

張力均一条件下におけるドビー織機の綜統枠数最小化

松浦 勇^{1,a)} 平田 富夫²

受付日 2012年11月11日, 採録日 2013年4月5日

概要: ドビー織機に長目綜統を導入すると, 所望の織物を製織するために必要な綜統枠枚数を削減できることが知られている. しかし, 長目綜統を導入した製織においてはたて糸に過度の張力がかかる場合があり, その結果, 織物の品質の低下を招く. そこで, 本論文では, たて糸張力が均一であるという条件のもとで綜統枠数を最小化するという, より現実的な問題について考え, プール行列の排他的プール階数を求める問題として定式化した. さらに, この問題がグラフの2部クリーク分割問題と等価であることを示した. また, 発見的解法を提案し, 実験により性能を評価した.

キーワード: 織機, 長目綜統, 排他的プール階数, 2部クリーク分割問題

Minimizing the Number of Heald Frames of a Dobby Loom under the Constraint of Uniform Tension

ISAMU MATSUURA^{1,a)} TOMIO HIRATA²

Received: November 11, 2012, Accepted: April 5, 2013

Abstract: A dobby loom is a weaving machine prevailing in the textile industry. By introducing long-eye healds into a dobby loom, we can reduce the number of heald frames required for a given design of cloth. However, introducing long-eye healds may cause too much tension on a warp yarn, and thus, quality of textile might get worse. In this paper, we discuss a problem of minimizing the number of heald frames under the constraint that warp yarn tension is kept uniform. First, we formalize the problem as finding the exclusive Boolean rank of a Boolean matrix associated with the design of cloth. Next, we show that the problem is equivalent to the biclique edge partition problem. Finally, we propose a heuristic algorithm and conduct experiments on various weave designs.

Keywords: loom, long-eye heald, exclusive Boolean rank, biclique edge partition problem

1. はじめに

織機では, たて糸を針金状の綜統に通して上下に運動させることにより, よこ糸を通す空間をつくり出す. ドビー織機では同じ上下運動をするたて糸の綜統はすべて1つの綜統枠に取り付けられる. そのため, 織機に装備された綜統枠の枚数が多いほど複雑な模様を製織することができる. 製織工場においては8枚または16枚の綜統枠を装備した

ドビー織機が多く使われている. 長目綜統は目が上下方向に長い綜統で, これを導入することにより, 与えられた綜統枠枚数で製織可能な織物組織数を増加させることができる [2], [3], [4], [5], [6], [11], [16], [17], [18]. 文献 [10] は, 長目綜統を導入したドビー織機において, 与えられた織物組織を製織するときの最小綜統枠枚数を求める問題 (綜統枠数最小化問題) について議論している. この問題が織物組織図をプール行列と見なしたときのプール階数 (Boolean rank) を求める問題と等価であることを示し, グラフ彩色アルゴリズムを用いた発見的解法を提案している. 文献 [12] は綜統枠数最小化問題を集合被覆問題に変換し整数

¹ あいち産業科学技術総合センター
Aichi Center for Industry and Science Technology,
Ichinomiya, Aichi 491-0931, Japan

² 名古屋大学
Nagoya University, Nagoya, Aichi 464-8601, Japan

^{a)} matsuura@aichi-inst.jp

本論文の一部は研究会および国際ワークショップで発表されている [9], [13].

計画ソルバで解くという厳密解法を提案している。

長目綜統を導入すると、過度の張力がかかるため糸が生じ、張力の不均一が発生する場合がある。本論文では、たて糸張力が均一であるという新たな制約を加えた、より現実的な問題を考える。つまり、この制約のもとでの綜統枚数最小化問題（均一張力綜統枚数最小化問題）を考え、この問題がプール行列の“排他的プール階数”を求める問題と等価であることを示す。さらに、排他的プール階数問題が2部グラフの2部クリーク分割問題と等価であることを示す。この結果に基づき均一張力綜統枚数最小化問題に対する発見的アルゴリズムを提案し、実際にドビー織機で製織されている織物組織に対して実験を行う。

本論文の構成は次のとおりである。2章で製織の原理、織方図、それに文献[10]で得られている結果について解説する。3章で均一張力綜統枚数最小化問題の定式化について述べ、4章でアルゴリズムの提案とその実験結果を示す。5章はまとめである。

2. 準備

2.1 製織の原理

図1(a)に織機の模式図を示す。織機には、複数の綜統枠(heald frame)が装着されており、図1(b)に示す綜統(heald)がそのうちの1つの綜統枠に取り付けられている。たて糸は綜統の目(eye)に通されていて、綜統枠の上下運動によって2つの層に分けられ、その間によこ糸が通される。そのため、同じ綜統枠の綜統を通るたて糸はつねに同じ上下運動をする。ドビー織機の綜統枚数は30枚程度までで、製織工場においては8枚または16枚の綜統枠を装備したものが多く使われている。

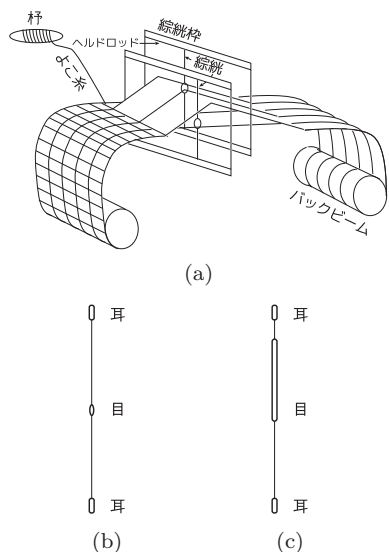


図1 (a) 織機, (b) 普通綜統, (c) 長目綜統

Fig. 1 (a) Loom, (b) normal heald and (c) long-eye heald.

2.2 織物組織図と織方図

織物における糸の交差の状態は、通常、1つの単位の繰返しとなっている。図2(a)の織物では、黒色で示すたて糸3本、白色で示すよこ糸3本からなる単位が繰り返されている。糸の交差の状態は織物組織図(weave diagram, 以下、組織図と呼ぶ)で表現される。たて糸がよこ糸の上を通っている交差点を■で表し、よこ糸がたて糸の上を通っている交差点を□で表す。図2(a)の織物の組織図を同図(b)に示す。

織物組織を織るための、たて糸の綜統への通し方を示すのが綜統通図(threading draft diagram)であり、開口装置(綜統枠)の運動順序を示すのが紋枠図(peg plan diagram)である。組織図、綜統通図、紋枠図を合わせて、織方図(lifting plan diagram)と呼ぶ。図3(a)に織方図の例を示す。図3の組織図の列について見ると組織図には4種類の列パターンが現れており、それらが紋枠図の4つの列になっていることが分かる。このことから、この組織図の模様を製織するためには織機の綜統枠は4枚必要である。詳しくは文献[12]を参照されたい。

2.3 長目綜統を用いた製織

長目綜統とは、図1(c)に示すような形状の、目が上下方向に長い綜統であり[15]、ドビー織機に導入することで製織時に必要な綜統枚数数を減らすことができる。普通綜

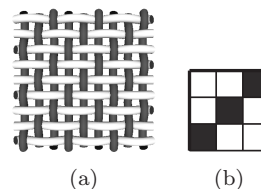
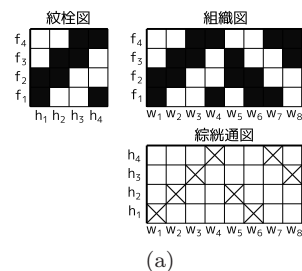


図2 (a) 織物, (b) 織物組織図

Fig. 2 (a) A woven fabric and (b) its weave diagram.



$$\begin{matrix}
 P & W \\
 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 & T \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 & (b)
 \end{matrix}$$

図3 (a) 織方図と (b) その行列表現

Fig. 3 (a) A lifting plan diagram and (b) its matrix representation.

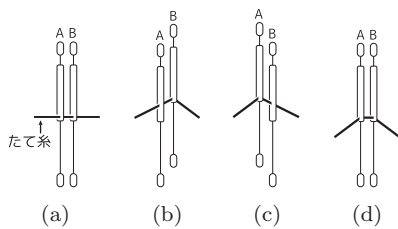


図 4 長目綜統の動き

Fig. 4 Movements of long-eye healds.

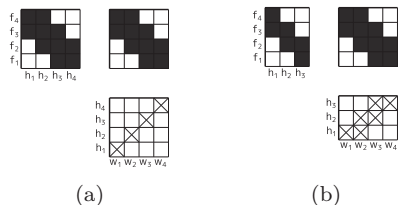


図 5 長目綜統導入の効果 (1) ((a) 普通綜統のみを使う場合, (b) 長目綜統を導入した場合)

Fig. 5 Effects of introducing long-eye healds (1) ((a) Only normal healds are used, (b) long-eye healds are introduced).

統のみを用いる製織では、たて糸はそれぞれ 1 本の綜統に通されるが、長目綜統を導入した場合は、たて糸は複数の綜統を通ることができる。織機の側面から見た 4 つの模式図を図 4 に示す。ここでは、2 本の長目綜統 A, B を考え、太線で示したたて糸は両方の長目綜統に通っているとする。A, B いずれか一方が上昇する場合 (同図 (b), (c)), および A, B とも上昇した場合 (同図 (d)) に、たて糸は開口する。

長目綜統を使うことで綜統枠枚数を減らすことができる簡単な例を示す。普通綜統を使った場合の織方図を図 5 (a) に示す。組織図をみると、4 つの異なる列パターンがある。つまり、4 本のたて糸はすべて異なる動きをする。このため、普通綜統を使った場合には、綜統枠が 4 枚必要である。図 5 (b) に長目綜統を併用した場合の織方図を示す。たて糸 w_2 は綜統枠 h_1 と h_2 の長目綜統を通っており、たて糸 w_3 は綜統枠 h_2 と h_3 を通っている。紋栓図の列数が 3 であることから綜統枠が 3 枚で済むことが分かる。組織図が与えられたとき、長目綜統を導入したドビー織機によりその織物を製織するのに必要な最小の綜統枠数を求める問題を綜統枠数最小化問題と呼ぶ。

2.4 織方図の行列表現

本論文では、織方図に関して数理的な議論を行うために組織図、紋栓図、綜統通図をそれぞれ行列で表す。組織図、紋栓図における ■ と □ をそれぞれ 1 と 0 で表し、綜統通図における × と □ をそれぞれ 1 と 0 で表す。組織図、紋栓図、綜統通図を行列で表したものをそれぞれ W, P, T と表記する。ただし、行列 T の行の順序は綜統通図と逆にする。図 3 (a) の織方図に対応する 3 つの行列を同図 (b)

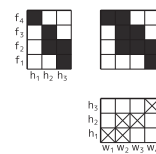


図 6 長目綜統導入の効果 (2)

Fig. 6 Effect of introducing long-eye healds (2).

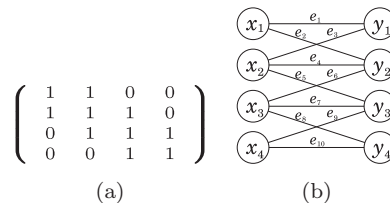


図 7 (a) ブール行列 W , (b) 2 部グラフ B_W

Fig. 7 (a) Boolean matrix W and (b) bipartite graph B_W .

に示す。

図 3 (b) の行列 W, P, T のように、すべての成分が 0 または 1 である行列はブール行列と呼ばれる。ブール行列 A, B の和 $A + B$ と積 $A \cdot B$ をそれぞれ通常の行列の和と積と同様に定義する。ただし、成分の計算はブール代数に従うものとする。つまり、 $+$ は論理和に、 \cdot は論理積に置き換えて演算を行う。行列 A の (i, j) 成分を $A_{i,j}$ で表す。

普通綜統のみを使用する場合、および長目綜統を導入する場合のいずれにおいても組織図 W , 紋栓図 P , 綜統通図 T の間には行列のブール積 \cdot を用いて $W = P \cdot T$ の関係が成立する [12]。

2.5 綜統枠数最小化問題の定式化

A を m 行 n 列のブール行列とする。 A のブール階数 (Boolean rank) とは、 A を m 行 r 列のブール行列 B と r 行 n 列のブール行列 C のブール積 $A = B \cdot C$ として表現することができる最小の r のことをいう。

文献 [10] では、綜統枠数最小化問題が、織物組織に対応する m 行 n 列のブール行列 W のブール階数を求める問題と等価であることを示している。ブール階数が r である W を m 行 r 列の P と r 行 n 列の T のブール積により $W = P \cdot T$ と表したときの P と T が、綜統枠数最小化問題の最適解における紋栓図と綜統通図に対応する。つまり、 P の列数 (= T の行数) が、 W で表される織物組織を製織するための綜統枠の数である。

文献 [10] はさらに、ブール行列のブール階数を求める問題が 2 部グラフのクリーク被覆問題と等価であることを示している。 m 行 n 列のブール行列 W から 2 部グラフ $B_W = (X, Y, E)$ を次のように構成する。 $X = \{x_1, \dots, x_m\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ とし、 $W_{i,j}$ が 1 のとき、そしてそのときだけ、頂点 x_i と頂点 y_j を辺で結ぶ。図 7 に例を示す。

X の部分集合 X_S と Y の部分集合 Y_S を頂点集合とする

部分グラフ $B'_W = (X_S, Y_S, E_S)$ で、任意の2頂点 $x_i \in X_S$, $y_j \in Y_S$ が隣接しているものを2部クリークという。 B_W の部分グラフ $B''_W = (X, Y, E_S)$ を B'_W と同一視して、2部クリークと呼ぶこともある。2部グラフ B_W のクリーク被覆とは、 B_W の2部クリークの集合 $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ で、 B_W のどの辺も \mathcal{C} の少なくとも1つの2部クリーク C_i に含まれているものをいう。2部クリーク被覆問題とは、与えられた2部グラフ B_W に対し最小サイズのクリーク被覆 \mathcal{C} を求める問題である。

定理 1. [10] ブール行列 W のブール階数は、2部グラフ B_W の最小クリーク被覆のサイズに等しい。

この定理より、綜統枠数最小化問題がNP困難であることが分かる。文献 [10] では、この問題に対してグラフ彩色アルゴリズムを用いた発見的アルゴリズムを提案している。

3. 均一張力綜統枠数最小化問題

3.1 長目綜統を導入した場合のたて糸張力

製織工場においては、製織時のたて糸張力の管理には細心の注意が払われる。たて糸張力には推奨される適正值があり、たて糸張力が適正值より高い場合には、過度に伸ばされ切れのおそれがある。切れない場合でも織物の品質に悪影響を及ぼすことがある。逆に、たて糸張力が適正值より低い場合には、綜統枠が上昇してもたて糸が十分に開口しないことにより、本来、よこ糸の上にくるはずのたて糸がよこ糸の下にくるという事態が生じ、欠陥（目飛び）が発生する。このように、製織時のたて糸張力の管理は非常に重要である。

長目綜統を導入した織機では、複数の長目綜統を通るたて糸がある。図4の(b), (c)の状態では、開口されたたて糸の経路は普通綜統により開口されたときと同じであるが、同図(d)の状態では、たて糸の経路が長くなり、張力が増大する。図5(b)の織方図では、たて糸 w_2 は綜統枠 h_1, h_2 の綜統を通過している。よこ糸 f_3 が通されるとき、綜統枠 h_1, h_2 がともに上昇し、図4(d)の状態となる。よこ糸 f_2 が通されるときはたて糸 w_3 も同様の状態となる。つまり、長目綜統導入時にはたて糸が切れて織機が停止するおそれがある。

長目綜統を導入することにより必要綜統枠枚数を減少させることができる別の例を図6に示す。この組織図の列パターンは4種類なので、この織物は普通綜統のみを用いて4枚の綜統枠を装備した織機で製織することができる。しかし、図6の織方図に示すように、長目綜統を導入すると3枚の綜統枠ですむ。この綜統通図を見ると、たて糸 w_2 は2つの綜統枠 h_1, h_2 の綜統を通過している。しかし紋栓図の各行を見ると綜統枠 h_1, h_2 が同時に開口することはない。そのため、図4(d)のような状態は発生しない。以下では、開口されるたて糸が、ただ1つの長目綜統によってのみ開口するような最小の綜統枠数の織方図を求める問題を考え

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (a)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (b)$$

図8 (a) ブール階数は3であり、(b) 排他的ブール階数は4であるブール行列の例

Fig. 8 Boolean matrix such that (a) the Boolean rank is three and (b) the exclusive Boolean rank is four.

る。この問題を、均一張力綜統枠数最小化問題と呼ぶ。

3.2 排他的ブール階数による定式化

3.1節での考察から、次のように“排他的ブール階数”を定義する。 A を m 行 n 列のブール行列とする。 A は、 m 行 r 列のブール行列 B と r 行 n 列のブール行列 C の積 $A = B \times C$ として表現することができるとする。右辺はブール積ではなく、通常の行列の積であることに注意されたい。 A の排他的ブール階数 (exclusive Boolean rank) とは、 A をブール行列 B と C の積で表したときの最小の r のことをいう。図8のブール行列は、ブール階数は3であるが、排他的ブール階数は4である。

P を紋栓図を表す m 行 r 列の行列、 T を綜統通図を表す r 行 n 列の行列とする。 $P \times T$ の (i, j) 成分を $(P \times T)_{i,j}$ と表記する。 P におけるよこ糸 f_i に対応する行は、よこ糸 f_i が通るとき、どの綜統枠が上昇するかを示している。また、 T におけるたて糸 w_j に対応する列は、たて糸 w_j が通る綜統の枠を表している。よって、 $(P \times T)_{i,j}$ は、 w_j が通る綜統で、よこ糸 f_i が通るときに上昇しているものの個数を表す。これより、次の観察を得る。

観察 1. よこ糸 f_i が通るときにたて糸 w_j が開口される場合、そのたて糸は $(P \times T)_{i,j}$ 個の綜統によって開口される。

観察1により、各たて糸が開口されるときにはただ1つの綜統の上昇によって開口されるとき、そしてそのときのみ $P \times T$ のすべての非零成分は1である。したがって、所望の織物を長目綜統を導入した織機で製織するとき、各たて糸がただ1つの綜統の上昇によって開口されるという条件のもとで最小綜統枠数を求める問題は、 $W = P \times T$ となる P の最小の列数 (T の最小の行数) を求める問題と等価になり、行列 W の排他的ブール階数を求める問題に等しいことが分かる。例として図6の織方図の行列表現を以下に示す。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

左辺のブール行列 W は、列数3のブール行列 P と行数3のブール行列 T との積で表される。このことから行列 W に対応する織物組織は3枚の綜統枠を持つ織機で製織することができ、しかも、たて糸が開口されるときに、2つ以

上の綜統によって開口されることはない。

3.3 2部クリーク分割問題への変換

ここでは、ブール行列の排他的ブール階数を求める問題が2部グラフのクリーク分割問題と等価であることを示す。2部グラフ G のクリーク分割とは、 G の2部クリークの集合 $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ で、 G のどの辺も \mathcal{C} のただ1つの2部クリーク C_i に含まれているものをいう。2部クリーク分割問題とは、与えられた2部グラフ G に対し最小サイズのクリーク分割 \mathcal{C} を求める問題である。

m 行 r 列のブール行列 P を r 個の m 行1列の小行列 P_{*k} ($1 \leq k \leq r$) に分割し、 r 行 n 列のブール行列 T を r 個の1行 n 列の小行列 T_{k*} ($1 \leq k \leq r$) に分割する。このとき、 $P \times T = \sum_{k=1}^r (P_{*k} \times T_{k*})$ が成り立つ [14]。 $m \times 1$ 行行列 P_{*k} と $1 \times n$ 行行列 T_{k*} の積 $P_{*k} \times T_{k*}$ は $m \times n$ 行行列になり、クロスベクトルと呼ばれる。 W の排他的ブール階数は W を最小数のクロスベクトルの和で表したときのクロスベクトルの数に一致する。

2つの行列 A, B の行数、列数がともに等しく、かつ、すべての (i, j) 成分について $A_{i,j} \leq B_{i,j}$ が成り立つ場合に $A \leq B$ と表す。

補題 1. M は m 行 n 列のブール行列で、 $M \leq W$ かつ排他的ブール階数が1であるとする。 M を変換した B_M は2部グラフ B_W の2部クリークである。逆に、 B_W の2部クリーク B_C に対応するブール行列 $C \leq W$ を考えると、その排他的ブール階数は1である。

証明を付録 A.1 に示す。

以下において記号 \sum および $+$ は通常のを表す (つまり、ブール和ではない)。また、 \times は通常の行列積である。

定理 2. ブール行列 W の排他的ブール階数は、2部グラフ B_W の最小クリーク分割のサイズに等しい。

【証明】 ブール行列 W の排他的ブール階数を r とし、2部グラフ B_W の最小クリーク分割のサイズを b とする。排他的ブール階数の定義から m 行 n 列のブール行列 W は m 行 r 列のブール行列 P と r 行 n 列のブール行列 T の通常の行列の積で $W = P \times T$ と表すことができる。さらに $P \times T$ を $W = \sum_{i=1}^r P_{*i} \times T_{i*}$ と表すことができる。定義からクロスベクトル $P_{*i} \times T_{i*}$ の排他的ブール階数は1である。これらの r 個のクロスベクトルに対応する r 個の2部グラフを考える。補題 1 より排他的ブール階数が1である行列は B_W の2部クリークに対応する。よって、 B_W のすべての辺は r 個の2部クリークに分割できることになり、 $b \leq r$ が成り立つ。

$Q = \{Q_1, \dots, Q_b\}$ を B_W における最小クリーク分割とする。補題 1 より、 B_W の2部クリーク Q_i に対応するブール行列 $M_{Q_i} \leq W$ は排他的ブール階数が1である。排他的ブール階数の定義から、 M_{Q_i} はクロスベクトルで $M_{Q_i} = A_i \times B_i$ と表すことができる。ここで、 A_i は m 行

1列の行列、 B_i は1行 n 列の行列である。よって、 W は b 個のクロスベクトルの和 $W = \sum_{i=1}^b A_i \times B_i$ で表すことができる。これは、行列の積を小行列に分割したかたちで表記したものである。ただし、 A は A_1, \dots, A_b をこの順に並べた m 行 b 列の行列、 B は B_1, \dots, B_b をこの順に並べた b 行 n 列の行列である。よって、 $r \leq b$ である。以上から $r = b$ となる。 ■

4. 発見的アルゴリズムの提案と性能評価

4.1 アルゴリズム

3章で、均一張力総統棒数最小化問題と2部グラフ B_W の最小クリーク分割問題の等価性を示した。しかし2部クリーク分割問題はNP困難であることが知られている [7]。そのため発見的アルゴリズムや近似アルゴリズムを使うのが実際的である。本節では発見的アルゴリズムを提案する。

2部グラフ B_W において、 $\Gamma(v_i) = \Gamma(v_j)$ となる2個の頂点 v_i と v_j が存在する場合を考える。 v_j を削除してできる2部グラフ B'_W のクリーク分割 Q から B_W のクリーク分割 Q' を求めることができる。 B_W から B'_W への変換を縮小化と呼ぶ。本実験では各アルゴリズムの実行に先立ち、すべての問題例に対して可能な限りの縮小化を行う。

以下に示す **VC-BEPP** により得られた解のサイズを r_V とし、**Greedy-RLF** により得られた解のサイズを r_G とする。また、最適解のサイズを r^* とする。事前に実験を行った結果、 r_G/r^* と r_V/r^* を比較すると、 r_V/r^* の方が問題例ごとのばらつきが小さいことが分かった。一方で、 $r_G < r_V$ となる問題例も少なからずあることも分かった。そのため、提案アルゴリズムは、 r_G, r_V を比較し、小さな方 $r = \min(r_G, r_V)$ を出力する。

Greedy-RLF

このアルゴリズムは B_W から極大2部クリークを除去することを繰り返す。はじめに、2部グラフ $B_W = (X, Y, E)$ からグラフ $G_B = (V_B, E_B)$ を次のように構成する。 B_W の辺 e_i を G_B の頂点と見なす。つまり $V_B = E$ とする。 B_W において異なる2つの辺 e_i, e_j を含む2部クリークが存在するとき、そして、そのときだけ G_B において頂点 e_i と e_j を隣接させる。例として、図 7(b) の B_W から構成した G_B を図 9 に示す。

次に、グラフ G_B の極大クリーク C を1つ選択する。選

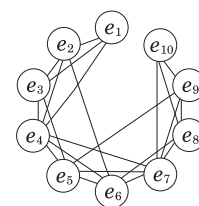


図 9 図 7(b) の B_W から構成したグラフ G_B

Fig. 9 The graph G_B constructed from B_W in Fig.7(b).

扱の方法はグラフ彩色アルゴリズム RLF [8] に基づく。 \overline{G}_B に対し RLF が色番号 1 を割り当てた頂点の集合は G_B の極大クリークになる。これらの頂点に対応する B_W の辺は B_W の極大 2 部クリークである。この極大 2 部クリークの辺を B_W から除去する。

VC-BEPP

グラフ $G = (V, E)$ の頂点被覆とは、頂点集合 V の部分集合 V' であり、 E のいずれの辺も V' の頂点に接続しているものことである。頂点被覆問題とは、与えられたグラフ G に対し最小サイズの頂点被覆を求める問題である。一般のグラフに対する頂点被覆問題は NP 困難であるが、2 部グラフに対しては多項式時間アルゴリズムが存在する [1]。2 部グラフにおいて、頂点 v と、 v の隣接頂点集合 $\Gamma(v)$ から誘導される部分グラフは 2 部クリークである（実際、星グラフである）。以上より、2 部グラフの最小頂点被覆 V' に含まれる v_i と $\Gamma(v_i)$ から誘導される部分グラフの集合は 2 部グラフのクリーク被覆になっている。このクリーク被覆から、同じサイズのクリーク分割を求めることができる。

4.2 実験

実際にドビー織機で製織されている 706 種類の織物組織 [12] に対して実験を行った。

2 部グラフ B_W の頂点数を $|X| = m$, $|Y| = n$ とし、縮小化後の 2 部グラフ B'_W の頂点数を m' , n' (= 普通綜統のみ使用時の綜統枠枚数) とする。

提案アルゴリズムの性能を評価するために整数計画ソルバによって厳密解を求めたところ、706 の問題例のうち、679 の問題例の厳密解を求めることができた。この結果を用い、**VC-BEPP** と **Greedy-RLF** をそれぞれ単独で実行した場合と、提案アルゴリズムとで厳密解が得られた問題例の個数を表 1 に示す。2 つのアルゴリズムを組み合わせることにより厳密解を求めることができる問題例が増えることが判明した。

さらに、問題例を次のように分類して、提案アルゴリズムの近似性能を調べた。整数計画ソルバによって 1 時間の制限時間内に厳密解を求めることができたが、提案アルゴリズムによっては最適解を求めることができなかった問題例 28 個をグループ I とした。また、整数計画ソルバによって厳密解が求めることができなかった問題例 27 個のうち、計算機のメモリ容量不足のため実行できなかった 4 個の問題例を除いた、23 個の問題例をグループ II とした。問題例に対し提案アルゴリズムが達成した近似率を $\alpha = r/opt$ で表す。ここで、 r は提案アルゴリズムで得られた綜統枠枚数で、 opt は最適解の綜統枠枚数である。表 2 に近似率 α ごとの、グループ I とグループ II の問題例の個数を示す。なお、グループ II については最適解が得られていないため、計算を打ち切った時点でソルバから得られた下界を用いている。グループ I の 28 個の問題例のうち、約 8 割の問題例

表 1 提案アルゴリズムによって最適解が得られた問題例の個数
Table 1 The number of instances for which the proposed algorithms obtain optimal solutions.

手法	679 の問題例のうち最適解を求めることができたものの個数
VC-BEPP	632
Greedy-RLF	412
提案アルゴリズム	651

表 2 提案アルゴリズムの近似率

Table 2 Approximation performance of the proposed algorithm.

近似率	グループ I	グループ II
$1.00 < \alpha \leq 1.10$	13	7
$1.10 < \alpha \leq 1.20$	11	3
$1.20 < \alpha \leq 1.30$	2	6
$1.30 < \alpha \leq 1.40$	2	2
$1.40 < \alpha$	0	5
合計	28	23

で α は 1.20 以下であった。 α が 1.20 を超える問題例は 4 個あったが、 α が最大の問題例においても、その値は 1.33 であった。グループ II の問題例は、整数計画ソルバを用いても 1 時間以内には最適解を求めることができないという意味で困難な問題である。これらの問題例の大半で α は 1.40 以下であった。 α が 1.40 を超える問題例は 5 個であり、これらの問題例の中で、 α の最大値は 1.71 であった。

4.3 考察

一般に、分割問題は被覆問題よりも計算が難しくなると思われる。たとえば、2 部クリーク被覆問題では極大 2 部クリークのみを対象とできるのに対し、2 部クリーク分割問題ではすべての 2 部クリークを考えなければならない。実際、文献 [12] では極大 2 部クリークを列挙して、2 部クリーク被覆問題を解いており、本論文の実験対象である 706 の問題例のうち 702 個に対して整数計画ソルバを用いて 1 時間以内で最適解を見つけている。それに対し、本論文の 2 部クリーク分割問題では、整数計画ソルバが最適解を見つけることができた問題例は 679 個のみであった。

実験で対象とした 706 の織物組織のうち、提案アルゴリズムによって綜統枠枚数を削減することができた織物組織は 138 個あった。このうち、削減数が特に大きかった織物組織図を図 10 (a), (b) に示す。普通綜統のみ使用時の綜統枠枚数を n' 、提案アルゴリズムによって得られた綜統枠枚数を r として、図のキャプション中に $n' \rightarrow r$ の形で表記した。図 10 (a) の解は、**VC-BEPP** により得られた。この紋栓図を見ると各行でただ 1 個の黒マスがある。これは任意のよこ糸が通るときに、開口する綜統枠がただ 1 つであることに対応している。このように **VC-BEPP** は比較的、自明な解を見つけている。図 10 (b) の解は **Greedy-RLF**

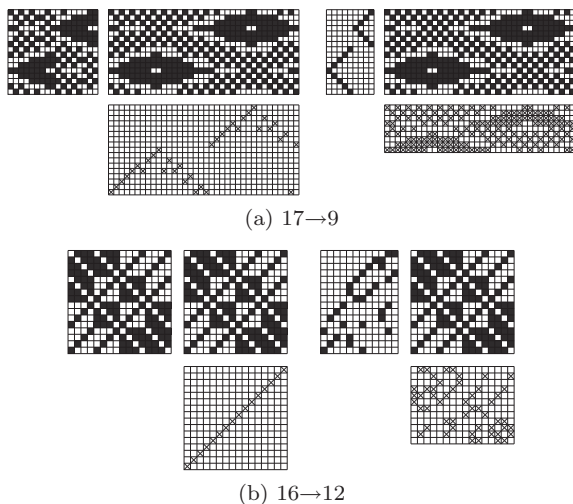


図 10 長目綜統導入の効果が大きかった織方図の例 (左：普通綜統のみ使用，右：長目綜統導入) ((a) 小紋織，(b) 昼夜斜文織)

Fig. 10 Two lifting plan diagrams on which introducing long-eye healds is of great effective (left: Only normal healds are used, right: Long-eye healds are introduced). ((a) figured weave, (b) twill check).

により得られた織方図である。この紋栓図を見ると各行で複数の黒マスがある。これは、よこ糸が通るときに開口する綜統枠が複数であることに対応しており、同図 (a) に示した解と比較すると複雑な解を見つけている。このように、VC-BEPP と Greedy-RLF が相補的に働き、それぞれのアルゴリズム単独で実行した場合と比較すると、より多くの最適解を求めることができたと考えられる。

5. まとめ

本論文では、綜統枠数最小化問題に、より現実的な制約を加えた均一張力綜統枠数最小化問題について議論した。この問題がブール行列の排他的ブール階数を求める問題と等価であることを示した。これは、均一張力条件がない場合にはブール行列のブール階数を求める問題であったことと対比すると興味深い結果である。さらに、排他的ブール階数問題が 2 部グラフのクリーク分割問題に帰着することを示した。これも、均一張力条件のない場合の 2 部クリーク被覆問題と対比できる。この帰着に基づき、均一張力綜統枠数最小化問題に対する発見的アルゴリズムを提案し、実際に製織されている織物組織に対して実験を行った。

謝辞 厳密解法の実装について貴重なアドバイスをいただいた柳浦睦憲先生に感謝します。

参考文献

[1] 藤重 悟：グラフ・ネットワーク・組合せ論，共立出版株式会社 (2002).
 [2] 後藤順一，廣津淳司：間接接結二重織物の織成方法，特開 2011-69025 (2011).
 [3] 廣津淳司：ヘルド及び二重織物の織成方法，特開 2011-252242 (2011).

[4] 廣津淳司，柄崎和孝：二重織物の織成方法，特許第 4869190 号 (2011).
 [5] Hoskins, J.A.: Factoring Binary Matrices: A Weaver’s Approach, *Combinatorial Mathematics IX Lecture Notes in Mathematics*, Vol.952/1982, pp.300–326 (1982).
 [6] Hoskins, J.A. and Hoskins, W.D.: Satin and Long-eyed Heddles, *The Weaver’s Journal*, Vol.6, No.1, pp.25–26 (1981).
 [7] Kratzke, T., Reznick, B. and West, D.: Eigen-sharp Graphs: Decomposition into Complete Bipartite Subgraphs, *Trans. American Mathematical Society*, Vol.308, pp.637–653 (1998).
 [8] Leighton, F.T.: A Graph Coloring Algorithms for Large Scheduling Problems, *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, Vol.84, pp.489–506 (1979).
 [9] Matsuura, I., Yagiura, M. and Hirata, T.: A Textile Design and the Boolean Rank Problem, *Proc. IADIS International Applied Computing 2009 Rome*, pp.345–352 (2009).
 [10] 松浦 勇，安藤正好，平田富夫：長目綜統を導入したドビー織機における綜統枠枚数の最小化，*Journal of Textile Engineering*, Vol.53, No.5, pp.185–195 (2007).
 [11] 松浦 勇，安藤正好，平田富夫：長目綜統導入による製織可能な織物組織の増加，*Journal of Textile Engineering*, Vol.53, No.2, pp.69–77 (2007).
 [12] 松浦 勇，柳浦睦憲，平田富夫：ドビー織機の綜統枠数最小化問題に対する集合被覆アプローチ，*情報処理学会論文誌*，Vol.50, No.6, pp.1539–1548 (2009).
 [13] 松浦 勇，平田富夫：たて糸張力均一条件下における綜統枠数最小化，*電子情報通信学会技術研究報告 (COMP2011-43)*，pp.53–60 (2011).
 [14] 茂木 勇，横手一郎：基礎線形代数，裳華房 (1990).
 [15] 文部省 (編)：織機 3，実教出版 (1960).
 [16] 渡辺健人：既設ドビー機で平織を主体とした組織で構成されたジャカード模様を織成する方法，特許公告昭 39-000186 (1964).
 [17] 渡辺健人：綜統を減少して紋ブロードの千鳥模様を織成する方法，特許公告昭 39-000185 (1964).
 [18] 渡辺健人：綜統を減少して柄出経糸の飛模様をドビー機により織成する装置，実用公告昭 40-021018 (1965).

付 録

A.1 補題 1 の証明

$M \leq W$ で、かつ排他的ブール階数が 1 である行列 M を考える。排他的ブール階数の定義から M は m 行 1 列の行列 $A = (a_1, \dots, a_m)^T$ と 1 行 n 列の行列 $B = (b_1, \dots, b_n)$ の積 $A \times B$ で表される。 $R = \{i \mid a_i = 1, 1 \leq i \leq m\}$, $C = \{j \mid b_j = 1, 1 \leq j \leq n\}$ とすると、 $M_{i,j}$ ($i \in R, j \in C$) はすべて 1 であり、それ以外の成分はすべて 0 である。つまり、 M の行 i ($i \in R$) は B と同一であり、 M の列 j ($j \in C$) は A と同一である。そのため、 M から 2 部グラフ $B_M = (X, Y, E)$ を構成すると、 $E = \{(X_i, Y_j) \mid i \in R, j \in C\}$ となる。これにより、 M から構成した B_M は B_W の 2 部クリークとなっている。

B_W の 2 部クリーク $B_C = (X, Y, E')$ を考える。次数が 1 以上の頂点からなる集合を $X' \subseteq X$, $Y' \subseteq Y$ とすると、

任意の2頂点 $x_i \in X'$, $y_j \in Y'$ は隣接している. そのため, 構成して B_C になるようなブール行列 $C \leq W$ の列にはすべての成分が0である列を除くと, 1通りのパターンの列のみ存在する. この列を A とする. 行に関しても同様に, C に存在する1通りのパターンの行を B とすると, $C = A \times B$ と表すことができる. つまり, C の排他的ブール階数は1である. ■



松浦 勇 (正会員)

昭和49年生. 平成11年名古屋大学大学院工学研究科電子機械工学専攻修士課程修了. 平成13年愛知県庁入庁. 平成21年名古屋大学大学院情報科学研究科計算機数理科学専攻満期退学. 現在, あいち産業科学技術総合セ

ンター勤務. 博士 (情報科学).



平田 富夫 (フェロー)

昭和24年生. 昭和56年東北大学大学院工学研究科博士課程修了. 昭和56年豊橋技術科学大学助手, 昭和61年名古屋大学工学部講師, 現在, 名古屋大学情報科学研究科教授. グラフアルゴリズム, 近似アルゴリズムの研究に

従事. 工学博士. IEEE, ACM, 電子情報通信学会各会員.