

3つのネットワーク結合離散系カオス変動モデルにおける edge snappingによる同期化とその応用

時永 祥三^{1,a)}

受付日 2012年11月6日, 再受付日 2012年12月25日/2013年1月13日,
採録日 2013年1月27日

概要: 最近, ネットワーク結合する変動要素の特性値を相互参照して調整する (edge snapping と呼ばれる) ことで同期化を行う方法が示されているが, 連続系に限られ, 応用例が示されていないという問題がある. 本論文では, 3つのネットワーク結合離散系カオス変動モデルにおける edge snapping による同期化とその応用について述べる. 本論文ではまず, 複数の離散系カオス変動系が構成単位として存在し, これらがネットワークにより結合された3つのモデルを定義する. これらのモデルにおいては構成単位が次のように定義される. すなわち, プロダクト作製において協調するサイトの運営者と移動可能なメンバが2サイトに存在するモデル (Model C), サービス施設において待ち時間に応じて入力を規制する, いわゆる pricing を行うモデル (Model P), 資産運用問題において利益に応じて資金の借入を決定するモデル (Model I) である. 次に, edge snapping の原理に基づいて, ある構成単位 i と他方の構成単位 j との間の結合係数 σ_{ij} が, 構成単位 i の特性の差異を変数として含むダイナミクスにより決定される仕組みを述べる. さらにこれを簡素化した方法論として, 構成単位 i, j の間の構成単位 i の特性の差異が最大となるケースを求め, このケースに比例させながら同期化をはかる方法を提案する. 応用例として, カオス同期化が可能となる条件および現実データへの適用可能性を考察する.

キーワード: 離散系カオス, カオス同期化, edge snapping, 結合係数, 金融時系列

Synchronization of Fluctuation in Three Networks Composed of Connection of Elements Having Discrete Chaotic Behaviors Based on the Edge Snapping and Their Applications

SHOZO TOKINAGA^{1,a)}

Received: November 6, 2012, Revised: December 25, 2012/January 13, 2013,
Accepted: January 27, 2013

Abstract: This paper deals with the synchronization of fluctuation in three networks composed of connection of elements having discrete chaotic behaviors based on the edge snapping and their applications. We define three types of models of networks consisting of elements having chaotic behaviors. In the first model (Model C), one element is defined as the creation of products in OSSC (Open Source Software Community) by collaboration owners and members on two sites. In the second model (Model P), the input to a queuing system is controlled according to the waiting time (so-called pricing). Additionally, in the third model (Model I), debts in operation of funds are controlled depending on profits. In the edge snapping, we assume that the coupling gains between i -th and j -th element follows a dynamics governed by the difference of features of elements i and j . More over, we propose more simplified synchronization by observing the maximum value of difference of features between i -th and j -th elements. As applications, we show the condition for attainable synchronization and applicability to real data.

Keywords: discrete chaotic systems, synchronization of chaos, edge snapping, coupling gains, financial time series

1. まえがき

ネットワークなどで相互に接続された複数の構成単位における振動を制御し、信号を同期化する問題は通信、生物学、光学などの広い範囲で観測され、これまでいくつかの従来手法を基礎とした方法論が提案されている [1], [2], [3]. カオス同期とならんで適用されるカオス制御でも、フィードバック制御を用いて目標レベルとの差異を外力の印加により調整するものがある [4], [5], [6]. しかしながら、最近注目されている同期化の方法として、振動をする構成単位間の接続関係（初期段階ではすべては未接続）を最適化するものが提案され、構成単位を結ぶ枝の接続・未接続を最適化することから edge snapping と呼ばれている [7], [8], [9]. これまで edge snapping による同期化の適用は連続系の問題への適用に限定されており、離散系の変動モデル特にカオス変動モデルへと適用する方法論を議論する必要がある。この場合、同期化が完了するための条件などを整理する必要があり、連続系から離散系への拡張が可能であるかを検証することや、離散系における同期化の特徴を分析する必要がある [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26]. 本論文では、3つのネットワーク結合離散系カオス変動モデルにおける edge snapping による同期化とその応用について示す。

本論文ではまず、ここで取り扱う3つのモデルを定義する。なお、本論文で提案するネットワーク結合離散系カオス変動における同期化手法の新規性については、(1) ネットワーク結合の離散系カオスモデル分析、(2) edge snapping の適用可能性の分析、の2つの点にまとめることができる。まず第1番目のモデル (Model C) においては、構成単位が次のように定義され、これらがネットワークにより結合されていると仮定する [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16]. すなわち、プロダクト作製において協調するサイトの運営者と移動可能なメンバが2サイトに存在する構成単位であり、メンバだけがサイト間を移動できるが、あるサイトから別のサイトにプロダクトを移動させる $T \geq 1$ のコストが発生すると仮定する。第2番目のモデルは、待ち行列モデルにおいて待ち時間に応じて入力を規制する、いわゆる pricing を行う構成単位がネットワーク結合されたモデルである (Model P) [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24]. 第3番目のモデルにおいては、資産運用問題において利益に応じて資金の借入を決定する挙動を定式化した構成単位が、ネットワーク結合されたモデルである (Model I) [25], [26], [27]. 次に、edge snapping の原理に基づいて、ある構成単位 i と他方の構成単位 j との間の結合係数 σ_{ij} が、

構成単位の特性の差異を変数として含むダイナミクスにより決定される仕組みを述べる。すなわち時間遅れに関する2次の振動系に従って結合係数が滑らかに変化する仕組みであり、構成単位の特性の間の差異に応じて、これを縮小する方向に結合係数が調整され、最終的には $\sigma_{ij} = 1$ あるいは $\sigma_{ij} = 0$ が達成される。さらにこれを簡素化した方法論として構成単位 i, j の間の構成単位の特性の差異が最大となるケースを求め、このケースに比例させながら同期化をはかることにより、カオス同期化を行う方法を提案する。応用例として、カオス同期化が可能となる条件、および現実データへの適用可能性を考察する。これは、たとえばそれぞれの国が閉鎖的ではなく連係をする場合には、景気変動がそろそろケースが出現する同期化現象の解明に有用である。

以下、2章ではネットワーク結合離散系カオス変動モデルについて述べる。3章では edge snapping による離散系カオス同期化を述べる。4章では応用例として、カオス変動の同期化と、その条件について考察する。

2. ネットワーク結合離散系カオス変動モデル

2.1 ネットワーク結合離散系カオス同期化問題における本論文手法の意義

本論文では3つのネットワーク結合離散系カオス変動モデルにおける同期化を議論しているが、この分野における我々の方法論の新規性については、(1) ネットワーク結合の離散系カオスモデル分析、(2) edge snapping の適用可能性の分析、の2つの点にまとめることができる。まず(1)として、研究の背景となっているネットワーク結合離散系カオス変動モデルを提案しており、文献 [10], [17], [25] などに示されている先行研究においては単独の離散系モデルだけを議論しているという限界があり、我々の研究はこれを解決する1つの方法である点を指摘できる。すなわち我々は単独モデルをネットワーク結合の形式へと拡張することや、その場合におけるカオス変動の発生条件などを詳細に検討しており、先行研究では明らかにされていなかった、より広いクラスの問題を解いている [15], [23], [24]. 本論文は、このようなネットワーク結合離散系カオス変動モデルの拡張問題の1つを論じている。次に(2)として、ネットワーク結合離散系カオス変動モデルにおける同期化において edge snapping を適用する方法論を論じている点については、文献 [3], [7] などの先行研究では連続系カオス変動だけが議論されており、これが離散系カオスにも適用可能であるのかは論じられていないという問題を解決したことになっている。一般的に、連続系カオス変動を時間差分などにより離散系モデルとして近似しても、異なる挙動を示すことはよく知られているので、離散系においては、連続系における問題とは別に議論する必要がある。本論文では3つのネットワーク結合離散系カオス変動モデルに限定は

¹ 九州大学大学院経済学研究院
Graduate School of Economics, Kyushu University, Fukuoka
812-8581, Japan

a) tokinaga@econ.kyushu-u.ac.jp

されているが、edge snapping 手法が適用可能であるケースが存在することを示している。また、edge snapping による同期化が完了収束する証明を Z 変換を用いて示しているので、今後新たな離散系カオス変動モデルを分析の対象とする場合にも、この結果を適用することができる。

2.2 3つの離散系カオス変動モデル

離散系カオス変動モデルの説明を行う前に、まず最初に3つのモデルを選択した理由と、これらのモデルの概要についてまとめておく。一般的なカオス現象の数値モデルには、連続系としてはよく知られているレスラー系などのシステムが存在する。しかしながら連続系のモデルの多くが人工的に考えられたモデルであり、現実に観測される振動現象（これらの多くを実際にカオスであるかどうかを証明するのは容易ではない）は、離散的なケースがきわめて多数である。したがって、離散系のカオス変動のモデルを考察することは、現実の現象を解明するための有用な方法であると思われる。

しかしながら一方では、離散系のカオス変動をモデル化したものは経済分野などでは多数見られるが、狭い専門領域での研究に限定されている。このような事情を考慮しながら、我々は離散系カオス変動モデルを選択した結果、ここに示す3つのモデルは比較的理解が容易であり、応用例についても多くを見出すことができると判断している。しかしながら提案するモデルも限定された3つのモデルであり、一般的な数値モデルの全部をカバーするものではないという限界も存在することを明示しておく。

図1には、本論文で用いる3つの離散系カオス変動の概要を説明する図を示している。それぞれのモデル化にあたっての変数や数式などの説明は、後続の節において述べるので、以下では概要だけを説明する。

(Model C)

インターネットの OSSC (Open Source Software Community) などにおけるメンバの離合集散などを説明するモデルであり、現在所属しているサイト (Site 1) より魅力的である (Higher value) と判断される別のサイト (Site 2) に移動する。しかし、魅力的であるサイトでは、それなりの負担 (Higher payment) が要求されるので、やがてもとのサイトへの回帰が選択される。このように、メンバが2つのサイトの間で移動を繰り返す現象を説明している。

(Model P)

テーマパークなどのサービス施設 (Service facility) に客が到着するケースなどを説明するものであり、待ち時間 (Queue with waiting) が少ないと判断すると入場 (Join) するが、待ち時間が多いと判断すると退去 (Balk) する。しかしこのような流れが継続されると、次には待ち時間が少ないと判断する客が殺到して、客の流れの変動が増幅されてしまう。

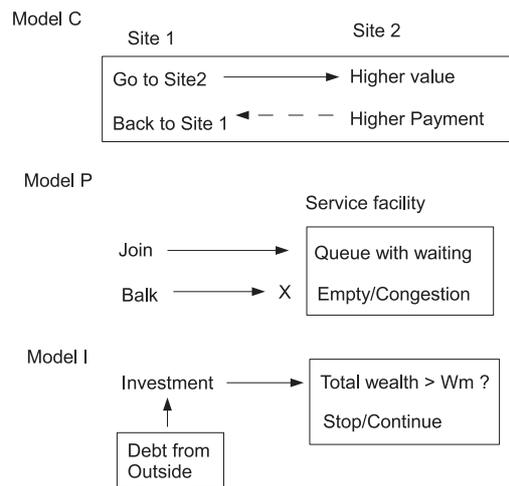


図1 3つの離散系カオス変動モデルの概要

Fig. 1 Overview of three discrete chaotic fluctuation models.

(Model I)

Model Iはある変数の変動が外部からの要因で変動したり、条件に応じて変数の挙動が異なったりするケースをモデル化したものである。事例として、比較的理解が容易であるものを用いて説明する。個人が資産運用 (Operation of funds) を行う行動をモデル化したものがこの Model I の事例であり、個人として貯蓄だけを行うケースと、いわゆるアントレプレナ (entrepreneur) と呼ばれる小規模の事業を立ち上げる場合を含むと仮定する。その場合、資金が足りないと外部から借入を行う (Debt from Outside) ことを含んだモデルである。このモデルにおいては、一定の資産 (W^m) が形成されたら、積極的な事業への投資ではなく銀行に預金をして利子を稼ぐ (Stop of investment) 行動にでる。一方で、借入した資金を返済しながら資産を蓄積していく行動をとるので、借入の比率がある値になると、資産の時系列にカオス変動が発生する。

2.3 メンバ移動の基本モデル：Model C

ここで述べる数値モデルは、人や物の移動におけるカオス現象を説明するために有効なモデルであり、これまでインターネットにおける OSSC やコミュニティ形成におけるメンバの離合集散の説明や、労働力の移動のパターン、雇用の地域的な偏りを説明するために利用されている [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16]。モデルにおけるパラメータを変化させることにより、メンバの移動がカオス的に変動することが示される。このシステムを構成単位として、それぞれがネットワーク結合されたモデルを Model C と呼ぶことにする。構成単位のネットワーク結合の仕組みについては後述するので、以下では構成単位におけるカオス変動を説明する [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16]。

なおモデルを説明するために、特定の分かりやすい事例を用いた方が便利であるので、以下では予備知識なしでも

比較的理解しやすい OSSC におけるメンバの離合集散を例として説明する。

いま OSSC を開設するエージェントであるサイトの運営者と、これらのサイトに参加して共同でソフト開発などの労力を提供するエージェントであるメンバが存在すると仮定する。サイトでは共同でソフト開発などの作業が実施され、これがメンバにとっての魅力（参加する意義）となっていると仮定する。作製されたソフトなどを、簡単のためプロダクトと呼んでおく。地理的に2つのサイト ($i = 1, 2$) を仮定し、これらのそれぞれのサイトに、複数のサイトの運営者と複数のメンバ（配分される要素）が存在すると仮定する。すなわち1つのサイトの中に複数の運営者・メンバが存在すると仮定する。サイトの運営者はサイト間を移動はできないが、メンバは他の有利と思われるサイトへと移動可能であるとする。

話を簡単にするために、メンバのプールがサイト1に存在し、このプールから離脱してメンバはサイト2へと移動できると仮定しておく。なお、このようなメンバが移動可能であることに対応して、プロダクトの移動コストを導入する。いま $T (\geq 1)$ はプロダクトの移動コストであり、あるサイトから別のサイトにプロダクトを移動するとき、単位プロダクトあたりに要する費用の割合である。この T を用いてプロダクトの取得可能数を $1/T$ とすることもできるが、以下では別のサイト j のプロダクトを取得するときの評価値 p_j が、 p_j から $p_j T$ へと変化することで表現している。

協調関係により生産されるプロダクトは1種類としておく。プロダクト作製のモデルはさまざまなものが存在するが、以下では簡単なモデルを用いる。なお以下の式の説明で用いる変数の意味については、次のようになる。

$p_i(t), w_i(t)$: サイト i で作製されるプロダクト評価値とメンバの満足度

ν : メンバの取得予算のプロダクトへの支出割合

$G_i(t)$: サイト i でのプロダクトの評価値の指数

メンバの総数を L とすると、これがサイト1に存在する割合は $\theta_1(t)$ であるので、サイト1のエージェント数は $\theta_1(t)L$ となる。なお、本論文ではこのような複数サイトにおけるエージェント配置のカオス変動の詳細を議論することが目的ではないので、以下では最小限に必要な式だけを示し、この導出にいたる過程は付録Aに示すことにする。

本論文の議論において必要となる主要な式は、以下のものである。サイト1におけるメンバの割合である $\theta_1(t)$ の遷移については、次のような過程をたどる [10], [11], [12] (なお $\theta_2(t) = 1 - \theta_1(t)$ である)。

$$\theta_1(t+1) = \theta_1(t) + \theta_1(t)(1-\theta_1(t))L\gamma \ln \frac{w_1(t)}{w_2(t)} \left(\frac{G_2(t)}{G_1(t)} \right)^\nu \quad (1)$$

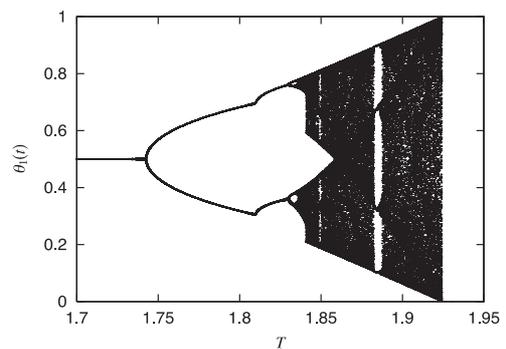


図2 パラメータ T に依存する変数 $\theta_1(t)$ の分岐図
Fig. 2 Bifurcation diagram of $\theta_1(t)$ depending on T .

ここでサイト1, 2におけるプロダクトの評価指数 $G_1(t), G_2(t)$ は付録Aにその比率が定義されている。 γ はサイト間のメンバの移動速度のパラメータである。この右辺の関数を $f_C(\theta_1)$ として定義しておく。メンバの存在割合 θ_1 の初期値は乱数により与えるので、カオスが発生する場合には初期値依存により、一般的にはサイトが異なれば挙動も異なることになる。しかし T が相対的に小さい場合には、カオス的な変動を起こさない領域となるので、サイトにかかわらず θ_1 は同じ値（時不変）になる。

Model C は、このようなカオス変動システムを1つの構成単位として、これらがネットワーク結合されたモデルである。図2には、1つの構成単位におけるカオス変動を説明するために、パラメータ T に依存する変数 $\theta_1(t)$ の分岐図を描いている。この図より分かるように、パラメータが $T > 1.76$ となる範囲では変数 θ_1 はカオス変動に従った挙動となる。

2.4 サービス施設への到着の基本モデル：Model P

遊園地やテーマパークなどへの客の到着をモデル化する方法として、ここに述べる到着率と待ち時間の関係を用いるものがある [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24]。この現象は多くのケースで観測され、たとえばテーマパークへ行こうとするときに、混雑が予想されると時間をずらすなどの行動をとることに反映される。あるいはインターネットでの送信経路を選択するとき、比較的すいている回線を選択する、いわゆるルーティングなどの現象にも現れる。比較的空いている時間を選択する行動が重なると、今度は逆に一度に客が集中する。したがって、テーマパークの収容数が相対的に小さい場合には、客の到着の流れが時系列的に大きく変動する（実際にはカオス時系列になる）。モデルを説明するためにサービス施設への客の到着を用いるのが便利であり、予備知識なしで理解可能と思われるので、以下ではこの事例をもとに説明する。

サービス（施設への客の到着とか商品市場への商品供給）を処理する窓口をノードと考え、ノードでのサービスの処理能力（容量）を μ としておく [17], [18], [19], [20], [21],

[22], [23], [24]. ノードに流入するフローは、ノードでの待ち時間や処理コストの予測値 (pricing: プライシングと呼ばれる) に関連して調整される. すなわち, ノードでの処理コストに比例してノードへの入力を控える (ノードでの処理コストに反比例して入力する) ことを仮定している. フローの入力調整のモデルにおいては, 入り口において時刻 t におけるプライシングの予測値 (たとえば待たされる時間など) $\pi(t)$ を用いて, そのままをノードに送るかどうかを判断する. 具体的には, プライシングが大きいときには, Λ (以下では正規化して議論をするので, $\Lambda = 1$ としておく) より小さい値 (場合によってはゼロとなる) を入力するフロー $\lambda(t)$ とする. 一方, プライシングが小さい場合には, ほぼ 1 の値を入力フローとする. このように, このフロー 1 はノードに対してすべてが供給されるものではなく, この部分が供給されるモデルとなる. $\lambda(t) = F(\pi(t))$ とするとき関数 $F(\cdot)$ は, 次の式により与えられる.

$$F(\pi(t)) = \begin{cases} 1 & (0 \leq \pi(t) \leq d); \\ (a - \pi(t))/(a - d) & (d < \pi(t) < a); \\ 0 & (\pi(t) \geq a) \end{cases} \quad (2)$$

プライシングの値は, 指数平滑和により与えられる.

$$\pi(t+1) = \omega\pi(t) + (1 - \omega)p(t), p(t) = Q_\mu(\lambda(t)) \quad (3)$$

$$Q_\mu = \frac{1}{(1 - \lambda/\mu)\mu} \quad (4)$$

関数 $Q_\mu(\lambda)$ は, いわゆる待ちシステムにおける処理時間の分布が指数分布である場合の, 平均待ち時間であるとしている. これを M/M/1 モデルと呼ぶ. すなわち, 入力フローは率が λ であるポアソン到着 (記号 M に対応), 処理時間の分布が指数分布 (記号 M) である窓口を 1 つ持つケースである. なお処理時間が指数分布から一定値までの分布をカバーする分布 (一般分布) であるようなモデルも存在するが, M/M/1 モデルと同様に定式化できるので, ここでは省略する.

このような関係式を用いて, $\lambda(t+1)$ を $\lambda(t)$ を用いて表現した式を, $\lambda(t+1) = f_P(\lambda(t), \pi(t))$, $\pi(t+1) = f_Q(\lambda(t), \pi(t))$ としておく. すなわち, 待ち行列の特性は $\lambda(t)$ と $\pi(t)$ の 2 つの変数が変化することにより推移している.

このような待ち行列を 1 つの構成単位として, これらがネットワーク結合されたシステムを Model P として定義しておく. 図 3 には, 1 つの構成単位におけるカオス変動を説明するために, パラメータ μ に依存する変数 $\pi(t)$ の分岐図を描いている. この図より分かるように, パラメータが $0.2 < \mu < 0.9$ となる範囲では変数 $\pi(t)$ はカオス変動に従った挙動となる.

2.5 個人の貯蓄や投資における基本行動モデル: Model I

Model I では変数の挙動が外部の要因で変化するモデル

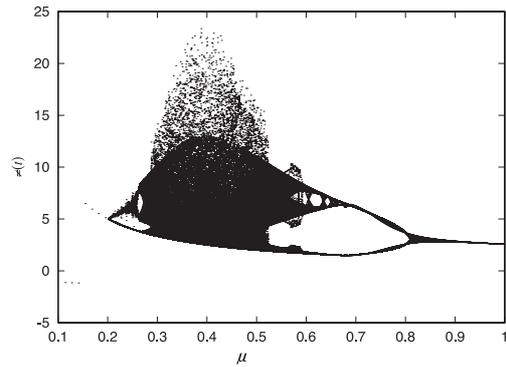


図 3 パラメータ μ に依存する変数 $\pi(t)$ の分岐図
Fig. 3 Bifurcation diagram of $\pi(t)$ depending on μ .

を考察するが, 分かりやすい事例として個人の資産運用をとりあげ説明する. 個人は貯蓄により資産形成を行うと同時に, 小規模の事業へ投資も行うこともできると仮定する. この投資を行うときに自前の資金だけでは運営できない場合には, 外部からの借入を行うことは一般的に行われている. ここで用いるモデルは, このような資産形成の行動において, 資産そのものの大きさがカオス的に変動することを説明するものである. 投資の対象は, 商品製造であると仮定する. このような個人による投資行動と, その中における資産形成のカオス的な変動を説明する.

本論文では, このような基本モデル (個人による貯蓄あるいは小規模投資) が複数個存在して, ネットワークとして結合されているケース (Model I) を考察する. 以下では, 個別の構成単位であるモデル, すなわち個人が小規模の事業への投資を行い, 資産を形成する場合の関係式について説明する. 投資には製造機械など (資本という用語が用いられる) と, これを動かす労力 (労働という用語が用いられる) が導入される. なお製品製造においては, 使用される資本と労働は単純に積をとる関係ではなく, 相補的な関係により記述されることが一般的に知られている (詳細は省略する). 以下で用いる記号の意味は次のようになる. A : 機械の生産能率を表す定数, r : 借入の利子率 (原資を含む)

ρ : 製品製造における資本と労働の相互の補完関係を示す定数 (代替性と呼ばれる)

η : 利益に対する借入金の規模

$z(t)$, Z : 投入する労働の大きさとこれを定数としたもの
 α_w , e_w : 投資の利益で消費される割合と投資以外からの収入

アントレプレナとしての個人は投資額 I により得られる利益をもとに, 時刻 $t+1$ における資産を増加 (あるいは減少) させる行動を行う. この場合, 時刻 t における資産 $W(t)$ を用いると同時に, 投資に不足する金額を外部から借り入れると仮定する. したがって, 投資によって得られる利益から, 借入に相当する返済額を差し引いたものが,

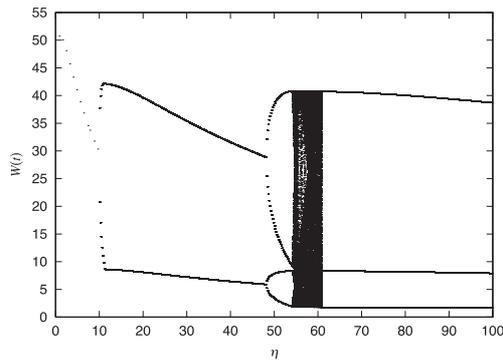


図4 パラメータ η に依存する変数 $W(t)$ の分岐図
 Fig. 4 Bifurcation diagram of $W(t)$ depending on η .

実質的な利益となる。しかしながら、投資により得られる利益が、なにもしない場合より小さい場合には、投資は意味がないので、外部への貸付が有利となる。この境界となる $W(t)$ の値を W^m とすると、個人の行動は次のように記述される。

$$W(t+1) = \begin{cases} (1-\alpha_W)[e_W + W(t)^\rho(\xi - r\eta W(t)^{1-\rho})] & (W(t) \leq W^m); \\ (1-\alpha_W)[e_W + rW(t)] & (W(t) > W^m); \end{cases} \quad (5)$$

$$\xi = A\rho^\rho(1+\eta)^\rho Z^{1-\rho} \quad (6)$$

式(5)、(6)に示す関係式の導出は、付録Bに示す。このような構成単位をネットワーク結合したシステムを Model I として定義する。式(5)に示す関係における右辺を $f_I(W(t))$ として定義しておく。

Model I の構成単位においては資産 $W(t)$ は、パラメータ η の大きさによってカオス的変動をすることが分析されており、図4には $W(t)$ についての分岐図を η を横軸として示している。

3. edge snapping による離散系カオス同期化

3.1 edge snapping による離散系カオス変動の同期化と問題解明

本論文では、これまで研究がなされてきた連続系における edge snapping による同期化手法を、離散系カオス変動モデルにまで拡張して、その適用可能性を検証することを目的としている。同時に、このような同期化手法における特徴について、シミュレーション結果をもとにしながら調査している。離散系における edge snapping による同期化の方法論そのものは、後続の節で展開するので、ここでは、本論文で検証している事項が、問題解明にどのように有効であるかを簡潔に述べておく。

(1) 同期化の解明の意義

別々に変動する複数のシステムにおいて観測される時系列が、ほとんど同じ動きをする時系列に収束する同期化現

象は、工学をはじめとして生物学でも議論されている。生物学では複数の細胞が同じ動きをする現象の分析、工学分野においてはレーザーなどの解析に用いられている。このような理工系における同期化現象の解明は特定分野の研究者には興味を持ってはいるが、一般的に理解されるには限界がある。一方では社会生活においても、比較的頻繁に同期化現象は見いだされる。社会現象に見られる同期化の例としては、特定の商品の流行と衰退、産業構造の各都道府県における類似性、観光などでの人気スポットへの集中と離散、異なる株式市場における平均株価がある事象をきっかけとして同様の挙動を示すこと、などがある。また分野は異なるが、動物がリーダーシップを持つ少数者により決定が下され群れをなすこと (flocking)、虫の共鳴などもある。これらの社会現象における同期化において共通する大きな特徴となっているものが、相互の状態の相互参照による間接的な誘導であり、強制的な外力を加えるものではないことである。このような同期化現象をモデル化するために、すでに2.1節において導入した3つのモデルは有効である。

また同期化現象による事象は、必ずしも望ましいケースだけではなく、これを回避することも重要であり、同期化の条件を分析することはこのような目的にも有効である。

(2) 経済現象における同期化

本論文では数理モデルとしてのネットワーク結合された離散系カオス変動モデルにおける同期化を論じているが、応用例においては現実の経済データを対象とした分析を試みている。この理由について述べるが、特定の分野に関連する知識を必要としない範囲で簡潔に説明する。ある国の景気が周期的に変動するのではないかと仮説(景気循環モデルと呼ばれる)は1923年ごろから論じられるようになり、現在ではカルドアが提唱したモデル(カルドア型モデル)がよく知られている。カルドア型モデルを用いた分析結果として、複数の国が存在する場合に、それぞれが交流をしない場合には、景気はカオス的な変動をすることが示されている。一方で、それぞれの国が閉鎖的ではなく関係をする場合には、景気変動がそろそろケースが出現することが示されており、周期同期化現象とか GDP (Gross Domestic Product) 同期化現象と呼ばれている [32], [33]。また身近な経済活動においても企業が商品を生産し流通させるサイクル (SCM: Supply Chain Management と呼ばれる) が、できるだけ揃うように調整することが行われる。このような経済における同期化を分析するための1つのモデルとして、本論文で提案するネットワーク結合された離散系カオス変動モデルにおける同期化現象は援用できると考えられる。

(3) 同期化の edge snapping による簡素化と離散系

これまで同期化の手法はきわめて多数提案されているが、その多くは伝統的な制御理論に基づくものであり、システムのダイナミクスを詳細に記述することを基本としてい

る。これに対して、本論文で用いている edge snapping による同期化手法は、他のシステムの状態変数を参照しながら状態変化を誘導する方法であり、きわめて簡潔であり、分かりやすい方法である。しかもシミュレーション結果などが示すように、同期化における効果は大きい。しかしながら、これまで edge snapping による同期化は、連続系にしか適用されておらず、離散系についても適用可能であるかを調べることは意義がある。

(4) 離散系カオスにおける同期化とその証明

edge snapping による同期化手法を、連続系から拡張して離散系に適用することに意義があるほかに、離散系に適用した場合に、同期化が完了するか（収束するか）を証明する必要がある。この問題に関して、本論文では、Z 変換の手法を用いて証明を与えている。

(5) 離散系カオスによる現実データの説明力

本論文では、離散系カオスのモデルを用いて人工的に生成したデータをもとに同期化が完了する条件などを調べている。これと並行して、現実のデータについて本論文で述べる同期化手法による問題解明が可能であるかを検討している。その大きな理由としては、公開されている多くのデータは離散時間において観測されたものであり、連続時間における観測を前提としているものは特定の分野に限定をされていることがある。

3.2 滑らかな結合係数調整：同期化手法 I

相互にネットワーク結合された振動系を構成要素とするシステムにおける同期化の方法として、これまで連続系を対象にした方法論が示されている。本論文では、この方法論を離散系のカオス変動に拡張すると同時に、より簡潔な同期化手法を提案する。まず最初に、以下では edge snapping の原理について整理しておく。

いま連続系のシステムにおいて、複数 (N 個としておく) の変数 x_i についての振動現象が複数の非線形方程式により、次のように記述されていると仮定する。

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + c_2 \sum_{j=1}^N \sigma_{ij}(t)(x_j(t) - x_i(t)) \quad (7)$$

$$\ddot{\sigma}_{ij}(t) + d_D \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial V(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} = g(e_{ij}(t)) \quad (8)$$

ここで c_2 は、同期化を制御するための定数である。以下では $g(\cdot)$ を、次のように定義しておく。定数 c_1 は、モデルごとの変数の範囲を正規化するためのものである。

$$g(e_{ij}(t)) = c_1 [x_j(t) - x_i(t)]^2 \quad (9)$$

ここで $\sigma_{ij}(t)$ は変数 x_i と変数 x_j とを結びつける結合係数 (coupling gain) であり、 d_D は結合係数のダイナミクスにおいて変動をやわらげる damping factor である。また関数 $V(\sigma_{ij})$ は変数の値が $\sigma_{ij} = 1$ あるいは $\sigma_{ij} = 0$ になる

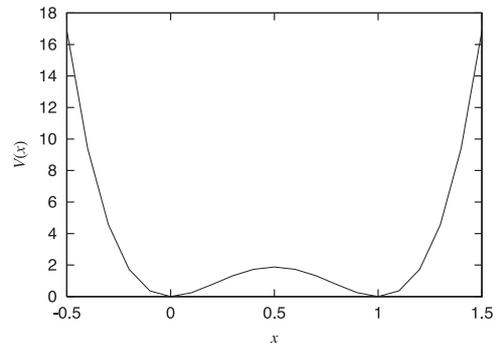


図 5 関数 $V(\cdot)$ の概要

Fig. 5 Overview of function $V(\cdot)$.

点において 1 となる、2 つの安定状態を持つ井戸形ポテンシャルであり、概要は図 5 に示すようなものになる。本論文では文献 [7] にならって、以下の形状を用いる。

$$V(\sigma_{ij}) = b_V \sigma_{ij}^2 (\sigma_{ij} - 1)^2 \quad (10)$$

この振動系の同期化の目的は、それぞれの変数の値が漸近的に同じになることである。すなわち $\lim_{t \rightarrow \infty} [x_i(t) - x_j(t)] = 0$ となることである。

本論文では、式 (7) に示す連続系の関係式を離散系に書き直した式を用いることにする。まず変数 $x_i(t)$ の遷移は、次のように記述される。

$$x_i(t+1) = f(x_i(t)) + c_2 \sum_{j=1}^N \sigma_{ij}(t)(x_j(t) - x_i(t)) \quad (11)$$

ここで c_2 は、連続系のシステムの場合と同様に同期化を制御するための定数である。

次に、結合係数の変化を示す方程式には 3 次の振動系を用いることにする。

$$(1 + d_D + B)\sigma_{ij}(t) - D - [2 + d]\sigma_{ij}(t-1) + \sigma_{ij}(t-2) = 0 \quad (12)$$

$$D = c_1 [x_j(t) - x_i(t)]^2, B = \left. \frac{\partial V(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \right|_t \quad (13)$$

関数 $V(\cdot)$ の偏微分値 $\partial V(\sigma_{ij}) / \partial \sigma_{ij}$ は σ_{ij} の 3 次の関数となる。

このような変数の間の結合関係と、結合係数のダイナミクスを用いてカオス同期化が行えることは、以下のよう証明される (証明の概略のみ述べる)。変数の間での同期化が達成された場合の変数の時系列を、 $x_s(t)$ としておく。この時系列は、それぞれの変数に共通のものとして定義される。式 (11) において、この $x_s(t)$ からの変数 $x_i(t)$ の乖離を $\delta x_i(t)$ として定義しておく。式 (11) においてテラー展開の関係式を用いると、次のような式が得られる。

$$\delta x_i(t+1) = \delta x_i(t) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} [\delta x_j(t) - \delta x_i(t)] \quad (14)$$

ここで同期化が達成された場合には結合部分は無関係に

なるので、 $x_s(t) = f(x_s(t))$ となる関係式を用いて簡単化している。同期化が達成されることを定量的に説明することは難しいので、ここでは定性的な説明のみ行う。式(14)における右辺の第1項はカオス変動に関連する項目であるので、この項だけではシステムは安定しない。しかし第2項を見ると $\delta x_i(t)$ の符号がマイナスとなることを用いると、次のように同期化への接近が説明できる。いま $\delta x_i(t)$ がマイナス(プラス)であると仮定すると、左辺の $\delta x_i(t+1)$ はプラス(マイナス)の方向に変化させられる。したがって時間が経過したあとでは、 $\delta x_i(t)$ はやがて小さな値に収束する(ここで結合係数は、後で示すように1あるいは0に収束することを用いている)。

次に結合係数が1あるいは0の値をとって、定常状態にいたることを証明する。結合係数のダイナミクスを見やすくするために、 σ_{ij} の3次の関数を $\sigma_{ij} = 0, 1/2, 1$ の周りでテーラー展開する。いま $\sigma_{ij} = 0$ の周りで展開を仮定すると、式(12)は次のようになる。

$$(2b_V + 1 + d_D)\sigma_{ij}(t) - (2 + d_D)\sigma_{ij}(t-1) + \sigma_{ij}(t-2) = H \quad (15)$$

H はある定数である。

式の関係式を時間遅れオペレータを用いて表現して、 Z 変換を用いて左辺を変換すると、近似的に次のような方程式の根 z_s が単位円の中にある($|z_s| < 1$)と安定であることが分かる。また $\sigma_{ij} = 0$ の周りでテーラー展開した場合も同様な結果となる。

$$(2b_V + 1 + d_D)z - (2 + d_D)z^{-1} + z^{-2} = 0 \quad (16)$$

応用例で示すように $b_V = 30$, $d_D = 10$ などの値をとっておくと、 $|z_s| < 1$ は満足される。一方、 σ_{ij} の3次の関数を $\sigma_{ij} = 1/2$ の周りでテーラー展開すると、この Z 変換を用いた関係式は不安定になることが示される。これらの結果から、 σ_{ij} は時間が経過すると、1あるいは0の値をとって安定することが分かる。

3.3 3つのモデルにおける同期化手法Iの適用

これまで、変数 $x_i(t)$ により同期化すべき対象の変数を定義してきたが、変数 $x_i(t)$ と対応する3つのモデルにおける変数は、次のようになっている。ただしネットワーク結合された変数はそれぞれの構成単位において同等であるので、この区別を示す添え字は特に用いていない。

Model C: i 番目の構成要素のメンバのサイト1への配分比率 $\theta_1(t)$

Model P: i 番目の構成要素の待ち行列への入力 $\lambda(t)$, および待ち行列におけるプライシング $\pi(t)$

Model I: i 番目の構成要素の資産時系列 $W(t)$

Model C, Model Iにおいては、それぞれ $\theta_1(t+1)$, $W(t+1)$ を決める右辺の関数は、それぞれ変数 $\theta_1(t)$, $W(t)$ で記述

されるので、式(11)における関数 $f(\cdot)$ は1つであることは自明である。しかしながら、すでにモデルの説明の節において述べたようにModel Pにおいては、システムの挙動を決める変数は $\lambda(t)$ および $\pi(t)$ の2つが存在するので、同期化を行う場合には、これらのそれぞれに対して制御を行う必要がある。したがって結合係数の変化を示すダイナミクスも、2つの変数に対応させて準備しておく。

また、同期化により達成されることは、以下のように解釈されるであろう(必ずしも、望ましい現象であるとは限らない)。

Model C: サイト間におけるメンバ移動パターンが構成要素で同じになる。

Model P: それぞれの待ち行列への入力とプライシングが同じになる。

Model I: それぞれの構成要素(たとえば市場)での投資行動が同じになる。

3.4 簡素化された結合係数設定: 同期化手法II

すでに示した同期化手法Iにより、結合係数を滑らかに変化させ、それぞれのモデルにおける変数の同期化を行うことが可能となる。しかし一方では、離散系においては連続系とは異なり、急速に同期化を実施することも、状況によっては可能となる。したがってここでは、別の同期化手法IIとして、簡素化された結合係数設定を提案する。

$\sigma_{ij}(t)$ の挙動について文献[7]においては、混合的な適用(hybrid adaptive coupling)が方法論として示されている。すなわち、 $\sigma_{ij}(t)$ の遷移について、次のような決定方法を用いている。

$$\sigma_{ij}(t+1) = \begin{cases} 1, & \Phi(\sigma_{ij}(t), e_{ij}(t)) > L_C; \\ 0, & \text{other} \end{cases} \quad (17)$$

すなわち、状態変数 x_i と x_j との間における距離に相当する関数 $\Phi(\sigma_{ij}(t), e_{ij}(t))$ の値がある閾値を超える場合に、これらの間の結合を実施し、そうでない場合には特には結合(接続)しないという方法を用いている。この同期化手法は結合係数を滑らかに変化させる同期化手法を、離散的に簡単化した方法となっている。

本論文では、この方法をさらに簡素化した方法(同期化手法II)を提案する。いま、ある構成単位である i 番目と j 番目の変数の間の差異を定義する(結合係数の現在の値は、変数から除外する)。

$$\Phi(e_{ij}(t)) = |x_i(t) - x_j(t)| \quad (18)$$

$\Phi(e_{ij}(t)) > L_C$ の関係が成立する場合には結合係数 σ_{ij} を1として、そうでない場合には0にする。

3.5 時系列が周期変動をするケースの存在

これまで、時系列が離散的カオス変動を示すケースを中

心に述べてきたが、3つのモデルの構成要素のそれぞれのカオス分岐図からも分かるように、分岐パラメータの値によっては、時系列は周期的な変動をする場合が存在する。したがって、構成要素のそれぞれが周期的変動をする場合における同期化についても、議論する必要がある。しかしながら、それぞれのモデルにおける構成要素は同じダイナミクスにより記述され、等質であるので、周期変動をする領域においては、それぞれの周期は同じになる。したがって、これらの複数の時系列の位相が同じになれば同期化が達成できることは自明である。

もちろん、これらの構成単位においてカオス分岐パラメータが異なる場合には、それぞれが周期的な変動をする場合においても、同期化は困難である。しかしながら、本論文ではすべての構成単位におけるカオス分岐パラメータは同じであると仮定しているので、周期的変動を議論する場合においても、異なる分岐パラメータのケースは考察しない。

なお、時系列が周期的な変動をする領域における同期化のシミュレーション結果については、詳細は省略するが、本論文で提案する離散系システムにおける同期化手法を適用して、同期化を達成することができる。このような周期あるいは概周期性を持つ時系列を同期化する事例については、応用例において分析する現実データへの適用を議論する場合に用いている。

4. 応用例

4.1 シミュレーションの目的

以下では、次に示す2つの事項について、シミュレーションを基礎として分析を行っていく。すなわち、(1)本論文で提案する3つのネットワーク結合離散系カオスシステムにおいて同期化が達成できるための条件の検証、(2)現実に観測されるカオス現象における同期化現象の分析の試み、についてである。まず事項(1)については、本論文で提案する3つのモデルにおいて同期化が達成できる条件を調べることで、同期化手法が適用できる範囲を明らかにすることを目的としている。本論文で取り扱うモデルは、一般的な同期化問題を考察する場合に有効であるので、これをもとにした同期化条件の検証は、現実問題を分析する場合にも役立つであろう。しかしながら一方では、これらのモデルは人工的に与えられたもので、生成されるシミュレーションのデータも人工的であり、現実に適用可能であるかどうかをさらに検証する必要がある。このような目的のために、事項(2)において2種類の現実データについて同期化分析を試みる。

具体的には第1番目のデータ (Case I) として日米の社会調査データを用い、社会活動における同期化の分析について Model C との対応関係を議論する。次に第2番目のデータ (Case II) として10カ国の株式市場における平均株価の時

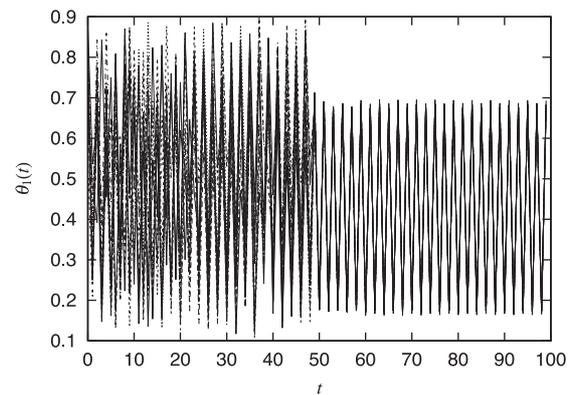


図6 Model C におけるカオス同期化の例 ($T = 1.9$, $c_2 = 0.05$)

Fig. 6 An example of synchronization of Model C ($T = 1.9$, $c_2 = 0.05$).

系列を用い、ある事象をきっかけとして同期化する現象を、Model P, Model I との対応関係を基礎として解明する。なお同期化分析にさきだち Case I のデータでは概周期性が、Case II のデータではカオス性が観測され、本論文で提案する離散系カオスモデルと整合していることを述べている。

4.2 カオス同期化手法 I の適用

以下では本論文で議論する3つのカオス変動モデルについて、まず、同期化手法 I を適用した場合の結果について述べる。Model C, Model P, Model I のそれぞれについて、シミュレーションの条件は以下のように設定する。なおモデルに含まれる定数は複数あり、これらをさまざまに設定することも可能である。しかし c_1 はデータ正規化のための定数であることや、調べるべきケース数が増加すること回避するために、以下では1つを除いて、特定の値に設定している。すなわち、式(11)におけるパラメータ c_2 の大きさだけを分析の対象としている。

Model C :

$$L = 100, \gamma = 0.4, \sigma = 5, \nu = 0.4, c_1 = 0.5, T = 1.7 \sim 2.0$$

Model P :

$$d = 5, b = 2, \mu = 0.2 \sim 0.9, c_1 = 1.5$$

Model I :

$$\rho = 1/3, \alpha = 0.8, r = 1.02, A = 3/2, Z = 100, c_1 = 0.001, \eta = 55 \sim 60$$

また結合係数の振動抑制パラメータ d_D と、関数 $V(\cdot)$ に含まれる定数 b_V は、次のように設定している。

$$d_D = 10, b_V = 30$$

図6, 図7, 図8 においては、それぞれ Model C, Model P, Model I における同期化の例を示している。簡単化のため、10個の構成要素の間の同期化現象だけを抽出して図示している。図6, 図7, 図8 においては時刻 $t = 49$ までは同期化の制御はなされないので、時刻 $t = 50$ において同期化が開始されている。なお、結合係数は同期化を開始したあと

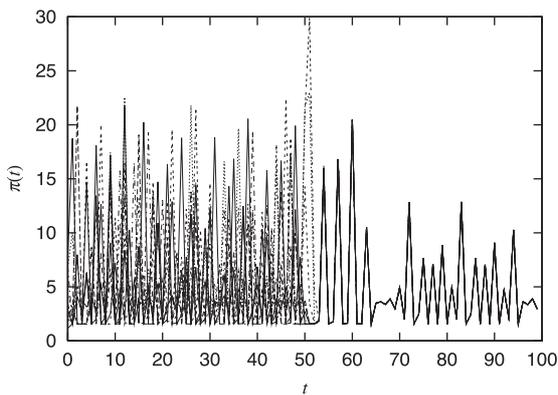


図 7 Model P におけるカオス同期化の例 ($\mu = 0.65, c_2 = 0.05$)

Fig. 7 An example of synchronization of Model P ($\mu = 0.65, c_2 = 0.05$).

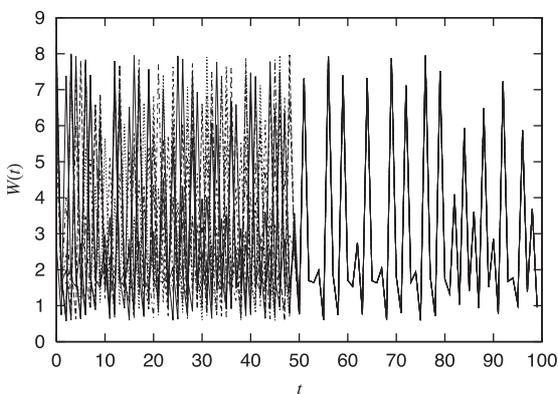


図 8 Model I におけるカオス同期化の例 ($\eta = 55, c_2 = 0.05$)

Fig. 8 An example of synchronization of Model I ($\eta = 55, c_2 = 0.05$).

では、次第に 1 あるいは 0 に収束して、最終的にはこれらの値からの移動はなくなり、同期化が完了する。図 9 には Model I における結合係数の時間変化の例を示している。時刻 $t = 50$ 以降において結合係数は、短い時間で 1 あるいは 0 に収束していることが分かる。なおこのように結合係数が同期化により収束するまでの平均時間については、同期化を行う場合のパラメータに依存するので、次の節でまとめて示すことにする。

4.3 カオス同期化手法 I の条件

次にシミュレーションの条件をさまざまに変化させながらデータを集め、Model C, Model P, Model I についてカオス同期化がなされる条件について考察する。すでに述べたように結合係数の振動を制御するパラメータなどを含めて、モデルにおいて動作条件を変化させるパラメータは複数存在する。しかし、これらの中には、エージェント行動をより分かりやすくするために、あらかじめ調整されたものもあるので、任意に変化させることは適切ではない。このようなことを考慮して、モデルの動作条件を調べるために相対的に意義があるパラメータとして、 c_2 のみを選択

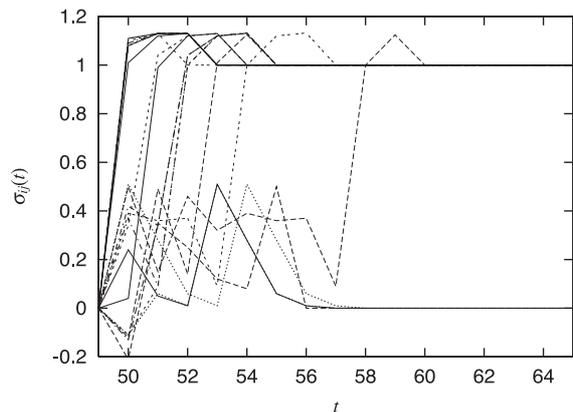


図 9 結合係数の同期化以降の時間変化の例 (Model I)

Fig. 9 An example of change of coupling coefficients after the synchronization along time (Model I).

表 1 同期化が可能となる c_2 とパラメータとの関係

Table 1 Relation between c_2 and parameters available for synchronization.

Model C	T	1.8	1.9	2.0	-
	c_L	0.001	0.001	0.003	-
	c_U	0.09	0.08	0.07	-
Model P	μ	0.35	0.55	0.75	0.85
	c_U	0.02	0.02	0.01	0.01
	c_U	0.05	0.05	0.05	0.05
Model I	η	55	60	65	-
	c_L	0.02	0.02	0.01	-
	c_U	0.05	0.05	0.06	-

している。

表 1 にはそれぞれ Model C, Model P, Model I において同期化が可能となるパラメータ c_2 の範囲 ($c_L \leq c_2 \leq c_U$) が同期化可能範囲とした場合の c_L, c_U を、カオス分岐のパラメータとの関係として示している。

なお、このような同期化が実行可能であるパラメータの範囲における結合係数が安定化する (収束する) までの平均時間を求め、表 2 としてまとめている。表 2 においては c_2 の値を、同期化が可能である c_2 の最小値と最大値に設定した場合 ($c_2 = c_L$ および $c_2 = c_U$) について、それぞれ初期値を変更しながら 20 回のシミュレーションを行い、収束までの平均時間を求め示している。

表 1 に示した結果から、次のようなことが分かる。

(1) Model C における c_2 と T との関係

同期化が可能となる c_2 の範囲は、他の 2 つのモデルと比較して相対的に大きくなっている。またパラメータ T に対する同期化可能な c_2 の範囲はほとんど同じであり、カオス変動のさまざまな段階で、同期化が可能であることを意味している。

(2) Model P における c_2 と μ との関係

同期化が可能となる c_2 の範囲は Model C と比較してやや狭くなるが、しかし一定の範囲で同期化が可能となる c_2

表 2 結合係数が収束するまでの平均時間

Table 2 Average time of convergence of coupling coefficients after the synchronization.

Model C	T	1.8	1.9	2.0	-
	$c_2 = c_L$	5.9	5.7	5.8	-
	$c_2 = c_U$	5.2	5.2	5.2	-
Model P	μ	0.35	0.55	0.75	0.85
	$c_2 = c_U$	11.7	11.5	11.3	11.4
	$c_2 = c_U$	10.2	10.5	10.2	10.4
Model I	η	55	60	65	-
	$c_2 = c_L$	7.7	7.5	7.7	-
	$c_2 = c_U$	6.0	6.2	6.3	-

が存在することが分かる。また Model C と同様に、パラメータ μ に対する同期化可能な c_2 の範囲はほとんど同じで、種々のカオス変動の同期化が可能であることを意味している。

(3) Model I における c_2 と η との関係

c_2 の範囲は Model C と比較してやや狭くはなるが、同期化が可能な c_2 が存在することが分かる。パラメータ η に対する同期化可能な c_2 の範囲はほとんど同じで、発生するカオス変動に対する種々の同期化が可能であることを意味している。

次に、表 2 における結合係数の収束までの平均時間を分析した結果、次のようなことが分かる。結合係数が収束するまでの時間は、モデルごとのカオス分岐のパラメータにはあまり依存していないことと、同期化が可能であるパラメータ c_2 の範囲にも、それほど関連していないことが分かる。したがってそれぞれのモデルごとの同期化における結合係数の収束までの経過時間は Model C では 5.2 ~ 5.9, Model P では 10.2 ~ 11.7, Model I では 6.0 ~ 7.7 となり、比較的短時間で収束に向かっていることが分かる。

4.4 カオス同期化手法 II の適用

次に本論文で議論する 3 つのカオス変動モデルについて、同期化手法 II を適用した場合の結果について述べる。Model C, Model P, Model I のそれぞれについて、シミュレーションの条件は同期化手法 I と同じであると仮定する。なお式 (17) において、結合係数を 1 にするか 0 にするかを選択を行うための閾値 L_C は、モデルごとに次のように設定しておく。

Model C : $L_C = 0.5$

Model P : $L_C = 0.4$ (λ について), $L_C = 3$ (π について)

Model I : $L_C = 4$

Model M, Model P, Model I における同期化の例をそれぞれ図 10, 図 11, 図 12 に示している。図 10, 図 11, 図 12 においては時刻 $t = 49$ までは同期化の制御はなされず、時刻 $t = 50$ において同期化が開始されている。同期化が完了するまで結合のための入力（結合入力と呼ぶ）

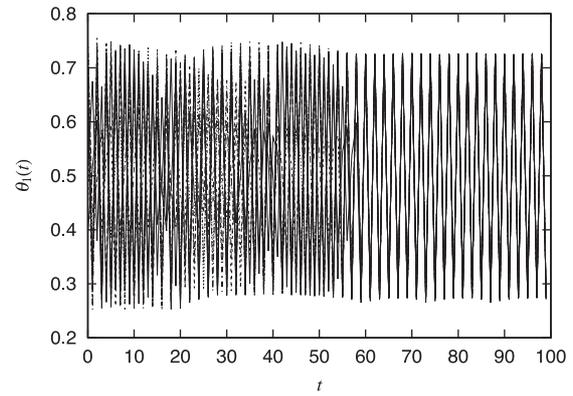


図 10 Model C におけるカオス同期化の例 ($c_2 = 0.2, T = 1.8$)
 Fig. 10 An example of synchronization of Model C ($c_2 = 0.2, T = 1.8$).

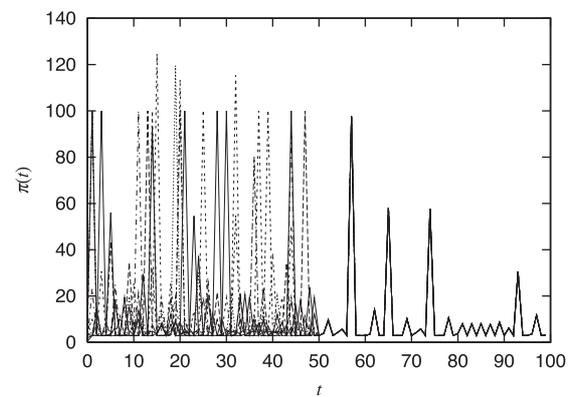


図 11 Model P におけるカオス同期化の例 ($c_2 = 0.1, \mu = 0.5$)
 Fig. 11 An example of synchronization of Model P ($c_2 = 0.1, \mu = 0.5$).

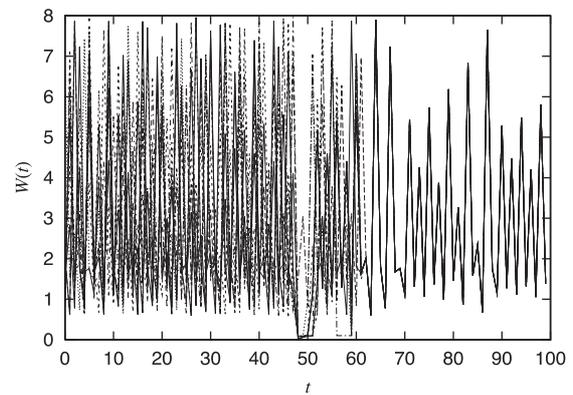


図 12 Model I におけるカオス同期化の例 ($c_2 = 0.2, \eta = 55$)
 Fig. 12 An example of synchronization of Model I ($c_2 = 0.2, \eta = 55$).

は継続されると仮定する。この場合、変数 $x_i(t)$ への結合入力を変数 $x_j(t)$ との差異 $x_i(t) - x_j(t)$ であるとするが、変数 $x_i(t)$ の相手である変数 $x_j(t)$ は、時刻とともに変化する可能性がある。

なお、結合係数は同期化を開始したあとでは、次第にすべての変数は同じ値をとるようになるので、変数 $x_i(t)$ への結合入力は次第に 0 に収束して、最終的には同期化が完

表 3 同期化が可能となる c_2 とパラメータとの関係

Table 3 Relation between c_2 and parameters available for synchronization.

Model C	T	1.8	1.9	2.0	-
	c_L	0.007	0.007	0.007	-
	c_U	0.25	0.25	0.3	-
Model P	μ	0.35	0.55	0.75	0.85
	c_L	0.05	0.05	0.05	0.05
	c_U	0.3	0.3	0.3	0.3
Model I	η	55	60	65	-
	c_L	0.1	0.1	0.1	-
	c_U	0.7	0.7	0.8	-

表 4 同期化開始から結合係数がすべて 0 になるまでの平均時間

Table 4 Average time elapsed after the beginning of synchronization until time when all coupling coefficients becomes 0.

Model C	T	1.8	1.9	2.0	-
	$c_2 = c_L$	11.8	12.0	11.7	-
	$c_2 = c_U$	10.2	10.5	10.2	-
Model P	μ	0.35	0.55	0.75	0.85
	$c_2 = c_U$	26.7	27.0	27.7	27.3
	$c_2 = c_U$	25.3	25.1	26.0	25.3
Model I	η	55	60	65	-
	$c_2 = c_L$	11.2	11.8	11.9	-
	$c_2 = c_U$	10.3	10.2	10.3	-

了する。

4.5 カオス同期化手法 II の条件

以下ではシミュレーションの条件をさまざまに変化させながらデータを集め、カオス同期化手法 II を適用した場合にカオス同期がなされる条件について考察する。すでに述べたようにモデルにおいては、あらかじめ調整されたものもあるので、任意に変化させることは適切ではないことを考慮して、モデルの動作条件を調べるために相対的に意義があるパラメータとして c_2 を選択している。表 3 にはそれぞれ Model C, Model P, Model I において同期化が可能となるパラメータ c_2 の範囲 ($c_L \leq c_2 \leq c_U$ が同期化可能範囲とした場合の c_L, c_U) を、カオス分岐のパラメータとの関係として示している。

また表 4 には、同期化が開始されてから同期化が完了するまでの間に、結合係数が変化する時間の平均値を示している。すなわち同期化手法 I とは異なり、結合係数は 1 あるいは 0 の離散値をとるので、その変化の図は単純なものになる。そのため結合係数の時間変化の図は省略する。具体的には同期化の制御が実施されている場合には、 $|x_i(t) - x_j(t)|$ が大きいと結合係数は 1 になるが、次第に同期化が完了して $x_i(t) \approx x_j(t)$ に近くなると、結合係数は急速に 0 になる。表 4 においては c_2 の値を、同期化が可能である c_2 の最小値と最大値に設定をした場合 ($c_2 = c_L$

および $c_2 = c_U$) について、それぞれ初期値を変更しながら 20 回のシミュレーションを行い、同期化が開始され変化し再び 0 に復帰するまでの平均時間を求め示している。

表 3 に示した結果から、それぞれのモデルごとの結果を分析することができるが、同期化手法 I における結果と同じような傾向を示している。異なる側面だけを分析する。すなわち、カオス分岐のパラメータを変化させても、同期化が達成できる c_2 の範囲は大きくは変わらないことがあげられる。しかしながら、同期化手法 I とは異なる点として、パラメータ c_2 の値を全体的に大きな値に設定することが可能となっている。これは、離散系システムの場合において、しかも結合の相手を選択的に取得している効果であると考えられる。

次に、表 4 に示す同期化が開始されてから結合係数が 1 に変化し同期化が完了して再び 0 になるまでの平均時間を分析した結果、次のようなことが分かる。結合係数が 0 から 1 へ変化し再び 0 に復帰するまでの時間は、モデルごとのカオス分岐のパラメータにはあまり依存していないことと、同期化が可能であるパラメータ c_2 の範囲にも、それほど関連していない。モデルごとの同期化における結合係数の収束までの経過時間は Model C では 10.2 ~ 12.0, Model P では 25.3 ~ 27.3, Model I では 10.2 ~ 11.9 となり、比較的短時間で収束に向かっていることが分かる。しかしながらこの値は同期化手法 I における結合係数の収束時間と比較した場合には約 2 倍となっており、同期化手法 II は簡潔な同期化手法ではあるが、経過時間は増加することが分かる。

4.6 現実データへの適用の考察

本論文で提案する数理モデルを現実データに適用する前に、まず以下で用いる 2 つの現実データの特性と、本論文で提案する 3 つのモデルとの対応関係について述べる。なお、現実データに対する同期化分析の結果については後述する。2 つの現実データは、以下のようなものである。

Case I: 日米での人口移動、雇用変動など経済データ

Case II: 世界の主要証券市場での大幅な株価変動

まず Model C はメンバの移動をモデル化しており、Case I のデータにおける同期化分析に適用できる。すなわち 2 つの選択肢 (地域など) が存在した場合に、メンバが自身に有利と思われる移動をする行動をモデル化したものが Model C であり、しかもこの移動 (振動) が、複数の構成単位で同期化されることをモデル化している。次に Case II のデータにおける同期化分析には、Model P および Model I とが適用できると判断している。株式市場では、投資家は利益を得るために株式を取得するがこの場合、利益が向上しそうな場合には資金投入を行い、これが Model P におけるサービス施設への入力を増加させることに対応する。しかし一方では、利益低下が予測される場合には、資本投

表 5 日本と米国の自治体基本データ (変数)

Table 5 Basic data (variables) for local government of Japan and USA.

Jap. 内容	US. 内容
x_{1k} 人口密度 (人/平方 km)	x_{1k} 人口密度 (人/平方 km)
x_{2k} 高齢率 (1,000 人あたり)	x_{2k} 企業所得 (ドル/社)
x_{3k} 企業所得 (円)	x_{3k} 住民所得 (ドル/人)
x_{4k} 企業数 (会社数)	x_{4k} 犯罪発生率 (10 万人あたり)
x_{5k} 住民所得 (円)	x_{5k} 移転所得 (ドル/人)
x_{6k} 勤労者数 (人)	x_{6k} 実質移転所得 (ドル/人)
x_{7k} 第 1 次産業数 (企業数)	x_{7k} 年金生活者数 (1,000 人あたり)
x_{8k} 第 2 次産業数 (企業数)	x_{8k} 白人比率 (1,000 人あたり)
x_{9k} 第 3 次産業数 (企業数)	-

入を抑制する行動にでるので、これは Model P におけるサービス施設への入力を抑制することに対応する。このように、利益の上昇・下降の予測に対応して投入される資本が変化することが、株価の上昇・下降に反映される。また Model I において記述されるエージェントの投資行動は、株式市場における投資分析へと自然に適用することができる。すなわち、投資を行うエージェントにとって資産の時系列が満足するレベルに達していれば、現在の資産レベルに相当する株式銘柄を保持することを継続する。一方、資産が十分でないと判断すれば、資金を投入して利益を拡大する行動をとることになり、このような行動の変動が集まることがカオス的に株価が変動する事象に反映される。

次に、観測される現実データについて説明する。

Case I: 日米での人口移動、雇用変動など経済データ

日米における人口移動、雇用変動など経済時系列データであり日本の都道府県 (米国は州) について、収集時期を 1960 年から 2005 年まで 5 年ごとの観測値とするデータである。概要を表 5 に示す。 x_{ik} は i 番目の時系列の都道府県あるいは州 k のデータを意味する。

Case II: 世界の主要証券市場での大幅な株価変動

最近の世界の主要証券市場での大幅な株価変動 (変動のきっかけとなる事象をイベントと呼んでおく) のデータであり、日本、韓国、台湾など主要なアジア市場と、米国と欧州、オーストラリアにおける市場 (合計 10) での、次の 3 つの時期における平均株価の時系列である。イベント発生時刻を T_1 として定義しておく。変数 $x_k(t)$ を時刻 t における k 番目の株価の値としておく。

(1) イベント発生は 1999 年 12 月 31 日であり、この前後の 45 取引日の株価

(2) イベント発生は 2008 年 9 月 15 日であり、この前後の 45 取引日の株価

(3) イベント発生は 2011 年 10 月 20 日であり、この前後の 45 取引日の株価

なお本論文では、対象となるモデルの構成単位においてカオス変動に従う時系列が生成されていることが基本と

表 6 平均株価 S_i におけるリアプノフ指数

Table 6 Lyapunov exponent of average stock price S_i .

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
C1	0.0128	0.0111	0.0142	0.0139	0.0176
C2	0.0026	0.0013	0.0021	0.0016	0.0033
	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
C1	0.0160	0.0134	0.0132	0.0133	0.0135
C2	0.0028	0.0026	0.0031	0.0030	0.0034

なっているので、現実のデータが、この特性から大きく外れている場合には問題となる。これを考慮して、最初に、ここで用いる時系列データについて、カオス性および周期性の検証を行っている。この検証の結果は、簡潔に次のようにまとめられる。

- (a) 各国平均株価についてはカオス性が見られる。
- (b) 日米の経済データについては概周期性が見られる。

まず最初の (a) 各国平均株価のカオス性検証については、2 つの条件のもとでリアプノフ指数を求めた。

条件 1 (C1 として標記): 埋め込み次元を 3, ディレイを 1 とする

条件 2 (C2 として標記): 埋め込み次元 3, ディレイを 30 とする

これらの条件のもとで計算したリアプノフ指数を、表 6 にまとめている。表では株価の区別を $S_1 \sim S_{10}$ としている。この結果から分かるように、2 つのケースのどちらにおいてもリアプノフ指数は正であり、株価はすべてカオス性を持っていることが示される。

次に、日米の経済データに関する概周期性の検証については、広く用いられているフーリエ解析の手法を用いて行うことができる。フーリエ解析により、特定の周期に大きな振幅が存在する場合には周期性が確認できる。一方、振幅の顕著なピークが確認できない場合には、時系列には周期性ではなくランダム性が多いといえる。その結果に関しては、簡潔に次のようにまとめられる。

概周期性を持つ指標: 日本では x_2, x_6, x_7, x_9 , 米国では x_2, x_6, x_7

ランダム性を持つ指標: 日本では x_1, x_3, x_4, x_5, x_8 , 米国では x_1, x_3, x_4, x_5, x_8

さらに Case II において見られる複数の平均株価の連動性については、我々が以前示した人工的な株式市場において観測されるカオス現象と同期化の議論からも予想できることが分かる [28], [29], [30]。詳細についてはこれまでの研究に示しているもので、ここでは主要な結果の概要を整理しておく。

遺伝的プログラミング (Genetic Programming: GP) 手法により、過去のデータを用いて学習するエージェントが構成員となっている人工的な株式市場のモデルを仮定する。このモデルにおいてエージェントの動きを制約した場

合には、株価のカオスの変動と、株価の周期変動への収束が観測される。エージェントは2種類存在して、自身で形成する複数 (N_A 個とする) の予測式を所有する第1類のエージェント、および共通して予測式 (全体で N_A 個) を所有する第2類のエージェントがある。これらの N_A 個の予測式はGPにおける個体に対応しており、その予測誤差の大きさに応じて、適合度が与えられている。一般には、この個体の中からランダムに相対的に適合度の高い個体予測式を用いて次期の株式の売買を決定する。次期の株価 $P(t+1)$ は現在の時刻 t における株式の購入要求 (需要) である $B(t)$ と、売却要求 (供給) である $O(t)$ により、式 $P(t+1) = P(t)[1 + \tanh(\beta(B(t) - O(t)))]$ を通して決定される。

このようなモデルにおいて、次のようなことが分かる。

(1) β の値に依存して時系列はカオスの変動を示す。

次期の株価決定の式において β を変化させながらリアプノフ指数などを用いて時系列のカオス性を検証すると、ある β の範囲で株価時系列はカオスとなる。

(2) ランダム選択をやめると周期変動になる

エージェントが N_A 個の予測式の中からランダムに個体を選択するのではなく、最も適合度の高い個体を用いて予測をして売買の行動を行うと、株価は単純ではあるが急激な周期変動 (急速な上昇のあと過度な上昇を敬遠して、急速な下落) になる。

このような前提のもとで、Case I, Case II として与えられる現実のデータについて、同期化と呼べる現象が観測されるかを考察する。これらの観測データから時系列変動の同期化について、経験的に有用であると思われる指標を定義する。まず Case I については、時系列の個数を M 、観測期間を $t = 1 \sim T$ として、ある i 番目の時系列の k 番目のサンプルである都道府県や州 (全部で M 個とする) に対する時刻 t における値 ($x_{ik}(t)$) の時刻 t における平均値を $\bar{x}_i(t)$ とする ($\bar{x}_i(t) = \sum x_{ik}(t)/M$)。 $t = 1 \sim T$ を2つの区間 $1 \sim T_1$, $T_1 + 1 \sim T$ に分割する。なお時系列の間の絶対値には開きがあるので、時刻 $t = 1, T_1, T$ においてはそれぞれの時系列の値を平均値 $\bar{x}_i(t)$ に一致させる正規化を行うと仮定し、正規化を行った時系列を、あらためて $x_{ik}(t)$ としておく。それぞれの時系列について2つの期間 $1 \sim T_1$, $T_1 + 1 \sim T$ において、次の指標 R_i を定義する。たとえば後半の期間 $T_1 + 1 \sim T$ では、次のようになる。

$$R_i = \sum_{k=1}^M \sum_{t=1}^{T_1} |x_{ik}(t) - \bar{x}_i(t)| / (T - T_1) \quad (19)$$

定義から分かるように、指標 R_i が小さいほど、複数個の時系列 (都道府県あるいは州) が同じ値に収束する傾向が見られることが分かる。

次に Case II については、集計する期間をイベント発生時刻 T_1 の前の45日と、 T_1 の後の45日の2つの期間とし

表7 日本と米国の時系列収束の指標 R_i

Table 7 Indicator R_i representing convergence of time series in Japan and USA.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
USA	1.6	0.3	0.9	0.9	0.9	0.3	0.4	1.4	-
Japan	1.0	0.3	2.3	1.2	1.1	0.3	0.3	1.7	0.4

て指標を計算する。なお Case II においては、世界各国の市場での平均株価の連動性を検証しているため、指標 R_i は1つ (R_1) である。たとえばイベントが発生する前については、指標 R_1 は次のようになる ($\bar{x}(t)$ を時刻 t における10個の株価の平均値とする)。

$$R_1 = \sum_{k=1}^{10} \sum_{t=T_1-45}^{T_1} |x_k(t) - \bar{x}(t)| / 45 \quad (20)$$

表7には Case I における期間 $t = T_1 + 1 \sim T$ での R_i の値を示している。なお数値は相対比較であるため、計算結果をそのまま示している。最初の期間の終わり T_1 は、指標 R_i が最小となるように設定している。また、Case II についてはイベント発生からの後半の期間 $t = T_1 \sim T_1 + 45$ における R_1 の値を、イベント発生以前の期間 $t = T_1 - 45 \sim T_1$ における R_1 の値で割った指標を Q として求める。3つのイベントごとにこの指標を計算すると、次のようになる。

(1) の場合: $R = 0.033$

(2) の場合: $R = 0.043$

(3) の場合: $R = 0.038$

これらの結果から次のようなことが分かる。まず Case I については、日本 (米国) では x_2, x_6, x_7, x_9 (x_2, x_6, x_7) などの時系列では、 R_i の値がきわめて小さな値となっている。このようなことから、住民の直接的な経済活動の結果として得られる時系列においては、やや顕著に一定の方向への収束性が見られるが、このような範囲にはない時系列では、相対的に時系列はばらばらに変動していることが分かる。また Case II においては、イベントが発生したあとの期間における指標 R_1 を前半の期間の指標 R_1 で割った値 Q はいずれも小さな値となっており、イベントが発生したあとは、複数の時系列が同じ方向に収束していることが分かる。

本論文では離散系カオス変動をする構成単位をネットワークにより結合した3つのモデルを定義し、構成単位の結合係数を制御することにより同期化を達成する方法を示した。構成単位間の結合係数が、構成単位の特性の差異を変数として含むダイナミクスにより決定される仕組みと、これを簡素化した構成単位の特性の差異の最大値に比例させながら同期化する方法を提案した。応用例として、カオス同期化が可能となる条件および現実データへの適用可能性を考察した。

今後、現実に観測されるより幅広い適用分野の考察、およびカオス同期分析のさらなる拡張について、検討を進め

ていきたい。

謝辞 本研究の一部は、日本学術振興会科学研究費基盤研究 (B) 23310104 により実施されている。ここに感謝の意を表す。

参考文献

- [1] Pecora, L.M. and Carroll, T.L.: Synchronization in Chaotic Systems, *Phys. Rev. Lett.*, Vol.64, pp.821–824 (1990).
- [2] Wang, X.F. and Chen, G.: Synchronization in Scale Free Dynamical Networks: Robustness and Fragility, *IEEE Trans. Circuit and Systems I*, Vol.49, No.1, pp.54–62 (2002).
- [3] Zhou, J. and Chen, T.: Synchronization in General Complex Delayed Dynamical Networks, *IEEE Trans. Circuit and Systems*, Vol.53, No.12, pp.2739–2745 (2006).
- [4] Pyragas, K.: Continuous Control of Chaos by Self-controlling Feedback, *Phys. Lett.*, Vol.170, pp.421–428 (1992).
- [5] Ott, E., Grebogi, C. and York, J.A.: Controlling Chaos, *Phys. Rev. Lett.*, Vol.64, No.11, pp.1196–1199 (1990).
- [6] Ikeda, Y. and Tokinaga, S.: Controlling the Chaotic Dynamics by Using Approximated System Equations Obtained by the Genetic Programming, *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol.E84-A, No.9, pp.2118–2127 (2001).
- [7] DeLellis, P., deBernardo, M., Garofalo, F. and Porfiri, M.: Evolution of Complex Networks via Edge Snapping, *IEEE Trans. Circuit and Systems*, Vol.57, No.8, pp.2739–2745 (2010).
- [8] DeLellis, P., deBernardo, M. and Garofalo, F.: Synchronization of Complex Networks through Local Adaptive Coupling, *Chaos*, Vol.18, p.03711 (2008).
- [9] Zhou, C. and Kurths, J.: Dynamical Weights and Enhanced Synchronization in Adaptive Complex Networks, *Phys. Rev. Lett.*, Vol.96, p.164102 (2008).
- [10] Currie, M. and Kubin, I.: Chaos in the Core-periphery Model, *Journal of Economic Behavior & Organization*, Vol.60, p.252, 275 (2006).
- [11] Puga, D.: Urbanization Patterns: European Versus Less Developed Countries, *Journal of Regional Science*, Vol.38, pp.231–252 (1998).
- [12] Krugman, P.R.: Increasing Returns and Economic Geography, *Journal of Political Economy*, Vol.99, pp.483–499 (1991).
- [13] 時永祥三, 高木 昇: スケールフリーネットワーク上に配置された局所的交流を行うエージェントの行動分析—エージェント特性のマルチフラクタル分析を中心として, *信学論*, Vol.J94-A, No.5, pp.323–335 (2011).
- [14] 時永祥三, 池田欽一: 局所的交流による行動決定と状態遷移を行うマルチエージェントからなる平面上のエージェント・クラス形成分析, *情報処理学会論文誌 数理モデル化と応用*, Vol.4, No.4, pp.19–36 (2011).
- [15] 時永祥三, 池田欽一: 局所的交流をする平面上のエージェント特性で生成される信号のカオス・マルチフラクタル分析, *信学論*, Vol.J94-A, No.6, pp.389–404 (2011).
- [16] Oh, W. and Jeon, S.: Membership Herding and Network Stability in the Open Source Community: The Ising perspective, *Management Science*, Vol.53, No.7, pp.1086–1101 (2007).
- [17] Rump, C.M. and Stidham, Jr., S.: Stability and Chaos in Input Pricing for a Service Facility with Adaptive Customer Response to Congestion, *Management Science*, Vol.44, No.2, pp.246–261 (1998).
- [18] Stidham, Jr., S.: Pricing and Capacity Decisions for a Service Facility: Stability and Multiple Local Optima, *Management Science*, Vol.38, No.2, pp.1121–1139 (1992).
- [19] Haxholdt, C., Larsen, E.R. and Ackere, A.V.: Mode Locking and Chaos in Deterministic Queueing Model with Feedback, *Management Science*, Vol.49, No.6, pp.816–830 (2003).
- [20] Chen, X. and Tokinaga, S.: Approximation of Chaotic Dynamics for Input Pricing at Service Facilities Based on the GP and the Control of Chaos, *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol.E85-A, No.9, pp.2107–2117 (2002).
- [21] 池田欽一, 陳 曉榮, 時永祥三: GPによる学習を基礎としたマルチエージェント・システムによるプライシング時系列のカオス性分析とその応用, *電子情報通信学会論文誌*, Vol.J89-A, No.4, pp.298–307 (2006).
- [22] 池田欽一, 陳 曉榮, 時永祥三: GPによる学習を基礎としたマルチエージェント・システムによるプライシング時系列のカオス性分析とその応用, *信学論*, Vol.J89-A, No.4, pp.298–307 (2006).
- [23] 池田欽一, 時永祥三: ノードへのフロー入力調整を含むネットワークにおけるプライシングのカオス性変動の解析とその抑制, *情報処理学会論文誌 数理モデル化と応用*, Vol.2, No.2, pp.22–37 (2009).
- [24] 池田欽一, 時永祥三: ネットワーク構成されたノードにおけるフロー入力調整と退去を含むプライシング時系列のカオス解析とその抑制, *信学論*, Vol.J93-A, No.1, pp.1–10 (2010).
- [25] Caballé, J., Jarque, X. and Michetti, E.: Chaotic Dynamics in Credit Constrained Emerging Economics, *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol.30, pp.1261–1275 (2006).
- [26] Aghion, P., Bacchetta, P. and Piketty, T.: Dualism and Macroeconomic Volatility, *Quarterly Journal of Economics*, Vol.114, pp.1357–1397 (1999).
- [27] Azariadis, C. and Smith, B.: Financial Intermediation and Regime Switching in Business Cycle, *American Economic Review*, Vol.88, pp.516–536 (1999).
- [28] 陳 曉榮, 時永祥三: 共進化 GPを用いたマルチエージェントシステムの構成とその人工市場分析への応用, *電子情報通信学会論文誌*, Vol.E86-A, No.10, pp.1038–1048 (2003).
- [29] Ikeda, Y. and Tokinaga, S.: Chaoticity and Fractality Analysis of an Artificial Stock Market by the Multi-agent Systems Based on the Co-evolutionary Genetic Programming, *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol.E87-A, No.9, pp.2387–2394 (2004).
- [30] Ikeda, Y. and Tokinaga, S.: Multi-fractality Analysis of Time Series in Artificial Stock Market Generated by Multi-agent Systems Based on the Genetic Programming and its Applications, *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol.E90-A, No.9, pp.2212–2222 (2007).
- [31] Shoven, J.B. and Whalley, J.: *Applying General Equilibrium*, Cambridge University Press, Cambridge (1992).
- [32] Darvas, Z. and Szapary, O.: Business Cycle Synchronization in the Enlarged EU, *Open. Econ. Rev.*, Vol.19, pp.1–19 (2007).
- [33] Calderon, C., Chong, A. and Stein, E.: Trade Intensity and Business Cycle Synchronization: Are Developing Countries are Different?, *J. Int. Econ.*, Vol.71, pp.2–21 (2007).

付 録

A.1 付録 A

最初に記号の意味を説明しておく [10], [31].

$p_i(t)$, $w_i(t)$: サイト i で生産されるプロダクトの評価値とメンバの満足度

$d_i(t)$: サイト i で生産されるプロダクトの最適作製数量 (需要数量 q に等しい)

$Y_i(t)$: サイト i におけるメンバのプロダクト取得予算 (収入に等しい)

$n_i(t)$, $\theta_i(t)$: サイト i における運営者立地数, メンバ比率

F : サイトの運営者が定常的に獲得できるメンバ数

ν (< 1): メンバの取得予算に占めるプロダクトへの支出割合

σ : プロダクト評価値の弾性値で評価値が 1 単位増加したときの需要変化

運営者は作製に一定の固定的労力とプロダクト 1 単位増加ごとに一定の労力の追加を必要とするとして, 具体的にはプロダクトを作製し, その費用 c は固定部分と, 作製数量 g に比例する部分からなりたち, 次のような式で与えられると仮定する.

$$c = \alpha + \beta g \quad (\text{A.1})$$

サイトにおけるプロダクト作製の効果を最大化する 1 階の条件を導出すると, 次のようになる [10].

$$p_i(t) = \frac{\beta\alpha}{\sigma-1} w_i(t), \sigma = \frac{p_i(t)}{q_i(t)} \frac{\partial q_i(t)}{\partial p_i(t)} \quad (\text{A.2})$$

このようなモデル化のもとで, サイトの運営者は最適な作製を追及し, メンバは自身の要求が充足される (効用が最大化される) ような行動を追及する. プロダクトの移動にコストがかからない場合には, これらの双方の要求が満足される時点で, プロダクト評価値を考慮した実質的なメンバの満足度によりエージェントの存在比率が一定の値に決まる (いわゆる均衡条件の存在). 一般には, このような均衡条件 (サイトが 2 つの場合には $\theta_1(t) = \theta_2(t) = 0.5$ である) が容易に検出できて, 時間が経過しても変化しない. しかしながら, プロダクトの移動にコスト $T > 1$ が必要である場合には $\theta_i(t)$ が時間的に変動し, しかもその変動はパラメータ T に依存して, カオス的な変動を示すことが分析されている.

以下ではモデルの説明において重要な式のみ整理しておく. まずサイト i におけるプロダクトの評価値を調整する指標 $G_i(t)$ のべき乗は次で与えられる.

$$G_i(t)^{1-\sigma} = \sum_{j=1}^N n_j(t) \hat{p}_j^{1-\sigma}, n_j(t) = \theta_j(t) L / l, \quad (\text{A.3})$$

ここで右辺に含まれる \hat{p}_j は次のように変換する.

$$\hat{p}_j(t) = \begin{cases} p_j(t), & i = j; \\ p_j(t)T, & i \neq j \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

$n_j(t)$ はサイト j における運営者立地数を表すが, すでに述べたように 1 つの商品は 1 つの運営者のみにより生産されるので, プロダクトの種類の数と同じである. また, サイト i におけるメンバの名目プロダクト取得予算 $Y_i(t)$ は, 次のように表すことができる.

$$Y_i(t) = F/2 + w_i(t)\theta_i(t)L \quad (\text{A.5})$$

このとき, サイト i におけるプロダクトの需要 $d_i(t)$ は, メンバのプロダクト取得予算にプロダクトへの支出割合 ν を掛けたものであること, および移動コストを考慮したサイト j でのプロダクト評価値に対する指数が $G_j(t)$ となることを考慮すると, 次で与えられる.

$$d_i(t) = \nu \left[\sum_{j=1}^N Y_j(t) \hat{G}_j(t)^{\sigma-1} \right] p_i^{-\sigma} \quad (\text{A.6})$$

この式の右辺に含まれる $\hat{G}_j(t)$ に対しては $i = j$ ならば $\hat{G}_j(t) = G_j(t)$ および $i \neq j$ ならば $\hat{G}_j(t) = G_j(t)/T$ という変換が行われる. どのサイトにおいてもサイトの運営者の生産するプロダクトの数量は同じであることが要求される (プロダクト評価値とメンバの満足度が比例することによる), 次の式が価格が満足すべき方程式になる.

$$d_i(t) = g \quad (\text{A.7})$$

式 (A.3) に示す指数により, サイト i での実質 (プロダクト評価値を考慮した) メンバの満足度は, 次により与えられる.

$$\omega_i(t) = w_i(t)G_i(t)^\mu \quad (\text{A.8})$$

この実質的な満足度 $\omega_i(t)$ の差により, メンバはサイト間を移動し, サイト i におけるメンバの割合である $\theta_1(t)$ の遷移については, 式に示すような過程をたどる [10], [11], [12].

A.2 付録 B

アントレプレナである個人は資本 $K(t)$ と労働 $z(t)$ を投入して生産をする. 製造される商品の生みだす価値 $y(t)$ の表現は, 次の関数にまとめられる (コブ・ダグラス型生産と呼ばれるが, 詳細は省略する). すでに述べたように, 商品の価値は投入される資本と労働の積ではなく, これらの間の相補的な関係式で結ばれている.

$$y(t) = A[K(t)]^\rho [z(t)]^{1-\rho} \quad (\text{A.9})$$

投資額を $I(t)$ は, 現在の市場の価格 $p(t)$ により決まることと仮定する.

$$I(t) = K(t) + p(t)z(t) \quad (\text{A.10})$$

$y(t)$ を最大にする条件を求めると, 次の関係式が得られる.

$$z(t) = I(t)(1 - \rho)/p(t), K(t) = \rho I(t) \quad (\text{A.11})$$

同時に最適な労働投入は、式 (A.11) の $z(t)$ を、一定の労働投入 Z と等しくおくことで求められる。

$$p(t) = I(t)(1 - \rho)/Z \quad (\text{A.12})$$

同時に、これらの変数をもとにして、均衡する最適な生産数量を次のような式で表現しておく。

$$y(t) = AI(t)\rho^\rho(1 - \rho)^{1-\rho}/p(t)^{1-\rho} \quad (\text{A.13})$$

時刻 t における個人の利益を $W(t)$ とする。この個人は投資をまかなう金額を、時刻 t における利益と資金借入との合計であると仮定し、資金借入の額を時刻 t における利益 $W(t)$ に比例する（比例定数を η とする）と仮定すると、次のような関係になる。

$$I(t) = (1 + \eta)W(t) \quad (\text{A.14})$$

このような関係を用いて時刻 $t + 1$ において個人が手にする生産による収入から支出を差し引いたものが利益 $W(t + 1)$ であるので、次のようになる。

$$W(t + 1) = (1 - \alpha_w)(e_w + y(t) - r\eta W(t)) \quad (\text{A.15})$$

これを式 (A.14) に代入し、さらに生産額 $y(t)$ を式 (A.15) に代入すると、次のような関係が得られる。

$$W(t + 1) = (1 - \alpha_w)[e_w + W(t)^\rho(\xi - r\eta W(t)^{1-\rho})] \quad (\text{A.16})$$

$$\xi = A\rho^\rho(1 + \eta)^\rho Z^{1-\rho} \quad (\text{A.17})$$

ただし、形式的には時刻 t と $t + 1$ との間における利益の変化の式は、上の式で記述可能であるが、資金を借入する場合に、市中金利 r が生産することによる利益率よりも高い場合には、資金借入の実施ではなく、生産の増強が選択される。すなわち、この条件が成り立つときの生産による利益 W^m は、関係式 $y(t) - r\eta W(t) = rW(t)$ を満足する $W(t)$ により得られる。式 (5) のような関係が $W(t)$ と W^m との関係で決定される。



時永 祥三 (正会員)

昭和 46 年九州大学工学部情報工学科卒業。昭和 52 年九州大学大学院博士課程修了。工学博士。同年北九州高専電気工学科講師。昭和 54 年大分大学工学部組織工学科講師、助教授。昭和 61 年九州大学経済学部経済工学科助教授。平成 4 年同教授。昭和 64 年～平成 2 年カリフォルニア大学、テキサス大学客員研究員。経営情報システム、経営エキスパートシステム、時系列処理の研究に従事。電子情報通信学会会員。