

Hex の必勝手順に対する新証明技法について

三 島 健^{†1}

ゲーム Hex は、先手必勝手順の存在が証明されているが、具体的な必勝手順を示すことは長年の研究課題である。盤面の大きさが 8×8 以上になると、必勝手順を簡潔な形で扱うことは複雑すぎるとされてきた。本稿では、石の連結性を定義するための新しい概念として、 σ 連結を提案し、それに基づく σ 拡張の技法を導入する。本稿の目的は、 σ 連結と σ 拡張によって、新しい先手勝ちの証明法を確立し、必勝手順の構成に応用することである。本稿では、Noshita のユニオン連結を一般化する。これにより、連結の論理和だけでなく、論理積を扱えるようにする。この一般化した連結を AND-OR 連結と呼ぶ。 σ 連結は、着手が指定された AND-OR 連結であり、AND-OR 連結の手順を示す証明木の部分木で定義される。 σ 拡張は、 σ 連結の着手指定に基づいて、AND-OR 連結に関する領域を拡張する技法である。これらの技法を用いることで、深い探索をしなくても、勝利手順を示すことができる。 σ 連結と σ 拡張を必勝手順の構成に応用すると、 8×8 の必勝手順を簡単に検証可能な形で記述することができる。

New Techniques for Proving Winning Strategies in Hex

KEN MISHIMA^{†1}

In the game of Hex, it has been proved existentially that the first player always wins. Constructing a winning strategy has been a long-standing research problem. It has been regarded as complex to deal with a winning strategy for 8×8 or more. We present a new notion named σ -connection which defines a certain type of connections between stones. Based on it, we introduce a new technique named σ -extension. The purpose of this paper is to establish a new method for proving the first player's win and applying it to construct a winning strategy. In this paper, we generalize Noshita's union (OR)-connection for accommodating AND-connections as well. This generalized connection will be called AND-OR connection. A σ -connection is an AND-OR connection along with fixed move-sequences. It is defined to be a subtree of a proof tree which represents a strategy for the AND-OR connection. Based on the fixed move-sequences, we can extend the area of empty cells which supports the desired AND-OR connection. This technique will be called σ -extension. These techniques enable us to show a winning way without searching further down in our

proof tree. Thanks to our σ -connection as well as σ -extension, it is possible to describe an easy-to-verify winning strategy on the 8×8 board.

1. はじめに

ゲーム Hex は、Nash により先手必勝手順の存在が証明されたが、具体的な手順（構成的証明）を示すことは長年の研究課題である⁴⁾。Anshelevich¹⁾ は、仮想連結（virtual connection）の概念を導入した。Yang ら⁹⁾ は、仮想連結による盤面分割の方法を用いて、 7×7 （初手 44）の必勝手順を示した。Yang は、ホームページで 8×8 以上の必勝手順を求めたとの記事を載せているが、公式に発表されておらず、詳しい内容は不明である。実際、 7×7 の場合でも証明木における探索が複雑になり正しさの検証が難しい。たとえば、 7×7 の Yang らの必勝手順⁹⁾ は、2006 年になってコンピュータにより正しさが検証された²⁾。Hayward ら³⁾ は、仮想連結による盤面分割に基づくプログラムを作成し、 7×7 の初手 49 種類すべてに対して、いずれのプレイヤーが勝利するかを示した。しかし、盤の大きさが 8×8 以上になると、従来の方法では必勝手順を検証可能な程度に簡潔な形で扱うことができないとされてきた^{3),4)}。

2004 年 Noshita^{5),6)} は、ユニオン連結（union-connection）の概念を導入して、これに基づき、 8×8 （初手 54）に対する完全な必勝手順を示した。この技法の強力は、たとえば、 7×7 （さまざまな初手）の必勝手順が（コンピュータを使わないで）容易に検証できることをみても分かる⁶⁾。Noshita が示したユニオン連結と 7×7 （初手 44）の必勝手順全体の正しさは、2008 年にコンピュータによって検証されている¹⁰⁾。現在では、 8×8 や 9×9 に対する必勝手順が人手/コンピュータで扱える範囲に入ってきている。

Noshita のユニオン連結は、連結の論理和を扱うものであるが、論理和だけでなく論理積・論理積を扱えるように概念を一般化することができる。本稿では、論理和・論理積の複合を扱えるようにユニオン連結を一般化する。この一般化した連結を AND-OR 連結と呼ぶ。

本稿では、 σ 連結の概念と σ 拡張の技法を提案する。 σ 連結は、 AB -property^{5),6)} を一般化した技法である。 AB -property の技法は、2 つの領域が部分的に重複している場合、それらの領域を接続した領域に対して、AND-OR 連結を適用できるようにするものである。し

^{†1} 電気通信大学大学院電気通信学研究科情報工学専攻

Department of Computer Science, The University of Electro-Communications

かし、それが適用できる領域の形が限定的であった。 σ 連結は、これを一般化して広範囲の領域に適用できるようにしたものである。 σ 連結は、領域における着手を限定した AND-OR 連結であり、領域内の後手の着手に対してそれぞれ先手の応手を指定したものと見える。 σ 拡張は、 σ 連結の外部の特定のセルに先手が着手することにより、より大きい AND-OR 連結に拡張する技法である。 σ 連結の領域内の石の配置は、着手指定により、有限のパターンに分類される。よって、 σ 拡張で新たに得られる AND-OR 連結は、簡単な場合分けを行うことで示せる。

本稿の σ 連結と σ 拡張を用いると、容易に先手勝ちを示せる。既存の方法では、後手のすべての候補手に対して、必勝となる先手の着手を発見する必要があった。 σ 連結を盤面に適用すると、その領域内への後手の着手は、先手の応手があらかじめ指定されているため、考慮する必要がない。 σ 連結の領域と、その外部の領域を接続するときには、 σ 拡張によって得られる AND-OR 連結を利用する。

本稿の目的は、 σ 連結と σ 拡張を用いることで、新たな証明法を確立し、先手勝ちの証明に応用することである。我々が提案する σ 連結において、空セルの集合内の着手手順は、証明木の部分木によってあらかじめ定められている。したがって、 σ 連結と σ 拡張を応用して先手勝ちを求めるとき、探索はその領域の外に対して行う。過去に示されている必勝手順では盤面全体を探索していたのに対し、本稿の方法では σ 連結の着手指定の証明木（部分木）とそれ以外の領域の探索によって先手勝ちを証明する。結果として、盤面全体を探索する手間を省き、複雑な解析が必要な盤面を大幅に減らすことができる。それにより、従来の方法によっては複雑すぎるとされていた盤面に対して完全な必勝手順を記述できるようになる。

新技法の強力さを示す応用例として、 8×8 の盤面を取り上げ、黒勝ちを示す。従来の方法のみでは、その局面から派生するすべての子節点について探索を行わなければならない。 σ 連結と σ 拡張を用いることで、盤面全体に対して探索を行う必要がなくなる。探索範囲が減少することで解析（先行排除）が容易になり、深い探索が必要なくなる（自明な強制着手が得られる）。

さらに、 σ 連結と σ 拡張を最大限に利用すれば、 8×8 （初手 54）の必勝手順を容易に導くことができる。ほとんどの後手の着手は、 σ 連結と σ 拡張を適用することにより、深い探索をせずに黒勝ちを求められる。そのような後手の着手を除外すると、 8×8 （初手 54）の必勝手順は総節点数 13 個の証明木で表すことができる。そのうち、先手局面は 6 個、後手局面は 7 個である。そのために基本となる σ 連結と σ 拡張の数は、それぞれ 4 個である。バリエーションを含めると、6 個の σ 連結と 6 個の σ 拡張が必要になる。

本稿で導入する着手指定の方法を応用すれば、 8×8 （初手 63）と 9×9 （初手 55）の必勝手順も検証可能な程度の簡潔さで示すことができる。筆者は、この必勝手順を示す証明木を発表したが⁽¹¹⁾、これらに特化した一連の定理を記述するにはかなりの紙数を要している。これらを証明するための一般的な道具は本稿のもので十分であるが、（ 8×8 （初手 54）の必勝手順も含め）必勝手順の証明の全体を示すことは稿を改めることにする。

本稿の構成を説明する。2 章では、Hex のルールを述べる。3 章では、既存研究で提案されている基本的な概念をまとめる。4 章以降で、本稿で新たに行ったことを述べる。4 章では、AND-OR 連結を定義し、その変換規則を述べる。5 章では、 σ 連結の概念と σ 拡張の技法を提案する。6 章では、 σ 連結と σ 拡張の具体的な応用を述べる。7 章では、本稿の総括を行う。

2. Hex のルール

ゲーム Hex は、 $n \times n$ 個の正六角形のセルを菱形に敷き詰めた盤面を用いる。先手と後手がそれぞれ黒石と白石を交互に置いていき、先手は上辺と下辺を黒石で、後手は左辺と右辺を白石で連結したら勝利となる完全情報型のゲームである。Hex は引分けがない。図 1 は、黒が勝利している盤面（局面）である。本稿では左上から順に列と行にそれぞれ $1, 2, \dots, n$ と番号をふり、セルの位置を列と行の番号の対で指定する。

Hex は先手が圧倒的に有利である。したがって、実際の対局では交代ルールを採用している。これは、ゲーム開始時に一方のプレイヤーが先手番の石を置き、他方のプレイヤーは先手が後手かを選択できるというルールである。このルールのため、一般に、初手によっては先手が勝つとは限らない。

本稿では、先手（黒）の必勝手順を求めるための証明法を提案しているが、手法自体は後手勝ちを示すにも用いることができる。一般的には、先手・後手にかかわらず、（存在するのであれば）必勝手順を求めることに応用できる。たとえば、「先手が初手に悪手を着

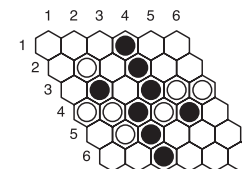


図 1 黒の勝利盤面
Fig. 1 Black's winning position.

手した後の局面における後手の必勝手順」を求めるために応用できる．先手・後手のどちらのプレイヤーにおいても、「必勝手順を求める」という課題に対して，問題の一般性は損われない．

3. 基本概念

この章では，これまで提案されている基本的な概念をまとめる．

3.1 先行排除

先行排除は，よく知られている技法であり，局面を解析するためのものである (must-play といわれる場合もある^{3),6),9)}．これは，後手が悪い着手を行った場合，先手がただちに勝つことができることを利用する．実際の手順としては，先手が続けて 2 手着手した盤面を調べることで，後手の悪い着手を求め，それ以降の解析からそのような悪手を排除する．

3.2 仮想連結

仮想連結は，盤を部分盤面に分割することで，離れた石を仮想的に連結しているとして扱う概念である¹⁾．

$S[ab]$ が仮想連結とする．ここで， S は空セルの集合， a と b は同色の石のあるセルである．仮想連結の定義として，着手を S のセルに限定するとして後手から着手を始めても先手の応手により a と b が連結する．以下，特に明記しない場合，連結とは黒の連結を表すことにする． a と b が直接連結しているとき， $\phi[ab]$ と表す．任意の a に対して， $\phi[aa]$ と約束する．

本稿では，仮想連結 $S[ab]$ において， S が図より明らかであるときは， $a-b$ と書く．

図 2 では，代表的な仮想連結の例を 3 つあげている．この例では， S -lemma と呼ばれる $x-y$ および $t-z$ (空セルの集合は ‘+’) の連結と T -lemma と呼ばれる $u-b$ (空セルの集合は ‘*’) の連結が成り立っている⁶⁾．ここで t は上辺， b は下辺を表す． $t-b$ の連

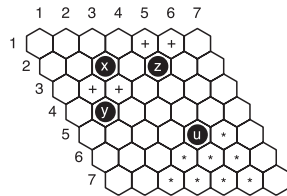


図 2 仮想連結の例

Fig. 2 Examples of virtual connection.

結が存在する盤面は黒勝ちの盤面である．以下において，これら 3 つの仮想連結は特に断らずに使用する．

次の補題 1 と 2 で， S -lemma と T -lemma を示す．

補題 1 (S -lemma) 図 2 において， $x-y$ ($t-z$) が成り立つ．ここで，空セルの集合は ‘+’ で示す 23 と 33 (51 と 61) の 2 つのセルからなる集合である．

補題 2 (T -lemma) 図 2 において， $u-b$ が成り立つ．ここで，空セルの集合は ‘*’ で示す 8 つのセルからなる集合である．

3.3 ユニオン連結

2004 年に Noshita が提案したユニオン連結^{5),6)} は，仮想連結を一般化して，連結の論理和が扱えるようにした概念である．

$S[a_1b_1 \vee a_2b_2 \vee \dots \vee a_kb_k]$ をユニオン連結とする．ユニオン連結の定義として， S に後手から着手を始めても先手の応手により， a_i と b_i の連結が成り立つような i ($1 \leq i \leq k$) が存在する． $k=1$ の場合，ユニオン連結は仮想連結と一致する．

仮想連結と同様にユニオン連結も， S が図より明らかであるときは，たとえば $a-b \vee c-d$ のように書く．

図 3 では，ユニオン連結の例を 2 つあげている．

図の空セルの集合 ‘-’ において $t-x \vee y-x$ が成り立つ．このユニオン連結では先行排除 (must-play) によって白の着手候補が 41, 51, 42, 33, 43 に限定される (それ以外の白の着手は黒 42 によって連結が成り立つ)．白 41 に対して黒 42, 白 33 に対して黒 43, 他の 3 つに対して黒 23 を着手することで， $t-x \vee y-x$ が成り立つ．

図の空セルの集合 ‘*’ において $x-z \vee x-w \vee x-b$ が成り立つ．白がユニオン連結を防ごうとしても，白 44 黒 26 白 36 黒 18 と着手が続き， $x-z \vee x-w \vee x-b$ が成り立つ．

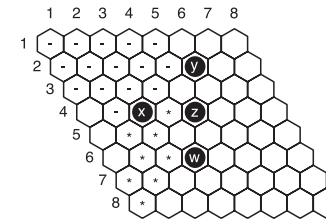


図 3 ユニオン連結の例

Fig. 3 Examples of union-connection.

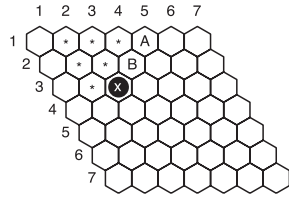


図 4 AB-property を持つユニオン連結の例
Fig. 4 An example of AB-property for union-connection.

ユニオン連結は次のような性質を持っている^{5),6)}。

η が $\forall a_1 b_1 \vee a_2 b_2 \vee \dots \vee a_k b_k$ ($k \geq 0$) の書式を表すとすると、次の (1) と (2) が成り立つ。

- (1) $S[ab \vee ab \eta] \Rightarrow S[ab \eta]$.
- (2) $S_1[ab \eta] \wedge S_2[bc] \wedge (S_1 \cap S_2 = \phi)$
 $\Rightarrow S[ac \eta]$ ($S = S_1 \cup S_2$).

ユニオン連結の変換規則は (1) と (2) 以外にも存在する。このことは文献 5) と 6) で述べられている。

盤面分割の方法は、ゲーム木探索で生じる場合分けの簡単化のために、古くから用いられている。ユニオン連結を用いると、仮想連結に比べて、より一般的な連結のパターンが扱えるようになる。これにより、ゲーム木の探索の場合分けが著しく簡単になり、簡潔な形で必勝手順を示せる。たとえば、 7×7 (初手 44) の必勝手順を、(仮想連結に基いた) Yang ら⁹⁾ の証明に比べて、著しく少ない図面の数で記述できる^{5),6)}。

3.4 AB-property

AB-property^{5),6)} は、盤面の解析を簡略化するために、ユニオン連結を拡張した概念である。図 4 は $t-x$ のユニオン連結における AB-property の例である。この例では ‘*’ の領域 (セル A と B も含む) において $t-x$ のユニオン連結が成立するだけでなく、次に示す AB-property も同時に成り立つ: 連結の領域 (セル A と B も含む) がすべて空セルの状態ではじめて、セル A への白の着手に対して、黒は、セル B への応手によって、ユニオン連結を成り立たせることができる。

説明を補足すると、セル B への白の着手に対しては、連結が成り立つ黒の応手を行う (黒 22 など)。このときセル A は空セルで、その後のセル A への白の着手に対して、すでに $t-x$ であるため、黒は 1 手余分に盤面の任意の空セルに着手できる。

4. AND-OR 連結

本章以降で、本稿で新たに提案したことについて述べる。

ユニオン連結は連結の論理和を表現するものであるが、これを一般化することによって、論理和だけでなく、論理積やそれらの複合を表現できる。

本章では、ユニオン連結を一般化した AND-OR 連結を導入する。

以下において、 ab は、盤上の石 (あるいは辺) a と b が連結することを表す。

定義 3 (AND-OR 連結) ab を素論理式とし、 α は 1 個以上の素論理式と結合子 \vee と \wedge から構成される論理式とする。AND-OR 連結 $S[\alpha]$ とは、空セルの集合 S に後手から着手をはじめても、 α が成り立つ黒の応手が存在することである。

本稿では、AND-OR 連結を、たとえば、 $S[(ab \vee cd) \wedge ef]$ のように表す。また、領域 S が明らかなき、この AND-OR 連結は、 $(a-b \vee c-d) \wedge e-f$ と表す。

AND-OR 連結は、 α が \wedge を含まないとき、ユニオン連結と一致する。さらに、 \vee を含まないとき、仮想連結と一致する。

AND-OR 連結は、次のような変換法則を持つ。ここで、 α と β は、連結の論理和・論理積、それらの複合を表す論理式とする。

- (1') $S_1[\alpha] \wedge S_2[\beta] \wedge (S_1 \cap S_2 = \phi)$
 $\Rightarrow S[\alpha \wedge \beta]$ ($S = S_1 \cup S_2$).
- (2') $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (S[\alpha] \Rightarrow S[\beta])$.
- (3') $S[(xy \wedge yz) \vee \alpha] \wedge (y \neq t) \wedge (y \neq b)$
 $\Rightarrow S[(xy \wedge yz \wedge xz) \vee \alpha]$ ($\Rightarrow S[xz \vee \alpha]$).
- (4') $S[(xy \wedge yz) \wedge \alpha] \wedge (y \neq t) \wedge (y \neq b)$
 $\Rightarrow S[(xy \wedge yz \wedge xz) \wedge \alpha]$ ($\Rightarrow S[xz \wedge \alpha]$).
- (5') $S[(xy \wedge yz \wedge \alpha) \vee \beta] \wedge (y \neq t) \wedge (y \neq b)$
 $\Rightarrow S[(xy \wedge yz \wedge xz \wedge \alpha) \vee \beta]$ ($\Rightarrow S[(xz \wedge \alpha) \vee \beta]$).

変換規則の (2') は、通常の論理式の変換が、AND-OR 連結においても可能であることを意味している。

変換規則の (3')-(5') は a と b の石、 b と c の石が連結するならば、 a と c が連結するという推移的な性質を表す。

上記の規則を適用すると、たとえば、

$$S[(xy \wedge yz) \vee wv] \wedge tx \Rightarrow S[(xz \vee wv) \wedge tx]$$

$$\Rightarrow S[tz \vee wv] \text{ が成り立つ.}$$

これは、(2')~(5') から容易に導ける．本稿では、上記の変換規則は特に断らずに利用する．

変換規則を適用する具体例を示す．3.3 節の 2 つの AND-OR 連結 (ユニオン連結) から、以下を導ける ('-' の領域を V , '*' の領域を W とする) .

$$V[tx \vee yx] \wedge W[xz \vee xw \vee xb] \wedge (V \cap W = \phi)$$

$$\Rightarrow (V \cup W)[(tx \vee yx) \wedge (xz \vee xw \vee xb)] \text{ ((1') より)}$$

$$\Rightarrow (V \cup W)[(tx \wedge xz) \vee (tx \wedge xw) \vee (tx \wedge xb) \vee (yx \wedge xz) \vee (yx \wedge xw) \vee (yx \wedge xb)] \text{ ((2') より)}$$

$$\Rightarrow (V \cup W)[tz \vee tw \vee tb \vee yz \vee yw \vee yb]. \text{ ((3') より)}$$

AND-OR 連結に対して、その正しさを証明することは、部分盤面 (S) において証明木 (solution tree ともいう) を示すことである．ここで、証明木は次のような証明木である．根は与えられた局面 (後手局面) である．後手局面では、与えられたあらゆる着手を枝としていて、それぞれ次の先手局面に至る．先手局面では、先手の正しい着手を示す枝が 1 つだけあり、それにより後手局面に至る．すべての葉は AND-OR 連結を実現する後手局面である．

5. σ 連結と σ 拡張

この章では σ 連結を定義して、それに基づく技法である σ 拡張を説明する．

5.1 σ 連結

σ 連結は、領域における着手を指定した AND-OR 連結であり、領域内の後手の着手に対してそれぞれ先手の応手を指定したものである．

定義 4 σ 連結とは、AND-OR 連結とその正しさを証明する証明木の対である．

AND-OR 連結に対する証明木は、一般に複数個存在するが、 σ 連結ではそのうちの 1 つを指定する．すなわち σ 連結は、 AB -property では限定的であった黒の応手の指定を、すべての白の着手に対して行うように一般化した概念であるといえる．

実際の応用では、 σ 連結の証明木の中で、根および根に近い後手局面の節点が特に重要である．また、証明の文書として証明木全体を書き下すのは、多くの場合複雑すぎる．そこ

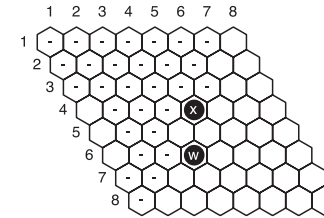


図 5 σ 連結 F
Fig.5 σ -connection F .

で、根から遠い節点を調べないですませるために、根に近い節点からなる部分木を考え、さらに、部分木の後手節点において、そこで成り立つ性質 (論理式) を付与する．たとえば、当然のことであるが、AND-OR 連結は石の連結を示す論理式である．そこで、本稿では σ 連結を次のように定義する．

定義 5 (σ 連結) σ 連結とは、AND-OR 連結とその正しさを証明する証明木の部分木の対である．ここで、部分木とは、後手局面の節点より深い節点を削除してできるものであり、その後手局面の節点にはそこで成り立つ論理式を付与する．

具体例を用いて σ 連結を説明する．次に示す σ 連結 F は、本稿の必勝手順を示すうえで重要な σ 連結である．

図 6 の証明木の根節点は、図 5 の記号 '-' で示す領域がすべて空セルの後手局面を表している．●の節点は後手局面を、○の節点は先手局面を表し、根以外の節点に書かれている数字 P は、その局面に至る着手を示す． $P+$ は、共通の解析ができる (複数の) 白の着手においてその代表を表す．これ以降で示す証明木においても同様の記述を行っている．定理 7 では定理 6 の図 6 の証明木 (部分木) を用いる．

定理 6 (σ 連結 F) 図 5 で記号 '-' で示す領域において、AND-OR 連結 $S[tx \vee tw \vee tb]$ で図 6 のような証明木を持つ σ 連結を与えることができる．後手の第 1 着手の分類は図 7 に示す．ここで、証明木の各節点 (深さ 2) で成り立つ論理式を表 1 に示す．

証明 根の局面から後手の第 1 着手を図 7 の '1' ~ '6' のように分類し、図 6 の証明木に基づいて黒の応手 (深さ 2 の局面に至る着手) を行うとそれぞれの局面は Case 1~6 (図 8 ~ 11) のような局面に至る．いずれの節点についても表に示す論理式が成り立つ．

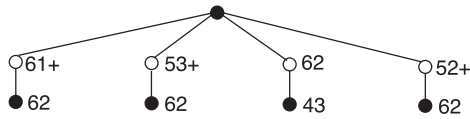


図 6 σ 連結 F の証明木

Fig. 6 The proof tree of σ -connection F .

(論理式は表 1 をみよ)

表 1 深さ 2 の節点で成り立つ AND-OR 連結
Table 1 AND-OR connection at a node (depth 2).

盤面	AND-OR 連結の論理式
Case 1 (2)	$(t - x \vee t - w \vee t - b) \wedge x - z$
Case 3 (4)	$(t - x \vee t - w \vee t - b) \wedge t - z$
Case 5	$t - x$
Case 6	$t - x \wedge t - z$

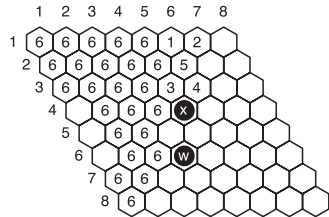


図 7 σ 連結 F の後手の着手の分類

Fig. 7 Classifying the second player's moves for σ -connection F .

図 8 (Case 1 と 2) において, S_1 を '+' で示すセル (2 個) の集合とし, S_2 を '*' で示すセルと '2' ('1') で示すセル (計 16 個) の集合とする.

このとき, S -lemma より, $S_1[xz]$ が成り立つ.

また, $S_2[tx \vee tz \vee tw \vee tb]$ が成り立つ. 白がこの AND-OR 連結を防ごうとしても, 白 71(61) 黒 42 白 52 黒 34 白 44 黒 26 白 36 黒 18 と着手が続き, $S_2[tx \vee tz \vee tw \vee tb]$ が成り立つ.

$S_{12} = S_1 \cup S_2$ とすると,

$S_1[xz] \wedge S_2[tx \vee tz \vee tw \vee tb] \wedge (S_1 \cap S_2 = \phi)$

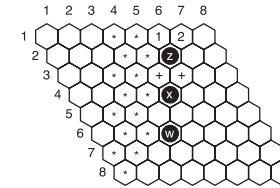


図 8 Case 1 and 2

Fig. 8 Case 1 and 2.

白 '1' ('2') 黒 62 (z)

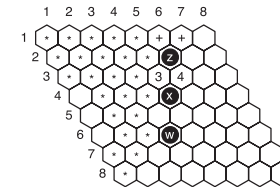


図 9 Case 3 and 4

Fig. 9 Case 3 and 4.

白 '3' ('4') 黒 62 (z)

$$\Rightarrow S_{12}[xz \wedge (tx \vee tz \vee tw \vee tb)]$$

$$\Rightarrow S_{12}[xz \wedge (tx \vee (tz \wedge xz) \vee tw \vee tb)]$$

$$\Rightarrow S_{12}[xz \wedge (tx \vee tx \vee tw \vee tb)]$$

$$\Rightarrow S_{12}[(tx \vee tw \vee tb) \wedge xz] \quad (\Rightarrow S_{12}[tx \vee tw \vee tb]).$$

図 9 (Case 3 と 4) において, S_3 を '+' で示すセル (2 個) の集合とし, S_4 を '*' で示すセルと '3' ('4') で示すセルの (計 25 個) の集合とする.

このとき, S -lemma より, $S_3[tz]$ が成り立つ.

また, $S_4[tx \vee tw \vee tb \vee zx \vee zw \vee zb]$ が成り立つ. これは, 以下で導ける.

S_4 上での最初の白の着手が '4' ('3') でなければ, 黒 '4' ('3') の着手により $z - x (\Rightarrow t - x \vee t - w \vee t - b \vee z - x \vee z - w \vee z - b)$ が成り立つ.

白が '4' ('3') に着手したとき, 黒 34 により, 3.3 節の 2 つの AND-OR 連結 (ユニオン連結) が成り立つ. したがって, 4 章の式変形に基づいて, $t - x \vee z - x \vee t - w \vee z - w \vee t - b \vee z - b$ が得られる.

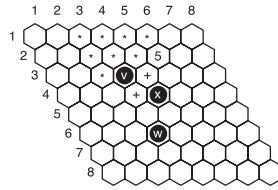


図 10 Case 5
Fig. 10 Case 5.
白 '5' 黒 43(v)

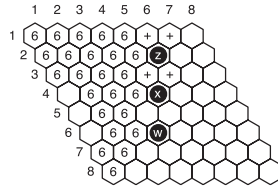


図 11 Case 6
Fig. 11 Case 6.
白 '6' 黒 62(z)

よって, $S_4[tx \vee zx \vee tw \vee zw \vee tb \vee zb]$ が成り立つ.

$S_{34} = S_3 \cup S_4$ とすると,

$$S_3[tz] \wedge S_4[tx \vee zx \vee tw \vee zw \vee tb \vee zb] \wedge (S_3 \cap S_4 = \phi)$$

$$\Rightarrow S_{34}[tz \wedge (tx \vee zx \vee tw \vee zw \vee tb \vee zb)]$$

$$\Rightarrow S_{34}[tz \wedge (tx \vee (zx \wedge tz) \vee tw \vee (zw \wedge tz) \vee tb \vee (zb \wedge tz))]$$

$$\Rightarrow S_{34}[tz \wedge (tx \vee tx \vee tw \vee tw \vee tb \vee tb)]$$

$$\Rightarrow S_{34}[(tx \vee tw \vee tb) \wedge tz] \quad (\Rightarrow S_{34}[tx \vee tw \vee tb]).$$

図 10 (Case 5) において, S_5 を '+' で示すセル (2 個) の集合とし, S_6 を '*' で示すセルと '5' で示すセルの (8 個) の集合とする. このとき, $S_5[xv]$ と $S_6[tv]$ が成り立つ.

$S_{56} = S_5 \cup S_6$ とすると,

$$S_5[xv] \wedge S_6[tv] \wedge (S_5 \cap S_6 = \phi) \Rightarrow S_{56}[xv \wedge tv] \Rightarrow S_{56}[tx] \quad (\Rightarrow S_{56}[tx \vee tw \vee tb]).$$

図 11 (Case 6) において, S_7 を 53, 63 の '+' のセル (2 個) の集合とし, S_8 を 61, 71 の '+' のセル (2 個) の集合とする.

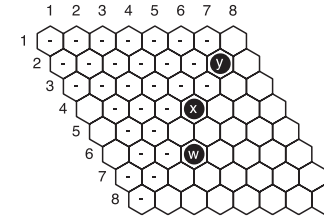


図 12 σ 拡張 F
Fig. 12 σ -extension F.

$S_{78} = S_7 \cup S_8$ とすると,

$$S_7[xz] \wedge S_8[tz] \wedge (S_7 \cap S_8 = \phi) \Rightarrow S_{78}[xz \wedge tz] \Rightarrow S_{78}[tx \wedge tz] \quad (\Rightarrow S_{78}[tx \vee tw \vee tb]).$$

以上により領域 S において, 題意の条件を満たす σ 連結 (σ 連結 F) が成り立つ.

本稿の σ 連結を用いると, 部分的に重複する 2 つの領域を接続する領域において, AND-OR 連結を適用できる. AB-property では, それを適用できる領域の形が限定的であった. σ 連結を用いると, さまざまな形の領域に対して, これが可能になる. 接続した領域に対して AND-OR 連結を得る具体例は, 定理 7 で示す.

5.2 σ 拡張

σ 拡張の技法は, σ 連結の領域の外部にあるセルに石が置かれたとき, さらに大きい領域に対する AND-OR 連結 (またはその論理積) を得るものである. これが可能であるのは, σ 連結のいずれの後手局面 (深さが偶数の節点) に対しても, σ 拡張の着手を行うことにより, 拡張後の AND-OR 連結 (またはその論理積) を得ることができるためである.

具体例で説明する. 定理 7 は, 前述の σ 連結 F に対する σ 拡張を表す. この σ 拡張は後の応用で重要なものである.

定理 7 のように σ 連結に対して, 特定の着手により (定理 7 では黒 y), 新たに AND-OR 連結を得ることを, σ 拡張と呼ぶ.

定理 7 (σ 拡張 F) 図 12 のように x, w, y に黒石が置かれた盤面がある ('-' の領域では σ 連結 F が成り立っている). このとき, 領域 S 上で $(t-x \vee t-w \vee t-b) \wedge (t-y \vee x-y)$ が成り立つ. ここで, S は '-' の領域を表す.

証明 σ 連結 F の Case 1~6 に対応する盤面は, 図 13~16 のようになる.

領域 S が Case 1 (Case 2) の局面では, y と z が直接連結する (図 13). よって, 以

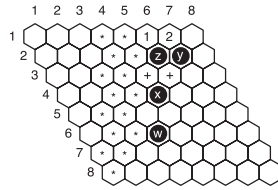


図 13 Case 1 and 2
Fig. 13 Case 1 and 2.

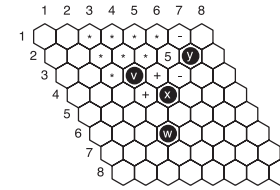


図 15 Case 5
Fig. 15 Case 5.

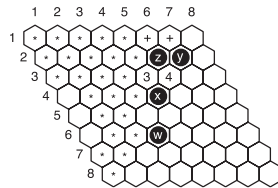


図 14 Case 3 and 4
Fig. 14 Case 3 and 4.

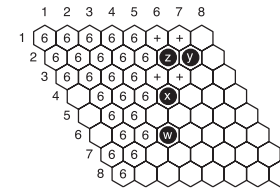


図 16 Case 6
Fig. 16 Case 6.

下が成り立つ .

$$\begin{aligned} & S_{12}[(\mathbf{t}x \vee \mathbf{t}w \vee \mathbf{t}b) \wedge xz] \wedge \phi[yz] \wedge (S_{12} \cap \phi = \phi) \\ \Rightarrow & S_{12}[(\mathbf{t}x \vee \mathbf{t}w \vee \mathbf{t}b) \wedge xz \wedge yz] \\ \Rightarrow & S_{12}[(\mathbf{t}x \vee \mathbf{t}w \vee \mathbf{t}b) \wedge xy] \\ \Rightarrow & S_{12}[(\mathbf{t}x \vee \mathbf{t}w \vee \mathbf{t}b) \wedge (\mathbf{t}y \vee xy)]. \end{aligned}$$

領域 S が Case 3 (Case 4) の局面では, 黒 y の着手のとき, y と z が直接連結する (図 14). よって, 以下が成り立つ .

$$\begin{aligned} & S_{34}[(\mathbf{t}x \vee \mathbf{t}w \vee \mathbf{t}b) \wedge \mathbf{t}z] \wedge \phi[yz] \wedge (S_{34} \cap \phi = \phi) \\ \Rightarrow & S_{34}[(\mathbf{t}x \vee \mathbf{t}w \vee \mathbf{t}b) \wedge \mathbf{t}z \wedge yz] \\ \Rightarrow & S_{34}[(\mathbf{t}x \vee \mathbf{t}w \vee \mathbf{t}b) \wedge \mathbf{t}y] \\ \Rightarrow & S_{34}[(\mathbf{t}x \vee \mathbf{t}w \vee \mathbf{t}b) \wedge (\mathbf{t}y \vee xy)] \end{aligned}$$

領域 S が Case 5 の局面では, 図 15 の ‘-’ で示す領域 (S_- とする) で, $\mathbf{t}-y \vee x-y$ が成り立つ . $S_{56} \cup S_- = S_{56}^*$ とすると, 以下が成り立つ .

$$\begin{aligned} & S_{56}[\mathbf{t}x] \wedge S_-[\mathbf{t}y \vee xy] \wedge (S_{56} \cap S_- = \phi) \\ \Rightarrow & S_{56}^*[\mathbf{t}x \wedge (\mathbf{t}y \vee xy)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_{56}^*[(\mathbf{t}x \vee \mathbf{t}w \vee \mathbf{t}b) \wedge (\mathbf{t}y \vee xy)].$$

領域 S が Case 6 の局面では, y と z が直接連結する (図 16). よって, 以下が成り立つ .

$$\begin{aligned} & S_{78}[\mathbf{t}x \wedge \mathbf{t}z] \wedge \phi[zy] \wedge (S_{78} \cap \phi = \phi) \\ \Rightarrow & S_{78}[\mathbf{t}x \wedge \mathbf{t}z \wedge zy] \Rightarrow S_{78}[\mathbf{t}x \wedge \mathbf{t}y] \\ \Rightarrow & S_{78}[(\mathbf{t}x \vee \mathbf{t}w \vee \mathbf{t}b) \wedge (\mathbf{t}y \vee xy)]. \end{aligned}$$

根局面 (領域 S に着手がない局面) では, 領域 S の白の着手があったとき, 図 7 に対応する応手を行うことで, この定理の Case 1~6 の証明に帰結する . したがって, $S[(\mathbf{t}x \vee \mathbf{t}w \vee \mathbf{t}b) \wedge (\mathbf{t}y \vee xy)]$ が成り立つ .

以上により, 定理 7 が成り立つ .

定理 7 が実際の応用で適用されるのは, 次のような場合である : x と w の位置に黒石が着手され, σ 連結 F が成り立つ . その後, 交互に石を置いていく . 領域 S に白の着手が行われたときは, 定理 6 に基き対応する応手を行う . y の位置に黒の着手が行われたときは, 定理 7 によって, 領域 S 上で $(\mathbf{t}-x \wedge \mathbf{t}-w \vee \mathbf{t}-b) \wedge (\mathbf{t}-y \vee x-y)$ が成り立つ .

一般的には, σ 拡張は, 空セルの集合を追加することで行われる¹¹⁾. 定理 7 (σ 拡張 F) では, 追加される空セルの集合が ϕ である .

実際の応用に際しては、 σ 拡張ができるように後手の着手に対する先手の応手をあらかじめ決めておく。これにより、 σ 連結の内部着手を考慮せずに、盤面全体の探索（必勝手順の検証）が進められる。こうして、繰返しの記述と場合分けが不要になり、検証も簡単になる。他のさまざまな σ 連結に対しても、同様に σ 拡張ができる。新技法の実例は次章で示す。

6. 応用

本稿の σ 連結と σ 拡張を適用することで、新たな証明法を確立することができる。それにより黒勝ちを導くことができる。本章で取り扱う盤面は 8×8 の盤面であり、証明の具体例は後述の命題 8 で示す。

図 17 は、新技法を用いて簡単に黒勝ちが得られる盤面（後手局面）を示している。この図では、54 (x) と 46 (w) に黒石が、47 に白石が置かれている。図 17 では、 σ 連結 F により、部分盤面内（‘-’ で示す領域）の着手が完全に指定されている。したがって、領域外のセルだけが解析（先行排除）の対象となる。盤面全体のセルに対し先行排除をする必要がないため、場合分けの数が減少する。結果として、詳しい解析（深い探索）が必要ない。このことは次の命題 8 によって得ることができる。

ここで、深い探索が必要でないとは、この局面が証明木の葉になることである。詳しくは次のことを意味する。その局面（葉）は、後手局面であるが、この局面以降の後手の着手は強制される。すなわち、後手の着手はそれ以後一意に（あるいはすぐ後の例で示すように複数あるが自明であるという意味で一意に）定まる。ちょうど将棋において、王手の連続で詰む場合、先手側の王手だけでなく、王側の応手も一意に決っていくという特別な状況に相当する。そこで、証明木の葉局面には、この強制着手手順を付記した先手勝ちの証明をつける。命題 8 では、この強制着手手順を F で表す。

命題 8 次の 8×8 の盤面（後手局面）は黒勝ちである。

証明 図 17 で示すように 54, 46 の黒石をそれぞれ x, w とする。‘-’ の領域を FC , ‘+’ の領域を S とする。S-lemma より $S[xw]$, σ 連結 F より $FC[tx \vee tw \vee tb]$ が成り立つ。これらより、

$$\begin{aligned} & S[xw] \wedge FC[tx \vee tw \vee tb] \wedge (S \cap FC = \phi) \\ \Rightarrow & (S \cup FC)[xw \wedge (tx \vee tw \vee tb)] \\ \Rightarrow & (S \cup FC)[(xw \wedge tx) \vee (xw \wedge tw) \vee tb] \\ \Rightarrow & (S \cup FC)[(tx \wedge tw) \vee (tx \wedge tw) \vee tb] \end{aligned}$$

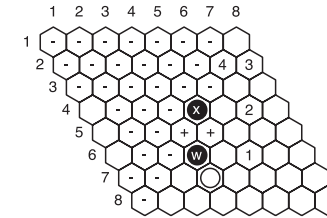


図 17 命題 8 黒勝ち
Fig. 17 Proposition 8 (Black wins).

$F : \circ \{37, 28, 38\} \bullet \text{'1' } \circ \{56\} \bullet \text{'2' } \circ \{64\} \bullet \text{'3' } \circ \{81\} \bullet \text{'4' } (\sigma \text{ 拡張 } F)$.

$$\Rightarrow (S \cup FC)[(tx \wedge tw) \vee tb].$$

領域 S と FC を含まない領域 B において、 $B[w\mathbf{b}]$ が成り立つならば、

$$\begin{aligned} & (S \cup FC)[(tx \wedge tw) \vee tb] \wedge B[w\mathbf{b}] \wedge ((S \cup FC) \cap B = \phi) \\ \Rightarrow & (S \cup FC \cup B)[((tx \wedge tw) \vee tb) \wedge w\mathbf{b}] \\ \Rightarrow & (S \cup FC \cup B)[((tx \wedge tb) \vee tb) \wedge w\mathbf{b}] \\ \Rightarrow & (S \cup FC \cup B)[t\mathbf{b}]. \end{aligned}$$

同様に、 $B[x\mathbf{b}]$ が成り立つときも、 $(S \cup FC \cup B)[t\mathbf{b}]$ が成り立つ。

白は黒の $t - \mathbf{b}$ を防ぐため、着手が 37, 28, 38 のどれかに強制される。次に、黒は‘1’に着手し、 T -lemma より‘1’- \mathbf{b} であるため (T -lemma の領域を T とする)、同様の理由により、白の着手が 56 に強制される。上記のような解析を繰り返すと、 F で示される強制着手が続く。強制着手の途中で白が FC に着手したとき、それに対して、黒は証明木（図 6）に沿った応手をする。白が S に着手したとき、それに対して、黒は S -lemma を成り立たせる応手をする。黒の‘4’の着手は、 σ 連結 F の後手局面における σ 拡張 (σ 拡張 F) の着手である。

強制着手 F において、黒‘2’のとき‘1’-‘2’が、黒‘3’のとき‘2’-‘3’が、それぞれ S -lemma より成り立つ。ここで、これら 2 個の S -lemma と T の領域の和集合を C とすると、黒‘4’の時点で $C[4 \mathbf{b}]$ が成り立つ。また、 σ 拡張 F より $FC[(tx \vee tw \vee tb) \wedge (t'4 \vee x'4)]$ が成り立つ。ここで、 $L = FC \cup S \cup C$ とすると、

$$\begin{aligned} & FC[(tx \vee tw \vee tb) \wedge (t'4 \vee x'4)] \wedge S[xw] \wedge C[4 \mathbf{b}] \wedge (FC \cap S = \phi) \wedge (S \cap C = \phi) \wedge (FC \cap C = \phi) \\ \Rightarrow & L[(tx \vee tw \vee tb) \wedge (t'4 \vee x'4) \wedge xw \wedge 4 \mathbf{b}] \end{aligned}$$

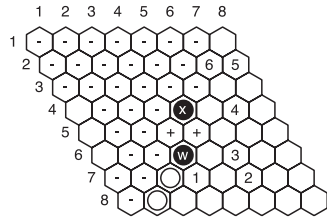


図 18 σ 連結 F と σ 拡張 F を用いた黒勝ちの盤面 1

Fig. 18 Proving Black's win by σ -connection F and σ -extension F (1).

F1 : $\circ\{47\}$ ● ' 3 ' $\circ\{56\}$ ● ' 4 ' $\circ\{64\}$ ● ' 5 ' $\circ\{81\}$ ● ' 6 ' (σ 拡張 F).
F2 : $\circ\{48\}$ ● ' 1 ' $\circ\{38\}$ ● ' 2 ' $\circ\{57\}$ ● ' 3 ' $\circ\{56\}$ ● ' 4 ' $\circ\{64\}$ ● ' 5 ' $\circ\{81\}$ ● ' 6 ' (σ 拡張 F).

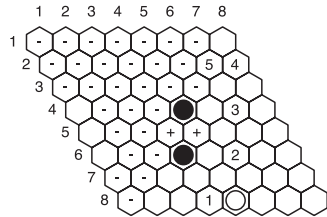


図 19 σ 連結 F と σ 拡張 F を用いた黒勝ちの盤面 2

Fig. 19 Proving Black's win by σ -connection F and σ -extension F (2).

F3 : $\circ\{38\}$ ● ' 1 ' $\circ\{47\}$ ● ' 2 ' $\circ\{56\}$ ● ' 3 ' $\circ\{64\}$ ● ' 4 ' $\circ\{81\}$ ● ' 5 ' (σ 拡張 F).

$$\begin{aligned} &\Rightarrow L[(tx \vee tx \vee tb) \wedge (t' 4 \vee x' 4') \wedge 4' b] \\ &\Rightarrow L[(tx \vee tx \vee tb) \wedge (tb \vee xb)] \\ &\Rightarrow L[(tx \vee tb) \wedge (tb \vee xb)] \\ &\Rightarrow L[(tx \wedge tb) \vee (tx \wedge xb) \vee (tb \wedge tb) \vee (tb \wedge xb)] \\ &\Rightarrow L[tb]. \end{aligned}$$

以上により、命題 8 が成立する。

命題 8 と同様に、 σ 連結 F と σ 拡張 F を用いることで、図 18 と図 19 の盤面の黒勝ちを示せる。

図 18 では、初めの解析における白着手は 47 か 48 に絞られる。強制着手は、前者に対し

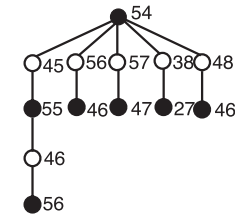


図 20 8×8 (初手 54) の証明木

Fig. 20 Our proof tree for 8×8 (first at 54).

ては **F1** となり、後者に対しては **F2** となる。これ以外の白の着手に対しては黒 47 か黒 57 によって黒勝ちとなる。

図 19 の強制着手は、**F3** で示す。

このように、 σ 連結と σ 拡張のおかげで、場合分けが減少し、使用する図も従来の方法に比べて少数ですむ。

本稿の σ 連結と σ 拡張によって、 8×8 (初手 54) の先手必勝手順を構成することができる。我々が構成した必勝手順の証明木を図 20 で示す。総節点数は 13 個で、先手局面に対応する節点が 6 個、後手局面に対応する節点が 7 個からなっている。後手局面の節点では、(従来の必勝手順のように) AND-OR 連結に基づく先行排除が利用されている。それに加え、 σ 連結と σ 拡張に基づき、深い探索をしなくても (自明の強制着手によって) 黒勝ちを得られる局面 (節点) は、証明木から排除されている。たとえば、根節点において、白 47 の着手は、黒 46 によって命題 8 に帰結し黒勝ちとなるため、証明木から省かれている。同様に、白 37, 白 28, 白 58 の着手も黒 46 によって、黒勝ちとなる (図 18, 19)。これらの局面も証明木から取り除かれている。

我々の 8×8 (初手 54) の必勝手順を示すために、基本となる σ 連結は 4 個で (σ 連結 F を含む)、そのうち 1 個は AB -property を持つ AND-OR 連結そのものである (文献 6) の Figure 38)。さらに、2 個の σ 連結 F のバリエーションを用いる。よって、用いられる σ 連結の総数は 6 個である。この必勝手順では、 σ 連結 1 個に対し 1 個の σ 拡張を用いる。よって、 σ 拡張の総数は 6 個である。

Noshita の 8×8 (初手 54) の必勝手順^{7),8)} では、はじめに、必勝手順の証明で用いられる主要な定理を示している。これらを証明するために必要な図面の数は 31 個である。必勝手順の証明木の正しさを証明するために、各節点における (ユニオン連結による) 先行排除を示している。ここで用いられている図面の数は 222 個である。証明文書全体で用いられ

ている図面の数は、253 個である。証明中では、ある節点（局面）において、その祖先節点に同型の解析（先行排除）が現れる場合、祖先節点の解析を参照することで、繰返しの記述を省略している。必勝手順の証明木の節点数は、108 個である（後手節点は 52 個）。

本稿の 8×8 （初手 54）の必勝手順の正しさを証明する文書は、次のように構成されている。最初に、主要な AND-OR 連結を証明している。また、定理 6 と 7 のように、先行排除で用いられる σ 連結と σ 拡張の正しさを証明している。これらを示すために必要な図面の数は、34 個である。必勝手順を示す証明木（図 20）の各節点における解析では、AND-OR 連結による先行排除と、（命題 8 のような） σ 連結と σ 拡張を使った先手勝ちの証明が示されている。これらを示すために必要な図面の数は、65 個である（新技法を用いた証明は 8 個）。証明文書全体では、99 個の図面を用いている。他の図を参照するなどの省略方法は用いていない。必勝手順の証明木の総節点数は、前述したように、13 個である（後手節点は 7 個）。

このように、 σ 連結と σ 拡張を従来の証明法と併用することで、著しく簡単な形で必勝手順を構築できる。

7. おわりに

本稿では σ 連結とそれを利用した σ 拡張について、その基本的なアイデアを詳しく述べた。これらを用いて、先手勝ちの証明法を新たに確立することができた。 σ 連結と σ 拡張を利用することで、複雑な盤面も簡単に取り扱うことができた。応用として取り上げた 8×8 の盤面では、深い探索をしなくても、容易に先手勝ちを示せた。

本稿の σ 連結と σ 拡張を最大限に利用することにより、 8×8 （初手 54）を総節点数 13 の証明木で示すことができた。証明木に現れない節点は、 σ 連結と σ 拡張に基づく証明によって、黒勝ちを導くことができた。

本稿に着手指定の方法を応用することによって、 8×8 （初手 54）だけでなく、 8×8 （初手 63）や 9×9 （初手 55）の必勝手順を導くことができる。これらの必勝手順全体の証明を書き下すのは稿を改めることにする。

謝辞 研究指導をしてくださった電気通信大学の野下浩平教授に感謝の意を表します。

参 考 文 献

1) Anshelevich, V.: A Hierarchical Approach to Computer Hex, *Artificial Intelligence*, Vol.134, No.1, pp.101–120 (2002).

- 2) Hayward, R., Arneson, B. and Henderson, P.: Verifying Hex Strategies, *CG*, 10pp (2006).
- 3) Hayward, R., Björnsson, Y., Johanson, M., Kan, M., Po, N. and van Rijswijck, J.: Solving 7×7 Hex with Domination, Fill-in, and Virtual Connections, *Theoretical Computer Science*, Vol.349, No.2, pp.123–139 (2005).
- 4) van den Herik, H.J., Uiterwijk, J.W.H.M. and van Rijswijck, J.: Games Solved: Now and in the Future, *Artificial Intelligence*, Vol.134, No.1, pp.277–311 (2002).
- 5) Noshita, K.: Union-Connections and a Simple Readable Winning Way in 7×7 Hex, *Proc. 9th Game Programming Workshop*, pp.72–79 (2004).
- 6) Noshita, K.: Union-Connections and Straightforward Winning Strategies in Hex, *ICGA Journal*, Vol.28, No.1, pp.3–12 (2005).
- 7) Noshita, K.: Updates on Hex, *ICGA Journal*, Vol.29, No.1, p.51 (2006).
- 8) Noshita, K.: Union-Connections and Proof of the Winning Strategy in 8×8 Hex, p.26 (2006). <http://chess.cs.uec.ac.jp/~noshita/hex88proof.pdf>
- 9) Yang, J., Liao, S. and Pawlak, M.: On a Decomposition Method for Finding Winning Strategy in Hex Game, *International Conference on Application and Development of Computer Games in the 21st Century*, pp.96–111 (2001).
- 10) 櫻井英俊, 三島 健, 吉元昭裕, 野下浩平: ゲーム Hex における必勝手順の検証プログラム, 情報処理学会研究報告, 2008-GI-19, Vol.2008, No.28, pp.45–51 (2008).
- 11) 三島 健, 櫻井英俊, 野下浩平: Hex の必勝手順に対する新証明技法とその応用, *Proc. 11th Game Programming Workshop*, pp.136–142 (2006).

(平成 20 年 6 月 4 日受付)

(平成 20 年 11 月 5 日採録)



三島 健（学生会員）

2005 年電気通信大学情報工学科卒業。2007 年同大学院情報工学専攻博士前期課程修了。現在、同博士後期課程に在籍。アルゴリズムの計算量解析、組合せゲームの理論と実験に関する研究に従事。