止し，本文に述べた回路に変更する必要を生じた．

本装置では，情報伝送速度が，累算器のシフトの速度で押えられる．計画時にはパラメトロンの励振周波数を 20 kc で上げる予定で，本装置の誤り訂正可能な符号方式を用いて，760 m のテープに約 10 万語の容量を持たせる予定であった．しかし現在の励振周波数が 6 kc であるため，0.4 行/mm の情報密度となり，記憶容量は 760 m のテープに約 3 万語となった．

現在は，磁気テープに CRT 表示装置用の図形を画かせるプログラムを記憶させ，試験運転中であるが，充分実用に供し得ることを確認した．今後は誤りの検出個数を各種条件件のもとに測定し，回路の信頼度，磁気テープの劣化状況を調査する予定である．

終りに終始御指導を賜った喜安次長，遠藤電子応用研究室長に深甚なる謝意を表する．また，パラメトロンの配線・組立てを援助された試作部各位，一部の試作を援助していただいた伊藤忠雄木村健社員に感謝する．

参考文献

1) 室賀，高島：通学誌，**41**，11，昭33-11，p. 114
2) 高島，室賀，西田：通学誌，**41**，11，昭33-11，p. 123
3) 山田，小柴：通学誌，**41**，11，昭33-11，p. 131

Vol. 1 No. 3　　情　報　処　理　　Nov. 1960

数値計算の誤差*

馬場準一**　林　重雄**

1. まえがき

過渡現象の関与してくる工学上の種々の問題の解析には微分方程式の数値解法が必要となってくる．その場合に，計算の 1 ステップの時間間隔 Δt をどのように選定すればよいかということは，常に問題となるところである．応用数学の書物には，たとえば Runge-Kutta 法によるときは，計算誤差は $(\Delta t)^5$ の Order であるというような記述をみるが，これでは，実際の問題をとくときの誤差がどの程度であるかを推測することはむずかしい．

誤差を正しく評価するためには，問題を記述する微分方程式について，数値計算による解の変歪(時定数，周波数の変化）を知ることが必要である．

筆者らは，数値計算による解は，定差方程式の解となることに注目し，z 変換を用いて数値計算による解の変歪を調べ，問題の解析において，計算のステップ Δt としてどのような値を選定すべきかを示した．

2. 線形連立常微分方程式の形式

一般に線形連立常微分方程式では，1 階以上の微係数を

$$\frac{dx_i}{dt}=u_i,\quad \frac{d^2x_i}{dt^2}=\frac{du_i}{dt}=v_i,\quad \frac{d^3x_i}{dt^3}=\frac{dv_i}{dt}=w_i,\ \cdots$$

とおくことによって，

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx_i}{dt}+\sum a_{ij}x_j=b_i\quad (i=1\sim n)\\&t=0\ \text{で}\ x_i=x_{i0}\end{aligned}\right\}\tag{2・1}$$

あるいは行列の形式で

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d[x]}{dt}+[A][x]=[B]\\&t=0\ \text{で}\ [x]=[x_0]\end{aligned}\right\}\tag{2・2}$$

とあらわすことができる．系は線形であるから，重畳の理がなり立つ．したがって b_i が定数の場合について論じておけば十分であろう．

これをラプラス変換して

$$s[x]+[A][x]=[B]/s+[x_0]\tag{2・3}$$

のように書くことができる．

3. 数値計算法

ここでは，数値計算法として，

(i) Euler 法

$$\frac{dx(t)}{dt}\rightarrow\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\ \text{で近似するもの}\tag{3・1}$$

(ii) Modified Euler 法

* Errors of Numerical Calculation, by Junichi Baba and Shigeo Hayashi (Mitsubishi Denki Co., Ltd. Lab.)
** 三菱電機株式会社研究所

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dx\left(t+\dfrac{\Delta t}{2}\right)}{dt} \rightarrow \dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \\ x\left(t+\dfrac{\Delta t}{2}\right) \rightarrow \dfrac{1}{2}[x(t+\Delta t)+x(t)]\end{array}\right\}\text{で近似するもの} \quad (3\cdot 2)$$

(iii) Runge-Kutta 法

後述のように4個の階差，$\Delta^{\mathrm{I}}x_i$, $\Delta^{\mathrm{II}}x_i$, $\Delta^{\mathrm{III}}x_i$, $\Delta^{\mathrm{IV}}x_i$ の加重平均をとって Δx をもとめるもの，

$$\Delta x_i=\frac{1}{6}(\Delta^{\mathrm{I}}x_i+2\Delta^{\mathrm{II}}x_i+2\Delta^{\mathrm{III}}x_i+\Delta^{\mathrm{IV}}x_i) \quad (3\cdot 3)$$

4. 線形連立常微分方程式の記号解

2. の (2・2) で示した線形連立常微分方程式は，記号的[1,2]にとけて，

$$x=[A]^{-1}\{[I]-e^{-[A]t}\}\{[B]-[A][x_0]\}+[x_0] \quad (4\cdot 1)$$

$[I]$：単位行列

$$e^{-[A]t}=[I]-[A]t+\frac{[A]^2}{2!}t^2-\frac{[A]^3}{3!}t^3+\cdots \quad (4\cdot 2)$$

ここで，$e^{-[A]t}$ を Sylvester の定理を用いて展開すると，

$$e^{-[A]t}=\sum_{r=1}^{n}e^{-\alpha_r t}[K(\alpha_r)] \quad (4\cdot 3)$$

α_r は $[A]$ の特有限であって，これは一般には，複素数である．

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_r=a_r+jb_r \\ \det\{\alpha_r[I]-[A]\}=0\end{array}\right\} \quad (4\cdot 3)$$

$$[K(\alpha_r)]=\prod_{s\neq r}^{s=1,\cdots n}\frac{\alpha_s[I]-[A]}{\alpha_s-\alpha_r} \quad (4\cdot 4)$$

ただし，$\alpha_r(r=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ はすべて異るものとする．

これを (4・1) に代入して，

$$[x]=[A]^{-1}[B]-\sum_{r=1}^{n}[A]^{-1}\left\{\prod_{s\neq r}^{s=1,\cdots n}\frac{\alpha_s[I]-[A]}{\alpha_s-\alpha_r}\right\}\{[B]-[A][x_0]\}e^{-\alpha_r t}$$

$$=[\alpha]+\sum_{i=1}^{n}[\beta_i]e^{-a_i t}(\cos b_i t-j\sin b_i t) \quad (4\cdot 5)$$

あるいは (4・5) をラプラス変換して，

$$\left.\begin{array}{l}[x(s)]=\dfrac{[\alpha]}{s}+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\dfrac{[\beta_i]}{s+a_i+jb_i} \\ \text{ただし，} \\ [\alpha]=[A]^{-1}[B] \\ [\beta_i]=-[A]^{-1}\displaystyle\prod_{s\neq r}^{s=1,\cdots n}\dfrac{\alpha_s[I]-[A]}{\alpha_s-\alpha_i} \\ \qquad\{[B]-[A][x_0]\}\end{array}\right\} \quad (4\cdot 6)$$

5. Euler 法

Euler 法でとくときは，

$$\{x_i(t+\Delta t)-x_i(t)\}/\Delta t+\sum a_{ij}x_j(t)=b_i \quad (5\cdot 1)$$

あるいは行列の形式で

$$\{[x(t+\Delta t)]-[x(t)]\}/\Delta t+[A][x(t)]=[B] \quad (5\cdot 2)$$

$[x]$ の初期値が，$[x_0]$ であることに注目して，z 変換すれば (5・2) は

$$\frac{(z-1)[x(z)]}{\Delta t}+[A][x(z)]=[B]\frac{z}{z-1}+\frac{z}{\Delta t}[x_0] \quad (5\cdot 3)$$

ここで $\dfrac{z-1}{\Delta t}=p$ とおけば，

$$p[x]+[A][x]=\frac{z}{\Delta t}\left\{\frac{[B]}{p}+[x_0]\right\} \quad (5\cdot 4)$$

(5・4) と (2・3) を対比すれば，(5・4) は (2・3) において $[B]$, $[x_0]$ をそれぞれ $\dfrac{z}{\Delta t}$ 倍したものに等しいから，(5・4) の解は，(4・6) を参照して記号的に下記のようになる．

$$[x]=\frac{z}{\Delta t}\frac{[\alpha]}{p}+\frac{z}{\Delta t}\sum_{i=1}^{n}\frac{[\beta_i]}{p+a_i+jb_i} \quad (5\cdot 5)$$

$p=\dfrac{z-1}{\Delta t}$ を代入して，

$$[x(z)]=[\alpha]\frac{z}{z-1}+\sum_{i=1}^{n}\frac{[\beta_i]z}{z-(1-a_i\Delta t-jb_i\Delta t)} \quad (5\cdot 6)$$

ここで，付-1. を参照して，時間領域に変換すれば

$$[x(t)]=[\alpha]+\sum_{i=1}^{n}[\beta_i]e^{-a_i't}(\cos b_i't-j\sin b_i't) \quad (5\cdot 7)$$

(5・7) と (4・5) とを対比してみると，Euler 法によって，

$$\left.\begin{array}{l}a_i\rightarrow a_i' \\ b_i\rightarrow b_i'\end{array}\right\}\text{と，変歪していることがわかる．}$$

6. Modefied Euler 法

Modified Euler 法で解くときには，

$$\{x_i(t+\Delta t)-x_i(t)\}/\Delta t+\frac{1}{2}\sum a_{ij}\{x_i(t+\Delta t)+x_i(t)\}=b_i \quad (6\cdot 1)$$

あるいは

$$\{[x(t+\Delta t)]-[x(t)]\}/\Delta t+\frac{1}{2}[A]\{[x(t+\Delta t)]+[x(t)]\}=[B] \quad (6\cdot 2)$$

$[x]$ の初期値が $[x_0]$ であることに留意して，z 変

換すれば，(6・2) は

$$\frac{(z-1)}{\Delta t}[x]+\frac{(z+1)}{2}[A][x]$$
$$=[B]\frac{z}{z-1}+\frac{z}{\Delta t}[x_0]+\frac{1}{2}z[A][x_0] \qquad (6\cdot3)$$

両辺に $\frac{2}{z+1}$ を乗ずれば，

$$\frac{2(z-1)}{\Delta t(z+1)}[x]+[A][x]$$
$$=[B]\frac{2z}{(z-1)(z+1)}+\frac{2}{\Delta t}\frac{z}{z+1}[x_0]+\frac{z}{z+1}[A][x_0]$$
$$=[B]z\left\{\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right\}+\frac{2}{\Delta t}\frac{z}{z+1}[x_0]$$
$$+\frac{z}{z+1}[A][x_0]$$
$$=\frac{2z}{\Delta t(z+1)}\left\{\frac{[B]}{\frac{2(z-1)}{\Delta t(z+1)}}+[x_0]\right\}$$
$$-\frac{z}{z+1}\{[B]-[A][x_0]\} \qquad (6\cdot4)$$

ここで，$\frac{2(z-1)}{\Delta t(z+1)}=p$ とおけば

$$p[x]+[A][x]=\frac{2z}{\Delta t(z+1)}\left\{\frac{[B]}{p}+(x_0)\right\}$$
$$-\frac{z}{z+1}\{[B]-[A][x_0]\} \qquad (6\cdot5)$$

この式の記号解は，

$$p[x_1]+[A][x_1]=\frac{2z}{\Delta t(z+1)}\left\{\frac{[B]}{p}+[x_0]\right\} \qquad (6\cdot6)$$

$$p[x_2]+[A][x_2]=-\frac{z}{z+1}\{[B]-[A][x_0]\} \qquad (6\cdot7)$$

なる二式の解を重畳したものである．

すなわち，

$$[x]=[x_1]+[x_2] \qquad (6\cdot8)$$

(6・6) に対する解は，(2・3) と対比することによって，(4・6) を参照して

$$[x_1]=\frac{2z}{(\Delta t)(z+1)}\left\{\frac{[\alpha]}{p}+\sum_{i=1}^{n}\frac{[B_i]}{p+a_i+jb_i}\right\} \qquad (6\cdot9)$$

$p=\frac{2(z-1)}{(\Delta t)(z+1)}$ を代入して

$$[x_1(z)]=[\alpha]\frac{z}{z-1}+\sum_{i=1}^{n}\frac{[\beta_i]z}{\left(1+\frac{a_i+jb_i}{2}\Delta t\right)z-\left(1-\frac{a_i+jb_i}{2}\Delta t\right)} \qquad (6\cdot10)$$

つぎに $[x_2]$ に対する解を調べてみよう．

(2・2) において，$[X]=[x]+[x_0]$ とおいて，変数を $[x]$ から $[X]$ に変換すれば，

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d}{dt}[X]+[A][X]=[B]-[A][x_0]\\ [X]\text{ の初期値は }[0]\end{array}\right\} \qquad (6\cdot11)$$

あるいはラプラス変換して，

$$s[X]+[A][X]=\{[B]-[A][x_0]\}/s \qquad (6\cdot12)$$

$[X]$ の解が (4・6) で与えられるから

$$[x(s)]=[X(s)]-[x_0]/s$$
$$=\frac{[\alpha]-[x_0]}{s}+\sum_{i=1}^{n}\frac{[\beta_i]}{s+a_i+jb_i} \qquad (6\cdot13)$$

したがって，$\{[B]-[A][x_0]\}/s$ を $\{[B]-[A][x_0]\}$ (すなわち Impulse 関数) とした場合には，微分方程式は，

$$s[X]+[A][X]=\{[B]-[A][x_0]\} \qquad (6\cdot14)$$

となり，これの解は，

$$[X(s)]=\{[\alpha]-[x_0]\}+\sum_{i=1}^{n}\frac{[\beta_i]s}{s+a_i+jb_i} \qquad (6\cdot15)$$

となる．したがって (6・7) と (6・14) とを対比して (6・7) の解は，

$$[x_2]=-\frac{z}{z+1}\left(\{[\alpha]-[x_0]\}+\sum_{i=1}^{n}\frac{[\beta_i]p}{p+a_i+jb_i}\right) \qquad (6\cdot16)$$

$p=\frac{2(z-1)}{(\Delta t)(z+1)}$ を代入して

$$[x_2(z)]=-\frac{z}{z+1}\left(\{[\alpha]-[x_0]\}+\sum_{i=1}^{n}\frac{[\beta_i]\cdot[z-1]}{\left(1+\frac{a_i+jb_i}{2}\Delta t\right)z-\left(1-\frac{x_i+jb_i}{2}\Delta t\right)}\right) \qquad (6\cdot17)$$

かくて，

$$[x]=[x_1]+[x_2]$$
$$=[\alpha]\frac{z}{z-1}+\sum_{i=1}^{n}\frac{[\beta_i]z}{\left(1+\frac{a_i+jb_i}{2}\Delta t\right)z-\left(1-\frac{a_i+jb_i}{2}\Delta t\right)}$$
$$-\frac{z}{z+1}\{[\alpha]-[x_0]\}-\frac{z}{z+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{[\beta_i][z-1]}{\left(1+\frac{a_i+jb_i}{2}\Delta t\right)-\left(1-\frac{a_i+jb_i}{2}\Delta t\right)}$$
$$=[\alpha]\frac{z}{z-1}+\sum_{i=1}^{n}\frac{z}{z+1}\frac{[\beta_i]}{\left(1+\frac{a_i+jb_i}{2}\Delta t\right)z-\left(1-\frac{a_i+jb_i}{2}\Delta t\right)}$$
$$-\frac{z}{z+1}\{[\alpha]-[x_0]\}$$
$$=[\alpha]\frac{z}{z-1}+\sum_{i=1}^{n}\frac{[\beta_i]z}{z-\left(\frac{1-\frac{a_i+jb_i}{2}\Delta t}{1+\frac{a_i+jb_i}{2}\Delta t}\right)}$$

$$-\frac{z}{z+1}\left\{[\alpha]-[x_0]+\sum_{i=1}^{n}[\beta_i]\right\} \qquad (6\cdot 18)$$

しかるに (4・5) にて $t=0$ とすれば

$$[x_0]=[\alpha]+\sum_{i=1}^{n}[\beta_i] \qquad (6\cdot 19)$$

であるから (6・18) の $\frac{z}{z+1}$ の係数は 0 となる.
したがって,

$$[x(z)]=[\alpha]\frac{z}{z-1}+\sum_{i=1}^{n}\frac{[\beta_i]z}{z-\left(\dfrac{1-\frac{a_i+jb_1}{2}\Delta t}{1+\frac{a_i+jb_i}{2}\Delta t}\right)} \qquad (6\cdot 20)$$

ここで 付-2. を参照して, 時間領域に変換すれば,

$$[x(t)]=[\alpha]+\sum_{i=1}^{n}[\beta_i]e^{-a_i' t}(\cos b_i' t-j\sin b_i' t) \qquad (6\cdot 21)$$

(6・21) と (4・5) とを対比してみると, Modified Euler 法によって,

$$\left.\begin{array}{l} a_i\to a_i' \\ b_i\to b_i' \end{array}\right\}$$ と変歪していることがわかる.

7. Runge-Kutta 法

Δx_i をうるための 4 ケの階差は次のようになる.

$$\Delta^{\rm I} x_i=(b_i-\sum a_{ij}x_j)\Delta t$$

$$\Delta^{\rm II} x_i=\left[b_i-\sum a_{ij}\left(x_j+\frac{\Delta^{\rm I} x_i}{2}\right)\right]\Delta t$$
$$=\left[\Delta^{\rm I} x_i-\frac{1}{2}(\sum a_{ij}\Delta^{\rm I} x_j)\right]\Delta t$$

$$\Delta^{\rm III} x_i=\left[b_i-\sum a_{ij}\left(x_j+\frac{\Delta^{\rm II} x_j}{2}\right)\right]\Delta t$$
$$=\Delta^{\rm I} x_i-\frac{1}{2}(\sum a_{ij}\Delta^{\rm I} x_j)\Delta t$$
$$+\frac{1}{4}(\sum\sum a_{ij}a_{jk}\Delta^{\rm I} x_k)(\Delta t)^2$$

$$\Delta^{\rm IV} x_i=[b_i-\sum a_{ij}(x_j+\Delta^{\rm III} x_i)]\Delta t$$
$$=\Delta^{\rm I} x_i-(\sum a_{ij}\Delta^{\rm I} x_j)\Delta t$$
$$+\frac{1}{2}(\sum\sum a_{ij}a_{jk}\Delta^{\rm I} x_k)(\Delta t)^2$$
$$-\frac{1}{4}(\sum\sum\sum a_{ij}a_{jk}a_{kl}\Delta^{\rm I} x_l)\Delta t^3$$

$$\therefore\ \Delta x_i=\frac{1}{6}(\Delta^{\rm I} x_i+2\Delta^{\rm II} x_i+2\Delta^{\rm III} x_i+\Delta^{\rm IV} x_i)$$
$$=\left\{l_i(\Delta t)-\frac{1}{2}(\sum a_{ij}b_j)(\Delta t)^2\right.$$
$$+\frac{1}{6}(\sum\sum a_{ij}a_jkbk)(\Delta t)^3$$
$$\left.-\frac{1}{24}(\sum\sum\sum a_{ij}a_jkaklbl)(\Delta t)^4\right\}$$
$$-\left\{(\sum a_{ij}x_j)\Delta t-\frac{1}{2}(\sum\sum a_{ij}a_{jk}x_k)(\Delta t)^2\right.$$
$$+\frac{1}{6}(\sum\sum\sum a_{ij}a_{jk}a_{kl}x_l)(\Delta t)^3$$
$$\left.-\frac{1}{24}(\sum\sum\sum\sum a_{ij}a_{jk}a_{kl}a_{lm}x_m)(\Delta t)^4\right\} \qquad (7\cdot 1)$$

これを行列の形式で表わして

$$[\Delta x]=[K][B]-[K][A][x] \qquad (7\cdot 2)$$

$$[K]=(\Delta t)[I]-\frac{1}{2}[A](\Delta t)^2$$
$$+\frac{1}{6}[A]^2\Delta t^3-\frac{1}{24}[A]^3(\Delta t)^4 \qquad (7\cdot 3)$$

$[I]$: 単位行列

ここで $[x]$ の初期値が $[x_0]$ であることに留意して, z 変換を施せば,

$$(z-1)[x]=[K][B]\frac{z}{z-1}-[K][A][x]+z[x_0] \qquad (7\cdot 4)$$

ここで $z-1=p$ とおけば,

$$p(x)+[x][A][x]=z\left\{\frac{[K][B]}{p}+[x_0]\right\} \qquad (7\cdot 5)$$

これを (2・3) と対比すれば

$$\left.\begin{array}{l} s\to p \\ [A]\to[K][A] \\ [B]\to[K][B]z \\ [x_0]\to[x_0]z \end{array}\right\}$$ と対応せしめることにより

(4・5) を参照して

$$[x]=\{[K][A]\}^{-1}[K][B]\frac{z}{p}$$
$$-z\sum_{r=1}^{n}[KA]^{-1}\left\{\prod_{s\neq r}^{s=1,-n}\frac{\alpha_s'[I]-[KA]}{\alpha_s'-\alpha_r'}\right\}$$
$$\{[KB]-[KA][x_0]\}\frac{1}{p+\alpha_r'} \qquad (7\cdot 6)$$

ここで α_r' は $[KA]$ の特有限で

$$\det\{\alpha_r'[I]-[KA]\}=0 \qquad (7\cdot 7)$$

付録-IV に示すように,

$$\alpha_r'=(\Delta t)\alpha_r-\frac{(\Delta t)^2}{2}\alpha_r^2+\frac{(\Delta t)^3}{6}\alpha_r^3-\frac{(\Delta t)^4}{24}\alpha_r^4 \qquad (7\cdot 8)$$

$$\prod_{s\neq r}^{s=1,\cdots n}\frac{\alpha_s'[I]-[KA]}{\alpha_s'-\alpha_r'}=\prod_{s\neq r}^{s=1,\cdots n}\frac{\alpha_s[I]-[A]}{\alpha_s-\alpha_r} \qquad (7\cdot 9)$$

また (7・3) よりみるように $[K]$ は $[A]$ の整多項式であるから $[K]$ と $[A]$ とは可換である. したがって (7・6) は下記のようになる.

$$[x]=[A]^{-1}[B]\frac{z}{p}-z\sum_{r=1}^{n}[A]^{-1}\prod_{s=r}^{s=1,-n}\frac{\alpha_s[I]-[A]}{\alpha_s-\alpha_r}$$
$$\{[B]-[A][x_0]\}\times\frac{1}{p+\alpha_r'} \qquad (7\cdot 10)$$

$p=z-1$ を代入して

$$[x(z)]=[\alpha]\frac{z}{z-1}+\sum_{i=1}^{n}\frac{[\beta_i]z}{z-(1-\alpha_r')} \qquad (7\cdot 11)$$

ここで 付-IV を参照して，時間領域に変換すれば，

$$[x(t)]=[\alpha]+\sum_{i=1}^{n}[\beta_i]e^{-a_i't}(\cos b_i't-j\sin b_i't) \qquad (7\cdot 12)$$

(7・12) と (4・5) とを対比してみると Runge-Kutta 法によって，

$$\left.\begin{array}{l} a_i\to a_i' \\ b_i\to b_i' \end{array}\right\}$$ と変歪していることがわかる.

8.　誤差を所定の大きさ以下におさめるための分割数

この問題を一般的に議論することは難しい．次に簡単な方程式について検討を加え，一般的な問題はその結果より推定することにする.

（1）　$\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{x}{T}=0$ を Euler 法を用いて解くときに，適切な分割数.

付-1. (a) より，時定数の誤差は

$$\varepsilon=\frac{\Delta t}{2T}$$

誤差を ε % 以下におさえるために必要な分割数は

$$\frac{1}{N}=\Delta t\leq 2T\varepsilon\times\frac{1}{100}$$

ゆえに

$$N\geq\frac{100}{2\varepsilon T}$$

$T=1$ のときの関係を第 1 図に示す.

（2）　$\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$ を Euler 法でとくときに必要な分割数.

付-1. (b) より，

発散率　$\alpha=e^{\pi\omega\Delta t}-1$

周波数誤差　$\varepsilon=\dfrac{(\omega\Delta t)^2}{3}$

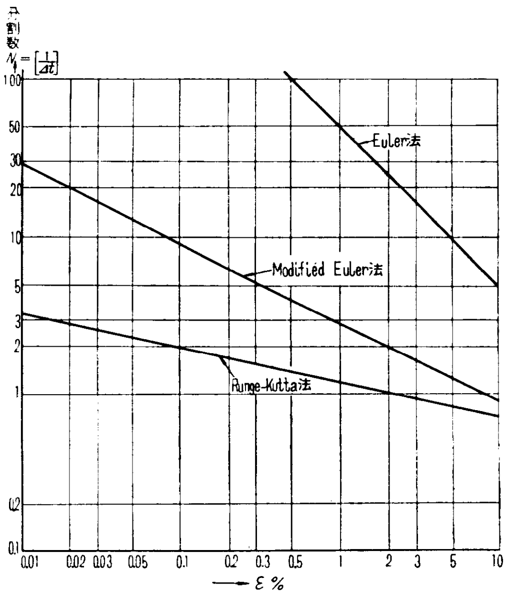
周波数誤差を ε % 以下におさえるために必要な分割数は，

$$\frac{1}{N}=\Delta t\leq\sqrt{\frac{3\varepsilon}{100}}\times\frac{1}{100}$$

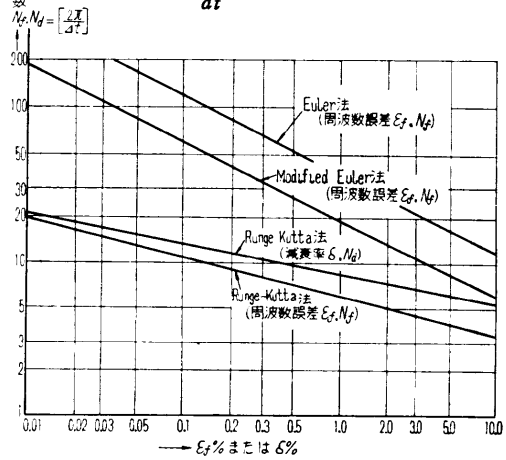
ゆえに，$N\geq\dfrac{\omega}{\sqrt{3\varepsilon}}\times 10=\dfrac{2\pi f}{\sqrt{3\varepsilon}}\times 10=\dfrac{36.3f}{\sqrt{\varepsilon}}$

$f=1$ のときの関係を第 2 図に示す.

（3）　$\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{x}{T}=0$ を Modified Euler 法で解くときに必要な分割数.



第 1 図　$\dfrac{dx}{dt}+x=1.0$ の数値計算誤差



第 2 図　$\dfrac{d^2x}{dt^2}+x=0$ の数値計算誤差

付-2. (a) より，

時定数の誤差　$\varepsilon=\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{\Delta t}{T}\right)^2$

誤差を ε % 以下におさえるために必要な分割数は

$$\frac{1}{N}=\Delta t\leq\sqrt{12\varepsilon}\,T\times 100$$

ゆえに，

$$N\geq\frac{100}{\sqrt{12\varepsilon}\,T}=28.8\,T\varepsilon$$

$T=1$ のときの関係を第 1 図に示す.

（4）　$\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$ を Modified Euler 法でとく

ときに必要な分割数.

付-2.(b) より

発散率 $\alpha=0$

周波数誤差 $\varepsilon=\frac{1}{12}(\omega\Delta t)^2$

周波数誤差を ε% 以下におさえるために必要な分割数は,

$$\frac{1}{N}=\Delta t\leq\sqrt{\frac{12\varepsilon}{100}}\times\frac{1}{\omega}$$

ゆえに,

$$N\geq\frac{\omega}{\sqrt{12\varepsilon}}\times10=\frac{2\pi f}{\sqrt{12\varepsilon}}\times10=\frac{18.2f}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$f=1$ のときの関係を第2図に示す.

(5) $\frac{dx}{dt}+\frac{x}{T}=0$ を Runge-Kutta 法で解くときに必要な分割数.

付-3 (a) より,

時定数の誤差 $\varepsilon=\frac{1}{120}\left(\frac{\Delta t}{T}\right)^4e^{\Delta t/T}$

誤差を ε% 以下におさえるために必要な分割数は,

$$\frac{1}{N}=\Delta t$$

$$Ne^{-1/4N}\geq\frac{1}{\sqrt[4]{1.2\varepsilon}\,T}=\frac{0.96}{\sqrt[4]{\varepsilon}\,T}$$

$T=1$ のときの関係を第1図に示す.

(6) $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$ を Runge-Kutta 法で解くときに必要な分割数.

付-3.(b) より,

減衰率 $d=\frac{\omega}{144}(\omega\Delta t)^5$

周波数誤差 $\varepsilon=\frac{(\omega\Delta t)^4}{120}$

減衰率を δ% 以下におさえるために必要な分割数は,

$$\frac{1}{N_d}=\Delta t\leqq\sqrt[5]{\frac{144\delta}{100\omega}}\times\frac{1}{\omega}$$

ゆえに,

$$N_d\geqq\sqrt[5]{\frac{100\omega}{144\delta}}\times\omega=\sqrt[5]{\frac{100\pi f}{72\delta}}\times2\pi f=8.4\sqrt[5]{\frac{f}{\delta}}f$$

周波数誤差を ε% 以下におさえるために必要な分割数は,

$$\frac{1}{N_f}=\Delta t\leq\sqrt[4]{\frac{120\varepsilon}{100}}\times\frac{1}{\omega}$$

ゆえに,

$$N_f\geq\frac{\omega}{\sqrt[4]{1.2\varepsilon}}=\frac{2\pi f}{\sqrt[4]{1.2\varepsilon}}=\frac{6}{\sqrt[4]{\varepsilon}}$$

$f=1$ のときの δ, N_d および ε, N_f の関係を第2図に示す.

9. むすび

定数係数線形常微分方程式の解の特性は,時定数および振動の周波数によって定まることに着目し,数値計算の誤差により,これらの量が変歪する程度を明らかにした.この結果より実際に数値計算を行う場合に必要なきざみの大きさを決定することができる.

工学上の問題では,計算精度を1% ぐらいにとれば十分な場合が多い.これに対して適切な分割数は**第1表**に示すとおりである.

第1表 時定数または周波数誤差を1% 以下に収めるための必要な時間 (Δt)

数値計算法	Δt
Modifild Euler 法	系の最小時定数の 1/5 または最小振動周期の 1/20 のいずれか小さい方
Runge Kutta 法	系の最小時定数の 1/2 または最小振動周期の 1/10 のいずれか小さい方

なお,この論文においては,打切り誤差 (Trancation error) のみについて論じ,まるめ誤差 (Round off error) については言及していない.

参考文献

1) 林: 演算子法と過渡現象,国民科学社.
2) Beckenbach: Modern Mathematics for Engineer (a book) p. 37 (1956).
3) 自動制御技術, p. 61 (1960).

〔付 録〕

1. Euler 法

$X(z)=\frac{z}{z-(1-a_i\Delta t-jb_i\Delta t)}$ を時間領域に変換した場合どのようになるかを調べてみる.

$$\left.\begin{aligned}1-a_i\Delta t-jb_i\Delta t&=e^{-(a_i'+jb_i')\Delta t}\\a_i'+jb_i'&=-\frac{1}{\Delta t}\ln(1-a_i\Delta t-jb_i\Delta t)\end{aligned}\right\}\quad(付\ 1\cdot1)$$

のごとく, a_i', b_i' を定義すれば,

$$X(z)=\frac{z}{z-(1-a_i\Delta t-jb_i\Delta t)}$$

$$=\frac{z}{z-e^{-(a_i'+jb_i')\Delta t}}\quad(付\ 1\cdot2)$$

したがって,

$$X(t)=e^{-(a_i'+jb_i')t}\quad(付\ 1\cdot3)$$

a_i', b_i' が a_i, b_i とどのくらい異るかを調べるために $a_i\neq0$, $b_i=0$; $a_1=0$, $b_i\neq0$ の場合について調べてみる.

(a) $a_i\neq0$, $b_i=0$

$$a_i'+jb_i'=-\frac{1}{\Delta t}\ln(1-a_i\Delta t)$$

$$\therefore\ a_i'=-\frac{1}{\Delta t}\ln(1-a_i\Delta t)\quad b'_i=0$$

$$\simeq a_i\left(1+\frac{a_i}{2}\Delta t\right)\qquad(付\ 1\cdot4)$$

a_i は時定数 T_i の逆数であるから，時定数について調べると，

$$T_i'=\frac{1}{a_i'}=\frac{1}{a_i\left(1+\frac{a_i}{2}\Delta t\right)}\simeq T_i\left(1-\frac{\Delta t}{2T_i}\right)\qquad(付\ 1\cdot5)$$

すなわち，時定数が真値 T_i より T_i' に変歪されたことが判る．誤差

$$\varepsilon=\frac{\Delta t}{2T_i}\qquad(付\ 1\cdot6)$$

(b)　$a_i=0,\ b_i\neq0$

$$a_i'+jb_i'=-\frac{1}{\Delta t}\ln(1-jb_i\Delta t)$$

$$\simeq-\frac{1}{2}b_i^2\Delta t+jb_i\left[1-\frac{1}{3}(b_i\Delta t)^2\right]$$

このときは，正解が e^{jb_it} であるのが，発散正弦振動

$$e^{\frac{1}{2}[b_i\Delta t]b_it}e^{jb_i[1-\frac{1}{3}(b_i\Delta t)^2]t}$$

となる．すなわち，

$$\left.\begin{array}{ll}1\ サイクル当りの発散率 & \alpha=e^{\pi(b_i\Delta t)}-1\\ 周波数誤差 & \varepsilon=\frac{1}{3}(b_i\Delta t)^2\end{array}\right\}\qquad(付\ 1\cdot7)$$

2. Modified Euler 法

$X(z)=\dfrac{z}{z-\dfrac{\left(1-\frac{a_i+jb_i}{2}\Delta t\right)}{\left(1+\frac{a_i+jb_i}{2}\Delta t\right)}}$ を時間領域に変換したときにどのようになるかを調べてみる．

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1-\frac{a_i+jb_i}{2}\Delta t}{1+\frac{a_i+jb_i}{2}\Delta t}=e^{-(a_i'+jb_i')\Delta t}\\[2ex] a_i'+jb_i'=-\dfrac{1}{\Delta t}\ln\left(\dfrac{1-\frac{a_i+jb_i}{2}\Delta t}{1+\frac{a_i+jb_i}{2}\Delta t}\right)\end{array}\right\}(付\ 2\cdot1)$$

のごとく，a_i', b_i' を定義すれば

$$X(z)=\frac{z}{z-e^{-(a_i'+jb_i')\Delta t}}\qquad(付\ 2\cdot2)$$

となる．したがって，

$$X(t)=e^{-(a_i'+jb_i')}\qquad(付\ 2\cdot3)$$

(a)　$a_i\neq0,\ b_i=0$ の場合

$$a_i'+jb_i'=-\frac{1}{\Delta t}\ln\left(\frac{1-\frac{a_i}{2}\Delta t}{1+\frac{a_i}{2}\Delta t}\right)$$

$$\therefore\ a_i'=-\frac{1}{\Delta t}\ln\left(\frac{1-\frac{a_i\Delta t}{2}}{1+\frac{a_i\Delta t}{2}}\right)b_i=0$$

$$\simeq a_i\left[1+\frac{1}{12}(a_i\Delta t)^2\right]\qquad(付\ 2\cdot4)$$

a_i は時定数 T_i の逆数であるから，時定数について調べると，

$$T'_i=\frac{1}{a_i}=\frac{1}{a_i\left[1+\frac{1}{12}(a_i\Delta t)^2\right]}$$

$$\simeq T_i\left[1-\frac{1}{12}\left(\frac{\Delta t}{T_i}\right)^2\right]\qquad(付\ 2\cdot5)$$

したがって，時定数の誤差は，

$$\varepsilon=\frac{1}{12}\left(\frac{\Delta t}{T_i}\right)^2$$

(b)　$a_i=0,\ b_i\neq0$ の場合

$$a_i'+jb_i'=-\frac{1}{\Delta t}\ln\left(\frac{1-j\frac{b_i}{2}\Delta t}{1+j\frac{b_i}{2}\Delta t}\right)$$

$$\therefore\ a_i'=0,\ b_i'=\frac{2}{\Delta t}\tan^{-1}\frac{(b_i\Delta t)}{2}$$

$$\simeq b_i\left\{1-\frac{1}{12}(b_i\Delta t)^2\right\}$$

このときは，周波数に誤差を生じ，その大きさは

$$\varepsilon=\frac{1}{12}(b_i\Delta t)^2$$

3. Runge-Kutta 法

$X(z)=\dfrac{z}{z-(1-\alpha_r')}$ を時間領域に変換したときにどのようになるかを調べてみる．

(7・8) よりみるように，$\alpha_r=a_i+jb_i$ とすれば，

$$1-\alpha_r'=\sum_{n=0}^{4}(-1)^n\frac{(a_i+jb_i)^n(\Delta t)^n}{n\,!}\qquad(付\ 3\cdot1)$$

$$e^{-(a_i'+jb_i')\Delta t}=1-\alpha'_r\qquad(付\ 3\cdot2)$$

で a_i', b_i' を定義すれば，

$$X(z)=\frac{z}{z-e^{-(a_i'+jb_i')\Delta t}}\qquad(付\ 3\cdot3)$$

したがって，

$$X(t)=e^{-(a_i'+jb_i')t}\qquad(付\ 3\cdot4)$$

(a)　$a_i\neq0,\ b_i=0$ の場合

$$e^{-(a_i'+jb_i')\Delta t}=\sum_{n=0}^{4}(-1)^n\frac{a_i^n(\Delta t)^n}{n\,!}$$

$$\simeq e^{-(a_i\Delta t)}+\frac{(a_i\Delta t)^5}{120}$$

$$\therefore\ a_i'\simeq-\frac{1}{\Delta t}\ln\left[e^{-(a_i\Delta t)}+\frac{(a_i\Delta t)^5}{120}\right]$$

$$=a_i\left(1-\frac{(a_i\Delta t)^4}{120}e^{a_i\Delta t}\right)$$

$b_i'=0$

a_i は時定数 T_i の逆数であるから，時定数について調べると，

$$T_i'=\frac{1}{a_i'}=\frac{1}{a_i\left\{1-\frac{(a_i\Delta t)^4}{120}e^{a_i\Delta t}\right\}}$$

$$\simeq T_i\left[1+\frac{1}{120}\left(\frac{\Delta t}{T_i}\right)^4 e^{\Delta t/T_i}\right] \qquad (付\ 3\cdot 5)$$

したがって，時定数の誤差は，

$$\varepsilon=\frac{1}{120}\left(\frac{\Delta t}{T_i}\right)^4 e^{\Delta t/T_i} \qquad (付\ 3\cdot 6)$$

(b)　$a_i=0$, $b_i\neq 0$ の場合

$$e^{-(a_i'+jb_i')\Delta t}=\sum_{n=0}^{4}(-1)^n\frac{(jb_i)^n}{n\,!}(\Delta t)^n$$

$$\simeq e^{-jb_i\Delta t}-\frac{(jb_i\Delta t)^5}{120}-\frac{(jb_i\Delta t)^6}{720}$$

$$=e^{-jb_i\Delta t}\left[1+\left\{\frac{(jb_i\Delta t)^5}{120}-\frac{(jb_i\Delta t)^6}{720}\right\}e^{jb_i\Delta t}\right]$$

$$\simeq e^{-jb_i\Delta t}\left[1+\frac{(jb_i\Delta t)^5}{120}+\frac{(jb_i\Delta t)^6}{144}\right]$$

$$\simeq e^{-jb_i\Delta t}e^{\frac{(jb_i\Delta t)^5}{120}+\frac{(jb_i\Delta t)^6}{144}}$$

$$=e^{-jb_i\Delta t}\left[1-\frac{(b_i\Delta t)^4}{120}-j\frac{(b_i\Delta t)^5}{144}\right]$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\ a'_i&=\frac{b_i}{144}{}^{(b_i\Delta t)^5}\\ b'_i&=b_i\left[1-\frac{(b_i\Delta t)^4}{120}\right]\end{aligned}\right\} \qquad (付\ 3\cdot 7)$$

この時は正解が e^{jb_it} であるのが，減衰正弦振動，

$$e^{-\frac{(b_i\Delta t)^5}{144}b_it}e^{jb_i\left[1-\frac{(b_i\Delta t)^4}{120}\right]t}$$

となる．すなわち，

1サイクル当りの減衰率 $d=1-e^{-\frac{(b_i\Delta t)^5}{72}\pi}$

周波数誤差　$\sum=\frac{(b_i\Delta t)^4}{120}$

4.　$\alpha_r'=(\Delta t)\alpha_r-\frac{(\Delta t)^2}{2\,!}\alpha^2{}_r+\frac{(\Delta t)^3}{3\,!}\alpha^3{}_r-\frac{(\Delta t)^4}{4\,!}\alpha^4{}_r$

の証明は α_r は $[A]$ の特有限であり，α_r' は $[KA]$ の特有限である．しかして (7・3) によって，

$$[KA]=(\Delta t)(A)-\frac{(\Delta t)^2}{2\,!}[A]^2+\frac{1}{3\,!}(\Delta t)^3[A]^3-\frac{(\Delta t)^4}{4\,!}[A]^4$$

行列の特有限に関する Frobenius の定理によれば $[A]$ の特有限を α とすれば，行列 $[A]$ の多項式 $p(A)$ の特有限は $p(\alpha)$ であるから $[KA]$ の特有限は，

$$\alpha_r'=(\Delta t)\alpha_r-\frac{(\Delta t)^2}{2\,!}\alpha^2{}_r+\frac{(\Delta t)^3}{3\,!}\alpha^3{}_r-\frac{(\Delta t)^4}{4\,!}\alpha^4{}_r$$

となる．

5.　$\prod_{s\neq r}^{s=1,\cdots n}\frac{\alpha_s'[I]-[KA]}{\alpha_s'-\alpha_r'}=\prod_{s\neq r}^{s=1,\cdots n}\frac{\alpha_s[I]-[A]}{\alpha_s-\alpha_r}$

の証明．

$$\prod_{s\neq r}^{s=1,\cdots n}\frac{\alpha_s'[I]-[K][A]}{\alpha_s'-\alpha_r'}=\prod_{s\neq r}^{s=1,\cdots n}$$

$$\frac{\sum(-1)^{n+1}\frac{\{(\Delta t)\alpha_s\}^n}{n!}-\sum(-1)^{n+1}\frac{\{(\Delta t)[A]\}^n}{n!}}{\sum(-1)^{n+1}\frac{\{(\Delta t)\alpha_s\}^n}{n\,!}-\sum(-1)^{n+1}\frac{\{(\Delta t)\alpha_r\}^n}{n\,!}}$$

$$=\left\{\prod_{s\neq r}^{s=1,\cdots n}\frac{\alpha_s[I]-[A]}{\alpha_s-\alpha_r}\right\}[\delta]$$

$$[\delta]=\prod_{s\neq r}^{s=1,\cdots n}\frac{\Delta t[I]-\frac{1}{2}\left(\alpha_s[I]+[A][\Delta t]^2\right.}{\Delta t-\frac{1}{2}(\alpha_s-\alpha_r)(\Delta t)^2}*$$

$$*\frac{+\frac{1}{6}(\alpha_s{}^2[I]+\alpha_s[A]+[A]^2)(\Delta t)^3}{+\frac{1}{6}(\alpha_s{}^2+\alpha_s\alpha_r+\alpha_r{}^2)(\Delta t)^3-\frac{1}{24}(\alpha_s{}^3+\alpha_s{}^2\alpha_r}**$$

$$**\frac{-\frac{1}{24}(\alpha_s{}^3[I]+\alpha_s{}^2[A]+\alpha_s[A]^2+[A^3])(\Delta t)^4}{+\alpha_s\alpha_r{}^2+\alpha_r{}^3)(\Delta t)^4}$$

ここで一般に，$\frac{[A]}{a}=\frac{[A]-a[I]}{a}+[I]$ なる関係を利用して $[\delta]$ を書換えると，

$$[\delta]=\prod_{s\neq r}^{s=1,\cdots n}\frac{\alpha_r[I]-[A]\left\{\frac{(\Delta t)^2}{2}-\frac{1}{6}\left((\alpha_r-\alpha_s)\right.\right.}{\Delta t-\frac{1}{2}(\alpha_s+\alpha_r)(\Delta t)^2}*$$

$$*\frac{\left.[I]+[A]\right)(\Delta t)^3+\frac{1}{24}\left((\alpha_s{}^2+\alpha_s\alpha_r+\alpha_r{}^2)[I]\right.}{+\frac{1}{6}(\alpha_s{}^2+\alpha_s\alpha_r+\alpha_r{}^2)(\Delta t)^3-\frac{1}{24}(\alpha_s{}^2+\alpha_s{}^2\alpha_r}**$$

$$**\frac{\left.\left.-(\alpha_s+\alpha_r)[A]+[A]^3\right)(\Delta t)^4\right\}}{+\alpha_s\alpha_r{}^2+\alpha_r{}^3)(\Delta t)^4}+[I]$$

したがって，

$$[\delta]=(\alpha_r[I]-[A])F([A])+[I]$$

$F([A])$ は $[A]$ に関する有限次数の多項式となることがわかる．

$$\therefore\prod_{s\neq r}^{s=1,\cdots n}\frac{\alpha_s'[I]-[KA]}{\alpha_s'-\alpha_r'}=\left\{\prod_{s\neq r}^{s=1,\cdots n}\frac{\alpha_s[I]-[A]}{\alpha_s-\alpha_r}\right\}$$

$$\{(\alpha_r[I]-[A])F([A])+[I]\}$$

$$=\{(\alpha_1[I]-[A])(\alpha_2[I]-[A])\cdots\cdots(\alpha_n[I]-[A])\cdot F([A])\}$$

$$\times\prod_{s\neq r}^{s=1,\cdots n}\frac{1}{\alpha_s-\alpha_r}+\prod_{s\neq r}^{s=1,\cdots n}\frac{\alpha_s[I]-[A]}{\alpha_s-\alpha_r}$$

ここで，α_r は $[A]$ の特有限であるから Cayley-Hamilton の定理によって，

$$(\alpha_1[I]-[A])(\alpha_2[I]-[A])\cdots\cdots(\alpha_n[I]-[A])=0$$

$$\therefore\prod_{s\neq r}^{s=1,\cdots n}\frac{\alpha_s'[I]-[KA]}{\alpha_s'-\alpha_r'}=\prod_{s\neq r}^{s=1,\cdots n}\frac{\alpha_s[I]-[A]}{\alpha_s-\alpha_r}$$