

水中物体向け視体積交差法

矢野 智彦^{1,a)} 延原 章平^{1,b)} 松山 隆司^{1,c)}

概要：本研究では、任意形状をした水槽の外部から撮影された多視点画像から水中物体の3次元形状復元を行うことを目的とする。一般に、水槽外部からの撮影では複雑な屈折過程のモデル化が必要となるが、本研究では、観測カメラの各画素と、その画素に入射する光が通過する水中の2点の対応関係のみを学習することにより、水槽の形状を明示的に求めることなく3次元形状を復元する手法を考案した。

1. はじめに

コンピュータビジョンの分野における多視点画像を用いた3次元形状復元とそれに基づく自由視点映像生成 [1], [2], [3] において、これまでの研究の多くは均質な媒質からなる撮影環境を想定し、その環境では光が直進するものとして多視点幾何計算が行われていた。この仮定は、空気中の物体を撮影するという状況のもとでは現実的といえるが、その一方で、開発された3次元形状復元アルゴリズムの適用範囲をそのような環境に限定する要因でもあり、例えば水中環境のような屈折率の異なる媒質を介してシーンを撮影する状況を扱うことはできない。

そこで本研究では、多視点画像を用いた3次元形状復元と自由視点映像生成を水中環境のように屈折率の異なる媒質からなる撮影環境下で実現することを目的とし、特に光の屈折現象に焦点をあてたカメラキャリブレーションと形状復元アルゴリズムを提案する。具体的には図1のように

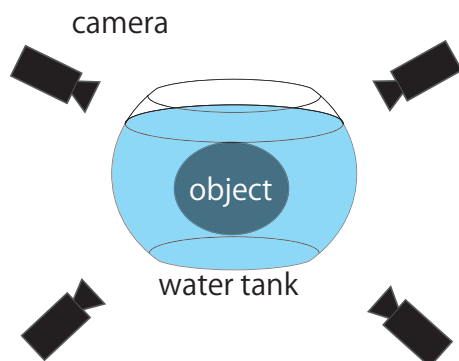


図1 想定する実験環境

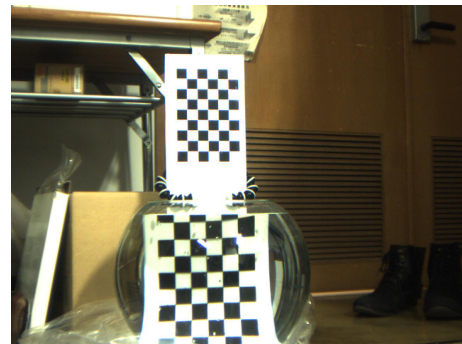


図2 水槽面による屈折

曲面形状をもった水槽を取り囲むように配置されたカメラ群を用いて、水槽内に浮かぶ被写体を撮影する。このとき撮影像は水槽面による屈折を伴うが(図2)、このような屈折を考慮した上で、水中での3次元形状推定を行う。

ここで本研究のポイントは以下の2点である。

- 未知の曲面形状をもった水槽面を介した屈折過程を明示的にモデル化することなく、回帰によって学習する。すなわち geometry-based なキャリブレーションではなく、appearance-based なキャリブレーションを行う。
- 上記 appearance-based キャリブレーションに適した、3次元形状復元アルゴリズムを構築する。

1.1 投影モデル

本論文では図3のように、均質な媒質 W で満たさ

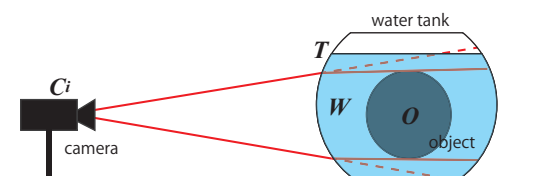


図3 投影過程

¹ 京都大学大学院情報学研究科 〒606-8501 京都市左京区吉田本町

a) yano@vision.kuee.kyoto-u.ac.jp

b) nob@vision.kuee.kyoto-u.ac.jp

c) tm@vision.kuee.kyoto-u.ac.jp

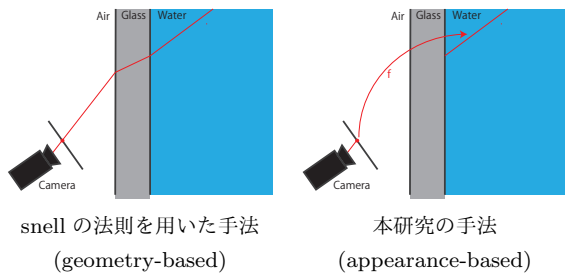


図4 水中の投影過程の学習

れ、未知の表面形状を持った水槽 T を、 N 台のカメラ $c_i (i = 1, \dots, N)$ で撮影する状況を想定する。水槽 T の中には、撮影対象 O が存在する。対象 O の表面では光は透過しないものとする。本論文の入力は、媒質 W 中の対象 O を、水槽 T の壁面を介して、空気中のカメラ c_i で撮影した多視点画像 I_i であり、出力は対象 O の表面形状である。

多視点環境における投影過程として一般的なモデルは透視投影である。そのため屈折面の形状が正確に求められるならば、Snellの法則を用いて、屈折過程を明示的に計算することは不可能ではない。しかし本論文のように一般に未知の曲面形状を持った水槽を仮定した場合、そもそもそのような透明物体の表面形状を推定することそのものが課題となる。

そこで本研究では、水槽中が均質な媒質で満たされていることから、媒質 W 中で光が直進することを利用する。まず媒質 W 中の1点が撮影画像中の1画素へと投影される過程を考えると、媒質 W 中では、その光路は直線となる。逆に撮影画像中の1画素 p に着目すると、この画素へと投影されるような媒質 W 中の点は、媒質 W 中のある1直線 l_p 上の点に限られると言える。したがって、もし各画素 p と媒質 W 中の直線 l_p の関係を知ることができれば、水槽 T の壁面による屈折を明示的にモデル化することなく、画素から対象が存在する3次元空間への逆投影を計算できることになる [4]。

本研究ではこのような考え方に基づいて、各画素 p と媒質 W 中の直線 l_p の関係を回帰関数 $l_p = f(p)$ として学習する (図4)。

1.2 3次元形状復元

こうして得られた回帰関数 $l_p = f(p)$ による逆投影に適した3次元形状復元アルゴリズムとして、本論文ではConstructive-Solid-Geometryに基づく視体積交差法を提案する。

これは後述するように、媒質 W 中の1点を撮影画像中に投影する順投影計算の解析解が得られないという理由による。すなわち多くの3次元形状推定アルゴリズムは逆投影だけでなく、例えばSpace-CarvingやVolume-based Shape-from-silhouetteでは空間中のvoxelを各画素へと順投影する必要があるが、上記の回帰関数による投影モデル

ではこのような手法を用いることが現実的ではないためである。

以上のようにして投影過程中の屈折を明示的にモデル化することなく、また解析的に行うことができない順投影の処理を行わずに水中物体の3次元形状復元を実現する。

2. 関連研究

2.1 順投影・逆投影モデル

投影モデルとは画像座標と空間平面の座標関係を記述するモデルであり、3次元空間から画素へ変換する投影を順投影、画素から3次元空間へと変換する投影を逆投影という。

透視投影は多視点画像を用いた3次元形状復元に最もよく用いられる [1], [2], [3]。これをそのまま本研究が想定する計測モデル (図3) に用いる場合、水槽表面での屈折過程を明示的にモデル化する geometry-based な方法が考えられる [5], [6]。しかしこの方法は水槽面が平面の時にしか用いることができない上に、平面の時でも12次方程式の計算が必要となり現実的ではない [7]。

一方画素から3次元空間中の直線への変換に基づく appearance-based なモデルは、水槽面による屈折過程を明らかにせず、画素 p と直線 l_p の写像関係 f を直接学習する [4], [8]。そのためこの手法には実際の屈折過程を表現できる関数 f が存在し、そのパラメータを学習できる必要があること、そして後述のように順投影計算には解析解が存在しないこと、の2つの特徴がある。

本研究では後者の appearance-based なアプローチを採用するため、その特徴を生かした3次元形状復元アルゴリズムを提案する。

2.2 3次元形状復元法

2.2.1 視差を用いた方法

カメラで物体を撮影した場合、視点ごとに物体の写りに差が生じる。この差のことを視差という。この視差を利用した代表的な方法はステレオ法とスペースカービング法である。

ステレオ法の基本は三角測量であるが、実際にステレオ法を行うためにテンプレートマッチングが行われる。これは画像中のある点において対応がとれていると仮定するならば、その周りの点も対応がとれているという仮定の下で、二つの画像のうち、一方の画像の着目点の周りに窓を設けその窓と最も似ている部分をもう一方の画像から探し出すというものである。

スペースカービング法は voxel ごとに物体表面上の点か否かを判定する方法である [9]。voxel を各画像面に投影した時、その voxel が物体表面ならば各画素値は同様の値を示すが、物体表面でなければ画像面には異なる部分が投影されるので各画素値は異なる値を示すことにより判定する。

画像間の比較に用いるテンプレートの形状を適切に設定するためには、視点の変化だけではなく屈折による変形も考慮しなくてはならないが、屈折面の形状が未知の場合、この変形を事前に知り得ることは容易ではない。またスペースカービングのように3次元空間中から画像面への順投影を必要とするアルゴリズムは、上述の投影モデルの特性上、計算量が膨大になるため好ましくない。

2.2.2 シルエットを用いた方法

シルエットの情報から3次元形状復元する方法を視体積交差法という [10], [11]。視体積交差法には大きく分けて二つのアルゴリズムがある。一つは voxel を処理単位とした方法でもう一つは pixel を処理単位とした方法である。

voxel を処理単位とした方法は、voxel ごとに視体積の共通部分に含まれるか否かを計算する方法である。voxel をすべてのシルエットに投影した時、投影先がすべての視点において観測シルエットの内部であれば、その voxel は対象形状を構成すると考える。

pixel を処理単位とした方法は視点と撮影面に撮像された物体のシルエットから視体積を明示的に求め、その視体積の共通部分を計算する方法である。Exact Polyhedral Visual Hulls (EPVH) [12] はエビポーラ線とシルエットの情報から物体を形状復元する方法である。一方 Constructive Solid Geometry (CSG) は複雑な形状を表現するのに、比較的単純な物体の和集合や差集合、積集合などで表現する考え方のことである。

視差を用いた方法と同様に、順投影を必要とする voxel を処理単位とした方法は計算量の観点から適さない。また pixel を処理単位とした手法であっても、EPVH のようにエビポーラ幾何に基づく手法では、屈折の影響からエビポーラ線を計算することが困難であるために適用できない。したがって本論文では、CSG に基づく手法を提案する。

2.3 自由視点映像生成

多視点映像から対象の3次元形状が復元された場合、これを所望の視点からレンダリングすることで自由視点映像生成が実現される。この過程は Computer Graphics による映像生成と同様に、対象の表面形状を明示的に求めることによって行われるが、その方法とは別に、対象形状を求めることなく、任意の視点からの見えを計算する方法がある。

例えば Image-Based Visual Hulls (IBVH) では、EPVH と同様にエビポーラ線とシルエットの情報から仮想視点での見えを計算している [13]。また CSG においても、論理演算の結果である3次元形状を明示的に求めることなく、任意視点における見えを直接生成する手法 (Image-based CSG) [14], [15] が提案されている。これらの手法は一般に3次元形状復元のコストが不要となるために、実時間性に優れているとされる。

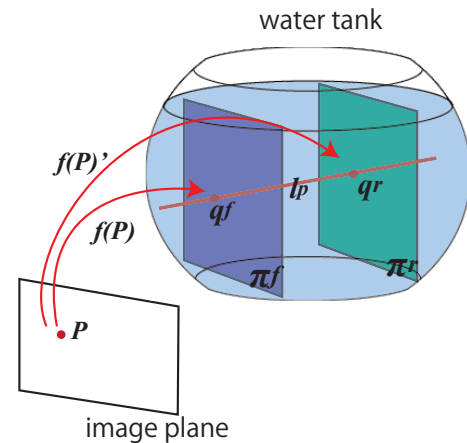


図5 直線 l の決定

本論文においては、屈折のために IBVH を用いることはできないが、前述のように提案する3次元形状復元アルゴリズムは CSG に基づく。そのため本論文では Image-based CSG を用いて自由視点映像生成の高速化を図る。

3. 提案手法

3.1 回帰に基づく逆投影計算

3.1.1 回帰関数

先に述べたように、本論文では画素 p が与えられたときに、この p へと投影されるような媒質 W 中の直線 l_p を返す関数 $l_p = f(p)$ が必要となる。本節では、このような $f(p)$ を実現する手法について述べる。これは [16] の手法に基づいたものである。以下では媒質 W 中の直線 l_p 、また後述の平面 π_f 、 π_r は全てカメラ座標系で表すこととし、複数のカメラ間の外部キャリブレーションについては別途既存の手法によって行うものとする。

まず直線 l_p の表現として、それが媒質 W 中で通過する相異なる2点 q_f 、 q_r を用いることとする。直線の表現には通過点と方向ベクトルなど、複数の候補があるが、相異なる2点を用いる理由は

- (1) 画素 p から媒質 W 中の1点への回帰関数のみを用意できれば実現されること
- (2) 2点 q_f 、 q_r がそれぞれ媒質 W 中の異なる平面 π_f 、 π_r 上に存在するように設計すれば、キャリブレーションが容易となるとともに回帰関数が簡単化されること (図5)、

の2点である。

まず平面 π_f 、 π_r 上の点 q_f 、 q_r の座標はそれぞれ $q_f = (x_{q_f}, y_{q_f})_{\pi_f}^T$ 、 $q_r = (x_{q_r}, y_{q_r})_{\pi_r}^T$ のように2次元座標で表現しても一般性を失わない。ただし $(x, y)_{\pi}^T$ は (x, y) が平面 π 上の座標系で表現されていることを表している。つまり q_f と q_r の平面上の位置は異なる座標系で定義されている。両者の間の変換については後述する。

したがって関数 $f_f(p)$ および $f_r(p)$ は、画素 $p = (u, v)$

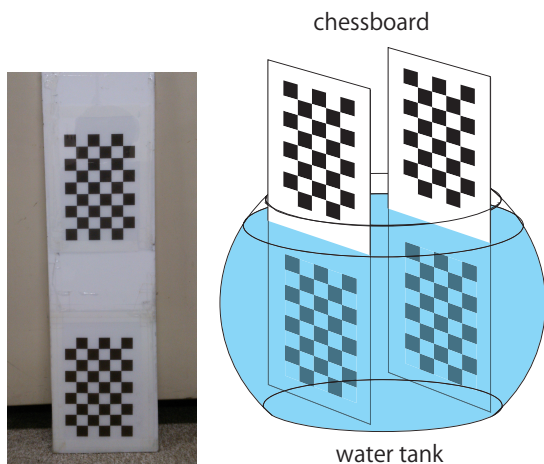


図 6 本論文で用いるチェスボード

が与えられた際に、平面 π_f , π_r 上の位置 q_f および q_r を返す関数として設計すればよい。具体的には、本研究では以下の関数を用いる。

$$x_{q_f} = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^{3-\alpha} a_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta \quad (1)$$

$$y_{q_f} = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^{3-\alpha} b_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta \quad (2)$$

ここで $a_{\alpha\beta}$ および $b_{\alpha\beta}$ は近似式の係数である。またこの式は q_r についても同様である。また $a_{\alpha\beta}$ および $b_{\alpha\beta}$ は各平面ごとに異なる値を示す。

3.1.2 キャリブレーションアルゴリズム

平面 π_f , π_r をカメラ座標に変換するために本論文においては図6のようなチェスボードを用いる。水に浸かっている下側のチェスパターンで前節の写像変換を行い、そして水から出ている上側のチェスパターンで平面の位置関係を求める。したがって上下二つのチェスパターンの関係を算出し、Zhangの方法[17]を用い上側のチェスパターンとカメラの関係を求める。以下、下側のチェスパターンで作られる座標系を W_L 、上側のチェスパターンで作られる座標系を W_H と定義する。またカメラの座標系を C とおき、 W_L から C への変換を回転行列 R_L および平行行列 T_L 、 W_H から C への変換を回転行列 R_H および平行行列 T_H で表わすと以下の関係が成り立つ。

$$C = R_L W_L + T_L \quad (3)$$

$$C = R_H W_H + T_H \quad (4)$$

(3) と (4) よりカメラ座標系は

$$W_H = R_b W_L + T_b \quad (5)$$

となる。ただし $R_b = R_L^{-1} R_H$, $T_b = R_L^{-1} (T_H - T_L)$ である。しかし二つのチェスパターンは同一平面上にあるので、 R_b および T_b に同一平面の制約を加えて値を補正する。補

正後の R_b , T_b をそれぞれ R'_b , T'_b とすると求める R'_b , T'_b は以下の制約条件が含まれる。

$$R'_b = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$T'_b = \begin{pmatrix} x & y & 0 \end{pmatrix}^T \quad (7)$$

$$W_H = s(R'_b W_L + T'_b) \quad (8)$$

ただし s は拡大および縮小するための係数である。式(8)の補正を行うことによって同一平面上の2平面間の変換を行うことができる。空間平面座標系に変換できればZhangの方法[17]によって回転行列 R と平行行列 T を用いてカメラ座標に変換できる。結果的に $p = (u, v)$ がまず $q_f = (x_{q_f}, y_{q_f})_{\pi_f}^T$ に変換され、さらにこれがカメラ座標系 $q_f = (X, Y, Z)_c^T$ へと変換される式を述べる。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = s R R'_b \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^{3-\alpha} a_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta \\ \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^{3-\alpha} b_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta \\ 0 \end{pmatrix} + s R T'_b + T \quad (9)$$

以上のようにして、画素 p に対して媒質 W 中の直線 l_p をカメラ座標系で計算することができた。次節の多視点画像を入力とした3次元形状復元では全てのカメラ座標系を1つの世界座標系へと変換する必要があるが、これはカメラがすべて水槽外に配置されていること、つまり通常多視点環境と同様であることを利用して、既存の外部キャリブレーションによって求めることができる。

3.2 形状復元のアルゴリズムの設計

関連研究で述べたように形状復元の方法にはそれぞれ特徴があるが、上述の投影計算モデルに適した手法として、特に以下の二つの条件が満たされている必要がある。

(1) 順投影の処理がない

前節の投影方法では媒質 W 内の座標をそれぞれ $p = (u, v)$ の関数で表している(式(1) および(2))。この式を逆に (u, v) について解くことは容易ではない。また仮に解けたとしても、媒質 W 内の座標 $(X, Y, Z)_c^T$ が与えられた際に、これに対応する平面 π_f もしくは π_r 上の点を得るには反復計算による最適化が必要となり[4]、やはり (u, v) を得ることは容易ではない。したがって3次元形状復元の際には順投影の処理がないことが望ましい。

(2) 形状復元をする際にエピポラ幾何を用いない

エピポラ線に沿った走査など、エピポラ幾何に立脚したアルゴリズムを用いることはできない。

一つ目の条件から空間を voxel ごとに物体、または表面形状を構成しているかどうかを調べる方法は不適當であ

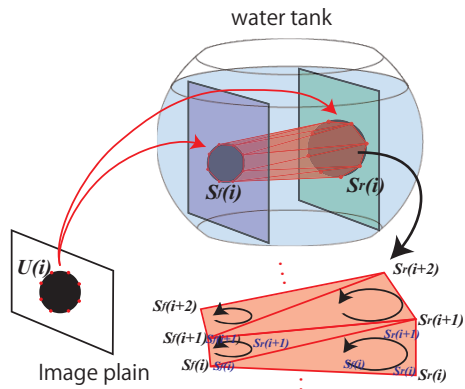


図 7 錐台の生成



図 8 水槽とオブジェクト

る。関連研究ではスペースカービング法や視体積交差法の voxel を処理単位とした方法がこの方法に当たる。またステレオ法は屈折を考慮したテンプレートの適切な変形を推定できないために不適切である。また EPVH は交差を求めるにあたってエピポラ幾何を利用する。その際にエピポラ線が直線であることを期待しているが投影過程に屈折がある場合エピポラ線は曲線になり仮定を満たさない。以上のことから 3次元形状復元では視体積交差法の CSG の考え方をういて形状復元する。

以下に 3次元形状復元の過程を述べる。初めにシルエットの輪郭を折れ線で近似し、抽出された頂点座標を $U(i) (i = 1, 2, \dots, L)$ とおく。そして $U(i)$ を媒質 W 中の二つの平面に投影し、その座標を $U_f(i), U_r(i)$ とする。さらにこれらを上述の方法で世界座標 $S_f(i)$ および $S_r(i)$ に変換する。

次に頂点の情報から $S_f(i), S_f(i)$ を順に接続することにより錐台を三角形平面で近似する (図 7)。各平面において物体の外側に向かって法線ベクトルを指定できるように、頂点の接続の順番も定める。具体的には図 7 のように $S_f(i) \rightarrow S_r(i) \rightarrow S_r(i+1)$ や $S_f(i) \rightarrow S_r(i+1) \rightarrow S_f(i+1)$ の順で結ぶ。また錐台の上面と底面を $S_f(1) \rightarrow S_f(2) \rightarrow \dots \rightarrow S_f(L)$ や $S_r(1) \rightarrow S_r(2) \rightarrow \dots \rightarrow S_r(N)$ のようにして順に結ぶ。

最後に自由視点映像を生成する。自由視点映像は上述のように Image-based CSG を用いる。Image-based CSG はまず平面集合を、法線ベクトルが視点側を向いている平面集合と視点と反対方向を向いている平面集合に分割する。そして各画素について前者の平面集合のうち最も遠い部分にある平面を計算し、その平面より奥に重なっている平面集合の数を計算する。その数が交差している錐台の数と等しい部分のみを残すことで自由視点映像を生成する。

4. 評価実験

4.1 実験環境

水槽と被写体は図 8 のように、球から上部分と下部分を



図 9 実験環境

切り取ったような形的水槽とカメラの三脚を用いた。また水槽の中に手を入れて手も被写体として撮影した。実験環境は図 9 のような環境で行った。

4.2 評価方法

4.2.1 キャリブレーション精度の定量的な評価方法

各カメラの画像中の対応点において水槽中での投影過程を表示させた時に、その直線は完全には交差せずねじれの位置関係にある。よってその直線間の距離を計測することにより、キャリブレーションの精度を評価した。

4.2.2 定性的な形状評価方法

定性的な評価方法は空中のチェスボードのみを用いる場合、つまり透視投影のみを用いた場合と水中のチェスボードも用いる場合の二つを比較して精度の改善が図れているかどうかを評価した。

4.3 実験方法

(1) カメラ撮影

カメラ撮影においては以下の画像を撮影する。

- (a) 各カメラの内部キャリブレーション用の画像
- (b) 各カメラで水中に図 6 のチェスボードを沈めて撮影した画像
- (c) 隣り合う二台ずつのカメラで一つのチェスボードを撮影した画像
- (d) 図 6 のチェスボードを水に沈めずに撮影した画像

(2) チェスコーナーの検出および各パラメータの算出

撮影したチェスパターンのコーナーを検出した。(a) から各カメラの内部パラメータを求め、(b) の下側の

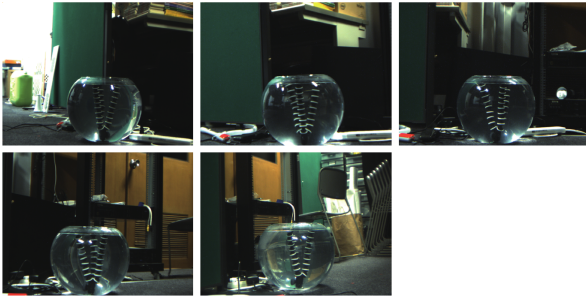


図 10 三脚の入力画像

チェスパターンから係数 $a_{\alpha\beta}$ および $b_{\alpha\beta}$ を求め、(b)の上側のチェスパターンや、(c) および (d) のチェスパターンからチェスパターンの座標系と撮影したカメラ座標系の関係を求めた。

(3) 世界座標系の変換

画素 p から水中の投影過程を表す 2 点 q_f, q_r を同一のカメラ座標系 C で表すことは (d) の画像を用いて前節の手法により求めることができる。さらに (c) の画像を用いてカメラ同士の座標系を求めれば、各カメラの座標系を統一することができる。以下では隣り合う 2 台のカメラでチェスパターンを撮影した環境を想定する。それぞれのカメラ座標系を C_0, C_1 とおき、撮影したチェスパターンの座標系を W_{01} と置く。さらに、 W_{01} 座標系から C_0 座標系の変換を回転行列 R_0 、平行行列 T_0 、 W_{01} 座標系から C_1 座標系の変換を回転行列 R_1 、平行行列 T_1 で表す。このときそれぞれの座標系の関係は次のようになる。

$$C_0 = R_0 W_{01} + T_0 \quad (10)$$

$$C_1 = R_1 W_{01} + T_1 \quad (11)$$

式 (10) と式 (11) から W_{01} を消去して

$$C_1 = R_1 R_0^{-1} C_0 - R_1 R_0^{-1} T_0 + T_1 \quad (12)$$

これを M 台のカメラ (カメラ 1, カメラ 2, ..., カメラ M) があるとする。カメラ 1 とカメラ 2, カメラ 2 とカメラ 3, ..., カメラ M-1 とカメラ M で行うことによりカメラ同士の関係を求めることができる。

(4) object の抽出

背景差分を用いて被写体のシルエットを抽出した後、前節の方法で 3 次元形状復元を行った。

4.4 実験結果

撮影された画像は図 10 および図 13 となった。形状復元の結果は、透視投影のみ場合は図 11 および図 14 となった。一方本論文の提案手法を用いた場合は図 12 および図 15 のようになった。前者は水槽の境界面により膨らんだ物体をそのまま復元しているのので後者よりも膨らんだ形状で出力

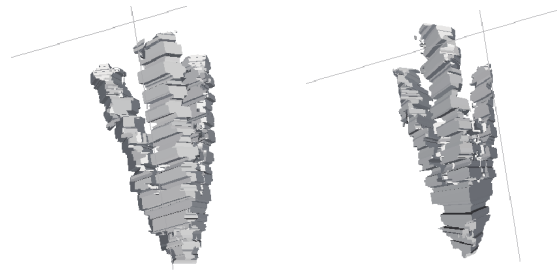


図 11 透視投影のみ

図 12 本論文の手法



図 13 手の入力画像

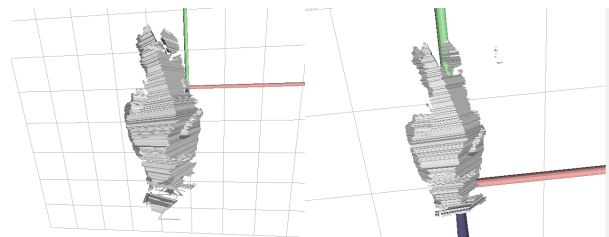


図 14 透視投影のみ

図 15 本論文の手法

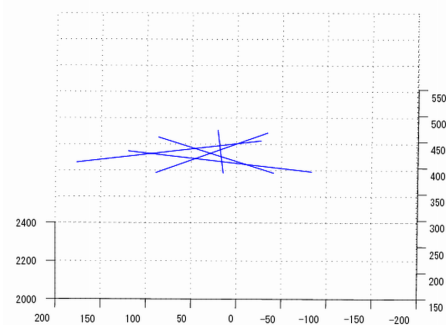


図 16 キャリブレーション結果

されることがわかる。図 16 は物体の特徴的な一点を選び、各カメラにおいてその特徴点の画素を逆投影した時の水中での投影過程である。図 16 によると 2 台のカメラ同士に着目すればねじれがほとんどなく交わっているが、5 台のカメラすべてに着目すると一点に交わらずわずかに誤差が生じていることがわかる。

5. 考察・結論

本論文では屈折を明示的にモデル化せずに、水槽の中で

は光は直進するという仮定から投影モデルを設定しただけでなく、設定したモデルの欠点である順投影の困難さを回避しながら、3次元形状復元および自由視点映像を作成するモデルの実装を行うことができた。

今後の研究においてはまず水の中に入っているチェスボードのコーナー検出を工夫するなどしてキャリブレーション精度を向上させることがあげられる。また本論文では定性的な評価のみでの評価であったので定量的な評価もしていきたい。

そして水槽の中の物体を撮影する環境を構築することができれば、次に撮影物体を不透明から半透明などに変更して形状復元を行いたいと考えている。またシルエットのみではなく、テクスチャ情報を利用して photo hull を推定することで復元精度の向上にも取り組む必要がある。

謝辞

本研究は JSPS 科研費 25540068 の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] Saied Moezzi, Li-Cheng Tai, and Philippe Gerard. Virtual view generation for 3d digital video. *IEEE Multimedia*, pp. 18–26, 1997.
- [2] Takeo Kanade, Peter Rander, and P. J. Narayanan. Virtualized reality: Constructing virtual worlds from real scenes. *IEEE Multimedia*, pp. 34–47, 1997.
- [3] J. Starck, A. Maki, S. Nobuhara, A. Hilton, and T. Matsuyama. The multiple-camera 3-d production studio. *IEEE TCSVT*, Vol. 19, No. 6, pp. 856–869, 2009.
- [4] Borislav Trifonov, Derek Bradley, and Wolfgang Heidrich. Tomographic reconstruction of transparent objects. In *Proc. of Eurographics Conf. on Rendering Techniques*, pp. 51–60, 2006.
- [5] Visesh Chari and Peter Sturm. Multiple-view geometry of the refractive plane. In *Proc. of BMVC*, 2009.
- [6] Lai Kang, Lingda Wu, and Yee-Hong Yang. Two-view underwater structure and motion for cameras under flat refractive interfaces. In *Proc. of ECCV*, pp. 303–316, 2012.
- [7] Amit Agrawal, Srikumar Ramalingam, Yuichi Taguchi, and Visesh Chari. A theory of multi-layer flat refractive geometry. In *Proc. of CVPR*, pp. 3346–3353, 2012.
- [8] James Gregson, Michael Krimerman, Matthias B. Hullin, and Wolfgang Heidrich. Stochastic tomography and its applications in 3d imaging of mixing fluids. In *Proc. of ACM SIGGRAPH*, pp. 52:1–52:10, 2012.
- [9] Kiriakos N. Kutulakos and Steven M. Seitz. A theory of shape by space carving. In *Proceedings of the 7th IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV-99)*, volume I, pages 307–314, Los Alamitos, CA. IEEE, 1999.
- [10] Bruce G. Baumgart. A polyhedron representation for computer vision. In *Proceedings of the National Computer Conference and Exposition, AFIPS '75*, pp. 589–596, 1975.
- [11] Aldo Laurentini. How far 3d shapes can be understood from 2d silhouettes. *IEEE TPAMI*, Vol. 17, No. 2, pp. 188–195, 1995.
- [12] Jean-SC)bastienFranco, Edmond Boyer. Exact polyhedral visual hulls. In *IN BRITISH MACHINE VISION CONFERENCE*, pp. 329–338, 2003.
- [13] Wojciech Matusik, Chris Buehler, Ramesh Raskar, Steven J. Gortler, and Leonard McMillan. Image-based visual hulls. In *IN PROCEEDINGS OF ACM SIGGRAPH 2000*, pp. 369–374, 2000.
- [14] Nigel Stewart, Geoff Leach, and Sabu John. Linear-time csg rendering of intersected convex objects. In *In 10th International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision - WSCG 2002 (2002)*, pp. 437–444, 2002.
- [15] Jack Goldfeather, Jeff P. M. Hultquist, and Henry Fuchs. Fast constructive solid geometry display in the pixel-power graphics system. In *Proc. of ACM SIGGRAPH*, pp. 107–116, 1986.
- [16] Borislav Danielov Trifonov and C Borislav Danielov Trifonov. Tomographic reconstruction of transparent objects. In *Proc. EGSR*, pp. 51–60, 2006.
- [17] Zhengyou Zhang and Zhengyou Zhang. A flexible new technique for camera calibration. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 22, pp. 1330–1334, 1998.