における引き分け型の証明には使うことができない．なぜなら，畳敷き戦略は必ず 1 つの畳に先手後手の両方の石が 1 つずつ含まなければならないが，GTTT(2,1) では先手または後手が同時に同じ畳に石を 2 つ置くことで畳に先手または後手の石しか含まないことが可能になる．そのため，畳敷き戦略は無効になる．また，三目並べでは先手後手が 1 つずつ石を置くと引き分けになるが，2 つずつ石を置くとすれば，先手が必勝になるので，3×3 マスの盤面を用いた証明方法も無効である．そこで，GTTT(2,1) および GTTT(2,2) に対する新たな引き分け型の証明方法を提案する．

4.2.2　GTTT(2,1)，GTTT(2,2) における証明方法

ここでは，GTTT(2,1) および GTTT(2,2) における引き分け型を判定するための証明方法として，畳敷き戦略における拡張畳を使った方法と，3×3 マス戦略の拡張である 4×4 マス戦略を提案する．

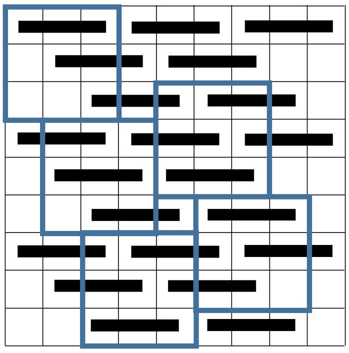

図 6　3×3 の正方形の 9 細胞動物を目標とするゲームにおいて，3 マス畳のひとつである Tic 畳を用いた畳敷き戦略

4.2.2.1　3 マス畳による畳敷き戦略

まず，既存の畳敷き戦略の自然な拡張として，畳の大きさを 3 マスに拡張した **3 マス畳**を用いた畳敷き戦略を提案する．3 マス畳の形には，直線型の **Tic 畳**と L 字型の **El 畳**がある．この 3 マス畳の敷き方は，既存の畳敷き戦略と同様に盤面上に畳を重ならないように敷き詰める．

3 マス畳敷き戦略において，先手の石の置き方は，同じ畳に石を 2 つ置く場合と別々の 2 つの畳にそれぞれ石を 1 つ置く場合の 2 通りの置き方が存在する．これに対する後手の石の置き方は，先手が同じ畳に石を 2 つ置く場合は，後手が先手と同じ畳に 1 つの石を置き，任意の位置にもう 1 つの石を置けばよく，先手が別々の 2 つの畳に石を置く場合は，後手がそれらの畳にそれぞれ石を 1 つ置けばよい．この置き方によって，先手が石を置いた畳には必ず後手の石も置かれていることになる．よって，3 マス畳においても，目標とする動物を任意の位置に置いたときに，必ず畳を含むような畳の敷き方が存在すれば，その動物は引き分け型であると判定できる．

3 マス畳のひとつである Tic 畳を用いた畳敷き戦略の例を図 6 に示す．ここで，大きさ 3 の正方形の動物を目標とすると，この動物をどこに置いても必ず 3 マスの Tic 畳が含まれているので，この動物は引き分け型である．

3 マス畳による畳敷き戦略は，3 マスの畳を含むような細胞数が多い動物に対して引き分け型を証明することができるが，細胞数が少ないまたは複雑な形のため 3 マス畳を含まないような動物に対しては，引き分け型を証明することができない．そこで，3 マス畳を組み合わせた新しい畳による証明方法を提案する．

4.2.2.2　組合せ 4 マス畳による畳敷き戦略

2 つの 3 マス畳を，2 マスが重複するように重ね合わせてできる 4 マスの畳を**組合せ 4 マス畳**と呼ぶ．組合せ 4 マス畳の中で重複しているマスを重複マス，重複していないマスを非重複マスと呼ぶ．重複マスと非重複マスは必ず 2 マスずつ存在する．組合せ 4 マス畳には，図 7 に示す 6 種類が存在する．

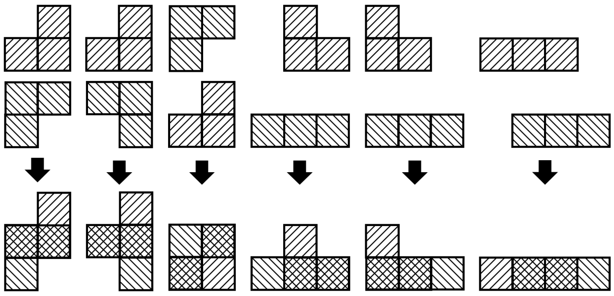

図 7　3 マス畳を組合せた組合せ 4 マス畳

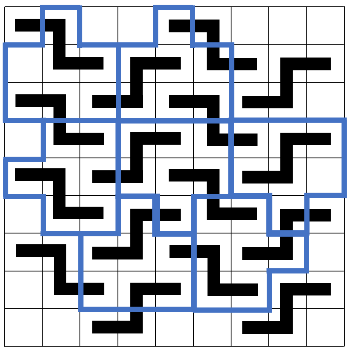

図 8　凸型動物を目標とするゲームにおける，組合せ Tippy 畳を用いた畳敷き戦略

この戦略では，組合せ 4 マス畳を，盤面上に重ならないように敷き詰める．組合せ 4 マス畳に対する先手の石の置き方は，3 マス畳と同様に，同じ畳に石を 2 つ置く場合と別々の畳にそれぞれ石を 2 つ置く場合の 2 通りの置き方が存在する．先手が同じ畳に石を 2 つ置く場合には，3 マス畳の場合と同様に，後手も先手と同じ畳に石を 2 つ置けばよい．しかし，先手が別々の畳にそれぞれ石を置く場合は，後手は同じ畳の中の重複マスに石を置かなければいけない．

この戦略では，目標とする動物を任意の位置に置いたとき，必ず基となる 3 マス畳を含むように，組合せ 4 マス畳を敷き詰める畳の敷き方が存在すれば，その動物は引き分け型であると判定できる．

組合せ 4 マス畳を用いた畳敷き戦略の例として，図 8 に凸型の動物を目標とするゲームに対する，組合せ Tippy 畳を用いた畳敷き戦略を示す．ここで，目標とする動物はどこに置いても必ず El 型の 3 マス畳を含んでいるため，この動物は引き分け型である．

4.2.2.3　4×4 マス戦略

次に，3×3 マスの盤面による証明を拡張した，4×4 マスの盤面を用いた新たな引き分け型の証明方法を提案する．

最初に，4×4 マスの盤面を用いたゲームを以下のように定義する．

定義 3 (拡張 4 目並べ)**.** 4×4 マスの盤面上に，先手後手が交互に石を置いていく．先手は 1 回に置く石の数を 1 つまたは 2 つのどちらかから自由に選び石を置く，それに対して後手が同じ数の石を置く．先に縦または横に石を 4 つ並べた方が勝ちというゲームである．

拡張 4 目並べにおいて，次の性質が成り立つ．

定理 6. 拡張 4 目並べにおいて，先手後手が最善手を打てば，必ず引き分けになる．

証明. 図 9 に初期盤面に対する置き方を示す．置く場所の組合せは複数存在するが，ここでは，黒石を置くことによって直線を作ることができる可能性に対してのみ考慮すればよいため，代表的な置き方のみを表す．図中の点線は黒石が直線を作る可能性があることを示す．

図の (1) および (7) は先手が石を 2 つ，(9) は先手が石を 1 つ置く場合である．(1) において，縦の点線上に後手が石を置かなければ，次の手番において先手が直線を作ることができるため，後手は (2) に示す置き方を最善手とする．次に，先手は (3)，(5) に示す置き方が最善手として考えられ，これに対する後手の最善手は (4)，(6) がそれぞれ考えられる．(4) において，先手が直線を作るためには次の手番で点線上に 3 つの石を置かなければならないが，一度に 2 つの石しか置くことができないため，次に後手はこれを防ぐことができる．よって，この手順では引き分けとなる．また，(6) においては，先手後手ともにどこに置いても直線を作ることができないため引き分けとなる．(7) において，後手の最善手は点線の交点に石を置くことであり，(8) のようになる．(8) において，先手がどのように石を置いたとしても，後手はこれを防ぐことができるため，引き分けとなる．

また，図 10 に図 9 の (10) に対する引き分け手順を示す．この盤面に対して，先手が石を 1 つ置く場合は，図 9 の (1) および (7) と同じになる．2 つの石を置く場合の最善手は，図 10 のようになる．盤面 (14)，(18) は図 9 の (6) と同様に引き分けになる．盤面 (16)，(20)，(22) は図 10 の (12) と同様に引き分けになる．

よって，拡張 4×4 目並べは先手後手ともに最善手を打てば引き分けとなる． □

この 4×4 マスゲームではお互い最善手を打てば引き分けになるという性質を利用して，細胞数 7 の直線の動物を含む動物が引き分け型であることを証明する．無限大の盤面に 4×4 マスを 1 組として敷き詰める．ここで，細胞数 7 の直線の動物を盤面上にどこにおいても，必ず 4×4 マスの盤面の中に 4 マスの直線が含まれている．よって，定理 6 より 4×4 マスの盤面に直線を作ることができないので，この動物は引き分け型である．

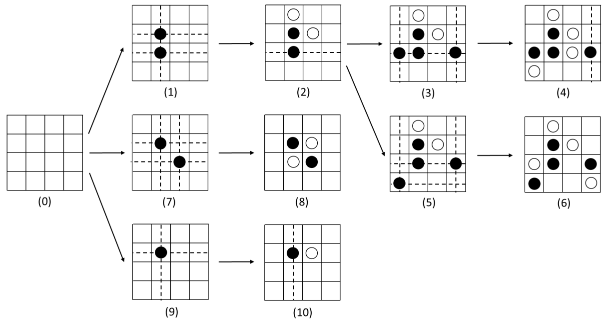

図 9 拡張 4 目並べにおける引き分け手順

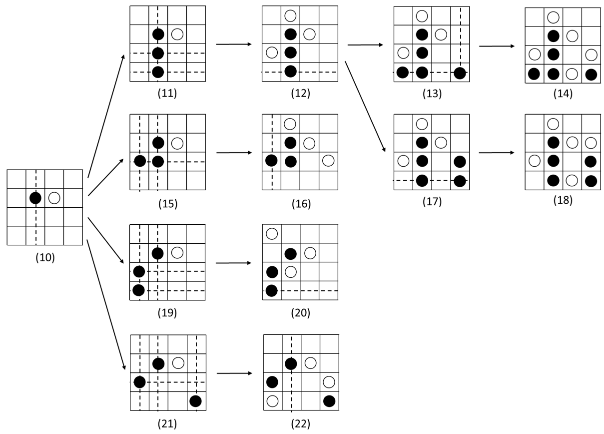

図 10 図 9 の (10) に対する引き分け手順

5. 動物の分類結果

GTTT(2,1) および GTTT(2,2) において，それぞれの動物に対して，先手必勝型，後手必勝型，引き分け型の分類を行った．先手必勝型と後手必勝型については，証明数探索 [13] を用いた計算機実験によって，必勝手順の検証を行っている．引き分け型については，防御のための既存手法である畳敷き戦略がそのままでは適用できないため，提案した組合せ 4 マス畳敷き戦略および 4×4 マス戦略を用いて，引き分け型の動物を証明する．

各ゲームでの動物の分類結果を図 12 および図 13 に示す．また，比較のため既存研究である GTTT(1,1) における動物の分類結果を図 11 に示す．

GTTT(2,1) においては，細胞数 4 までのすべての動物について，5 細胞動物については 4 つの動物を除くすべての動物について，型による分類を行うことができた．これにより，GTTT(1,1) では後手必勝型の動物は存在しないが，GTTT(2,1) では 7 種類の偶数細胞数の動物が後手必勝型であることがわかった．同様に，GTTT(2,2) においては，細胞数 5 までは十字型の 5 細胞動物以外のすべての動物を分類することができた．さらに，GTTT(2,1) および

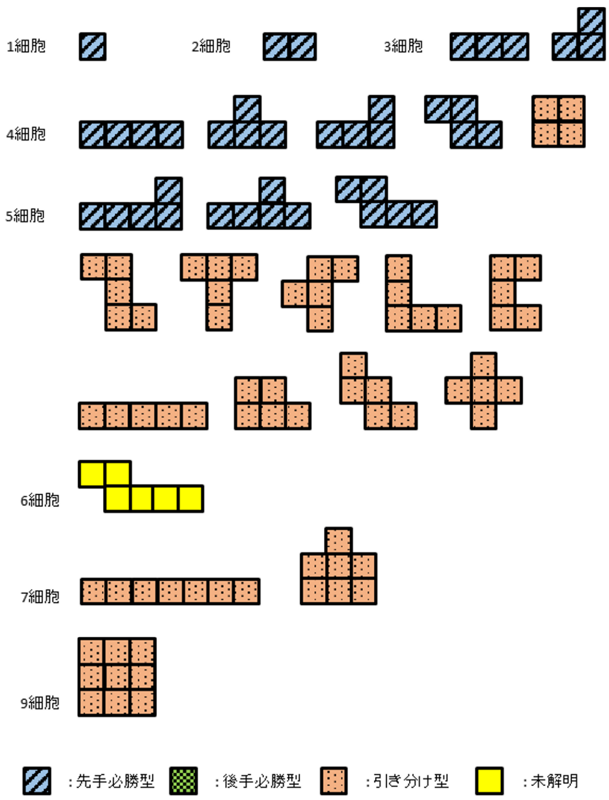

図 11 GTTT$(1,1)$ における動物の分類結果

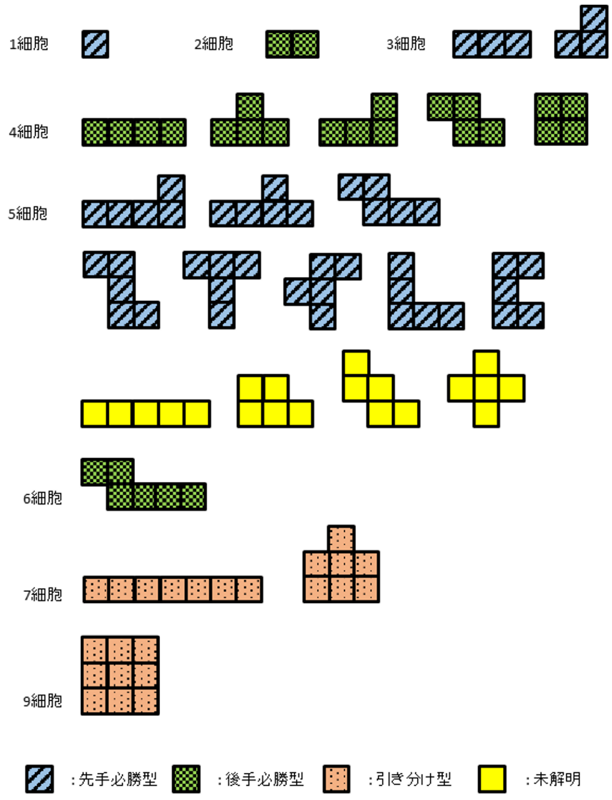

図 12 GTTT$(2,1)$ における動物の分類結果

GTTT$(2,2)$ において，直線型，凸型の 7 細胞動物および正方形の 9 細胞動物に対して，拡張畳敷き戦略や 4×4 マス戦略を用いることによって引き分け型であることがわかった．

また，GTTT$(1,1)$ では引き分け型であるが，GTTT$(2,2)$ では先手必勝型になる動物が存在した．これは，GTTT$(2,2)$ では先手が石を 2 個同時に置くことで有利になるからと考えられる．なお，一般化三並べ GTTT$(1,1)$（図 11 参照）では未解明である 6 細胞動物の Snaky は，GTTT$(2,1)$ では後手必勝型，GTTT$(2,2)$ では先手必勝型であることがわかった．

6. まとめと今後の課題

本論文では，一般化三並べの拡張として，先手の初手に置く石の数を q，その後に置く石の数を p とした GTTT(p,q) を提案した．特に GTTT$(2,1)$ および GTTT$(2,2)$ に対して解析を行い，各ゲームでの性質および，2 つのゲーム間の関係を示した．また，GTTT(p,q) は一般化三並べにはない後手必勝型の動物が存在するため，GTTT$(2,1)$ および GTTT$(2,2)$ における動物を先手必勝型，後手必勝型，引き分け型の 3 種類に分類した．このとき，引き分け型であることを証明するための新しい証明方法として，拡張畳敷き戦略と 4×4 マス戦略を提案した．

今後の課題として，まだ分類されていない動物をすべて分類することである．また，本論文では $p = 2$ の場合につ

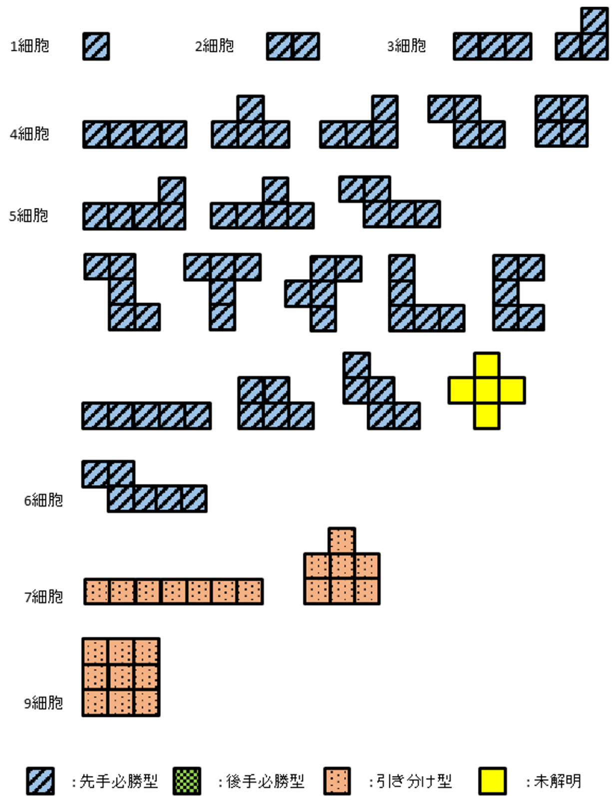

図 13 GTTT$(2,2)$ における動物の分類結果

いてのみ考えたが，より一般的な GTTT(p,q) においても様々な性質を発見することが考えられる．

参考文献

[1] Frank Harary. Achievement and avoidance games for graphs. In *Conference on Graph Theory*, Vol. 62, pp. 111–119, 1982.

[2] Harary Frank and Harborth Heiko. Achievement and avoidance games with triangular animals. *Recreational Math*, Vol. 18, pp. 110–115, 1986.

[3] 伊藤大雄. パズル・ゲームで楽しむ数学: 娯楽数学の世界. 森北出版, 2010.

[4] Frank Harary. Achieving the skinny animal. *Eureka*, Vol. 42, pp. 8–14, 1982.

[5] Heiko Harborth and Markus Seemann. *Snaky is an edge-to-edge looser*. Institute für Mathematik, Techn. Univ., 1996.

[6] Heiko Harborth and Markus Seemann. *Snaky is a paving winner*. Institute für Mathematik, Techn. Univ., 1996.

[7] 八鍬友貴, 本田耕一, 篠原歩. 一般化三並べの変種:負け型のペアは勝てるのか? 第 14 回ゲームプログラミングワークショップ, pp. 35–42, 2009.

[8] 本田耕一, 八鍬友貴, 成澤和志, 篠原歩. 一般化三並べの拡張 : 禁止動物の導入. 第 13 回ゲームプログラミングワークショップ, pp. 94–100, 2010.

[9] Nándor Sieben. Hexagonal polyomino weak (1, 2)-achievement games. *Acta Cybern.*, Vol. 16, No. 4, pp. 579–585, 2004.

[10] Edgar Fisher and Nándor Sieben. Rectangular polyomino set weak (1, 2)-achievement games. *Theoretical Computer Science*, Vol. 409, No. 3, pp. 333–340, 2008.

[11] I-Chen Wu and Dei-Yen Huang. A new family of *k*-in-a-row games. In *Advances in Computer Games*, pp. 180–194, 2006.

[12] Hiro Ito and Hiromitsu Miyagawa. Snaky is a winner with one handicap. In *HERCMA 2007*, pp. 25–26, 2007.

[13] L.Victor Allis, Maarten van der Meulen, and H.Jaap van jden Herik. Proof-number search. *Artificial Intelligence*, Vol. 66, pp. 91–124, 1994.