

新しい解法による輸送問題のプログラム*

高 田 勝**

まえがき

一般の輸送回路問題を解く新しい方法である伊理の方法¹⁾に従って、Hitchcock 型の輸送問題の解法をプログラムした。その概要を説明する。

1. 問題と解法の物理的意味

普通に扱われる輸送問題は Hitchcock 型が多く、次のようなものである。

“出荷能力 a_i ($i=1, 2, \dots, m$) を持つ m 個の供給地点から、受入能力 b_j ($j=1, 2, \dots, n$) を持つ n 個の消費地に物資を輸送するとき、その総費用を最小にするようにする流し方を定めること”

つまり i 点より j 点へつながった枝を通じ単位量流すときにかかる費用を d_{ij} とし、その枝を流れる量を x_{ij} とすれば

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i, \quad (i=1, 2, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j, \quad (j=1, 2, \dots, n) \\ x_{ij} &\geq 0, \quad \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \end{aligned} \right\} \quad (1 \cdot 1)$$

という条件を満たす $m \times n$ 個の変数 x_{ij} の組のうちで、

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} = P \quad (1 \cdot 2)$$

を最小にする組を求めることである。

第 1 表

	b_j	b_1	b_2	\dots	b_j	\dots	b_n
a_i		d_{i1}	d_{i2}	\dots	d_{ij}	\dots	d_{in}
a_1		d_{11}	d_{12}	\dots	d_{1j}	\dots	d_{1n}
a_2		d_{21}	d_{22}	\dots	d_{2j}	\dots	d_{2n}
\vdots		\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
a_i		d_{i1}	d_{i2}	\dots	d_{ij}	\dots	d_{in}
\vdots		\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
a_m		d_{m1}	d_{m2}	\dots	d_{mj}	\dots	d_{mn}

* Programming for Transportation Problems by a New Method, by Masaru Takata (Faculty of Engineering, University of Tokyo)

** 東京大学工学部応用物理学科

9月21日例会講演会における講演

第 2 表

	b_j	b_1	b_2	\dots	b_j	\dots	b_n
a_i		d_{i1}/x_{i1}	d_{i2}/x_{i2}	\dots	d_{ij}/x_{ij}	\dots	d_{in}/x_{in}
a_1		d_{11}/x_{11}	d_{12}/x_{12}	\dots	d_{1j}/x_{1j}	\dots	d_{1n}/x_{1n}
a_2		d_{21}/x_{21}	d_{22}/x_{22}	\dots	d_{2j}/x_{2j}	\dots	d_{2n}/x_{2n}
\vdots		\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
a_i		d_{i1}/x_{i1}	d_{i2}/x_{i2}	\dots	d_{ij}/x_{ij}	\dots	d_{in}/x_{in}
\vdots		\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
a_m		d_{m1}/x_{m1}	d_{m2}/x_{m2}	\dots	d_{mj}/x_{mj}	\dots	d_{mn}/x_{mn}

いま、この価格 d_{ij} の行列、初めの入出力の量 a_i, b_j を表記すると第 1 表、途中での流量 x_{ij} 、入出力の量 a_i, b_j を表記すると第 2 表のとおりである。

従来の解法としては主に Houthakker 法が用いられているようで、それによるときは一つの実行可能解から出発して、いろいろ流し方を変更したときの価格変動のうち、最も価格の安くなるものから置きかえて行き、置き変えるごとに価格変化を調べる。すべての価格変化がみな安くならぬ(非負)ようになったとき最適解が得られたことになる。

伊理の方法によるときは、各段階で最も価格の低い路を見出し、それに沿って流すことになり、各段階がそれまでの状態での最適解になっている。その物理的意味はおよそつぎのとおりである[†]。

Hitchcock 型の問題は回路的構造をもっているの
で、各路を価格に等しい起電力 d_{ij} を有する理想的な電池を持つある回路でおきかえて考えることができる。そうすれば単位の電流を流せば電力 d_{ij} (価格に相当)を消費するから、 x_{ij} 流せば $x_{ij} d_{ij}$ だけの電力を消費することになる。もし受入れべき量の残っている出口に相当する端子を接地し、できるだけ低い入口端子電圧の状態を保ちながら、できるだけ多くの電流を流すようにして行けば、その段階では最小の電力消費(価格)ですむ。ある量流せばそれ以上は入口電圧を高めない限り流せぬ状態になる。出口のうち受取るべき量に達したものは流入してはならぬから流れこまぬ様に電圧を上げ、入口もそれに応じて電圧を上げる。

この電圧の上げ方としては出口端子の電圧は流れこ

[†] 詳細は文献 1), 2)。

みを防ぐ最低電圧に、入口端子電圧は流しうる状態にするのに必要な最低の電圧にするようにする。そして再びできるだけ多く流す。この電圧増加の過程<V>と、電流増加の過程<C>とを交互にくりかえしてすべての入口の量を流すようにする。各枝を通じて流しうる量としては入口から出口へはその出入口の容量に応じただけの任意の量を流すことができるが、出口から入口へは、今までに流した量だけしか流せない(置きかえに相当することから明らかである)。

以上のような物理的な考えを念頭において以下計算手順をのべる。

2. 計算の手順

入口電圧 u_i 、出口電圧 u_j (双対変数に相当) の計算は、次のような試みの値 α_i, β_j から始める。

$$\left. \begin{aligned} <V-0> \quad \alpha_i = \infty, \\ \beta_j = \begin{cases} 0 & (b_j > 0 \text{ なる } j \text{ に対して}) \\ \infty & (b_j = 0 \text{ なる } j \text{ に対して}) \end{cases} \end{aligned} \right\} (2.1)$$

この意味は受取るべきものが残っている所 ($\bar{b}_j > 0$) では接地、残っていない所 ($\bar{b}_j = 0$) は流れこみがないようにまず電圧を充分高くすることに相当する。もちろん α_i も $\bar{b}_i = 0$ に対する β_j も ∞ の必要はないので、次の計算で出来るだけ低い電圧に下げる。

$$\left. \begin{aligned} <V-1> \quad \alpha_i = \min_{j=1, 2, \dots, n}^{2k+1} (d_{ij} + \beta_j)^{2k}, \\ (i=1, 2, \dots, m), \\ \beta_j = \beta_j \text{ と } \min_{i=1, 2, \dots, m}^{2k+2k} (\alpha_i + d'_{ij})^{2k+1} \\ \text{の小さい方, } (j=1, 2, \dots, n), \\ \text{ここで } d'_{ij} = \begin{cases} \infty & (x_{ij} = 0 \text{ に対して}), \\ -d_{ij} & (x_{ij} > 0 \text{ に対して})^* \end{cases} \end{aligned} \right\} (2.2)$$

この演算は高々 $m+n$ 回で収束する。これらの演算をくりかえして α_i, β_j の収束した値がそれぞれ u_i, u_j でこの状態でどの路かが流せる状態にある。そのうち $\bar{a}_i > 0$ で入口電圧の最も低いものから流せる状態の枝を通して出来るだけ多く流せば、その状態での消費電力は最小である。つまり

$$<C-0> \quad u = \min_i (u_i) \quad (\bar{a}_i > 0 \text{ に対して}) (2.3)$$

でその入口をえらぶ。以下電流増加の路さがしの段階になる。

<C-1>

(1) u の入口から第2表で水平方向に見て、入口と出口とが連絡している枝、つまり

$$u_i - u_j = d_{ij} \quad (2.4)$$

となっている枝を見つける。

(2) もしその出口が $\bar{b}_j > 0$ なら <C-2>(後述)にうつる。

(3) $\bar{b}_j = 0$ ならば、第2表で垂直方向に曲り、 $x_{ij} > 0$ なる枝を見つける*。見つければそこを水平方向に曲る。

(4) 再び水平方向に路さがしを行う。つまり(1)と同様な手順を実行する。

以上をくりかえして、入口から $\bar{b}_i > 0$ なる出口への路が見つければ、できるだけ多くの量を流す <C-2>にうつる。

<C-2>

(1) u に対応する \bar{a}_i 、垂直方向から水平方向に曲った所(枝)の x_{ij} 、出口の \bar{b}_j のうち最小のものを求める。

(2) 得られた最小量だけ流す。つまり、 \bar{a}_i 、垂直から水平に曲る所の x_{ij}, \bar{b}_j から流す量だけ減じ、水平から垂直に曲る所(枝)の x_{ij} はそれだけ増加する。そして <P>にうつる。

(3) u に対応する \bar{a}_i が残っていれば制限となった x_{ij} の最小の位置より先で路をさがす。

(4) \bar{a}_i が残っていても、その入口から流せなくなったことが判れば、同じ入口電圧 u_i をもち $a_i > 0$ であるような他の入口をさがして(1)以下の手順をふむ。

(5) その電圧状態で流せなくなったら <V-0>にうつり、今までの手順をくりかえす。

流すごとに次の <P>を行う。ここでは最小の入口電圧 u と流した最大量 ds との積をそれまでの P に加える。そのときの段階を l とすると

$$<P-0> \quad P = P_{l-1} + (u)_l (ds)_l \quad (2.5)$$

また計算終了の判定は

$$\left. \begin{aligned} <P-1> \quad \bar{a}_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m) \\ \text{または } \bar{b}_j = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} (2.6)$$

のどちらかで行う。これが満たされたときの P が最適解の費用であり、 x_{ij} がそのとき各枝を通じて流すべき量である。各ステップ毎にそれまでの最適状態を示していることは以上の説明で明らかである。

* $x_{ij} = 0$ に対して $d'_{ij} = \infty$ とするのはその枝を通じて出口から入口の方へ流れぬ(置きかえでぬ)ため、 $x_{ij} > 0$ の枝は x_{ij} だけ逆向きに流せるから、つながりがつけられる。

* このような所は必ず(2.4)が満たされている。理由は(2.2)の β_j を求める式から明らかである。(2.4)が成立しても $x_{ij} = 0$ の枝は逆向きに流せぬ故不可。

3. 例

文献 3) と同じ例題をこの方法で計算する。第 1 表に相当するものを第 3 表に示す。回路的構造をもつこ

第 3 表

	b_j	4	4	6	2	4	2	
a_i								
5		9	12	9	6	9	10	
6		7	3	7	7	5	5	
2		6	5	9	11	3	11	
9		6	8	11	2	2	10	

とを考えると、 d_{ij} の各行の要素のうち最小のもの（いま e_i とする）をその各行から引去り（同一入口から出ている枝の電位を下げることに相当）、さらに各列からも同じ操作を行う（同一出口に来る枝の電位を下げる）と 0 の要素が増えて以後の計算が便利になるので、この操作を行うと第 4 表を得る。物理的意味から、

第 4 表

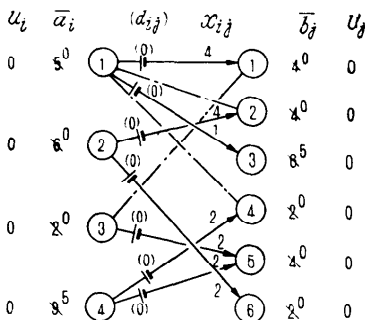
	\bar{b}_j	4	4	6	2	4	2	
\bar{a}_i								
5		0	6	0	0	3	2	0
6		1	0	1	4	2	0	0
2		0	2	3	8	0	6	0
9		1	8	6	0	0	8	0
$u_j = \beta$		0	0	0	0	0	0	$P=106$

この操作をほどこした結果について得られる価格に

$$\sum_i a_i e_i + \sum_j b_j e_j = 72 + 34 = 106$$

を加えればよいことは明瞭である。

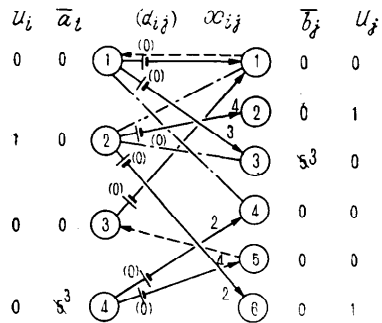
この表で (2・1) からはじめて (2・2) の演算をほどこすと β, \bar{a} で収束する。ここでつながりのある ((2・4) を満足する) 枝に相当する要素に○印をつけて流す。その時の状態を図示すると第 1 図となる。流した結果について再び (2・1) からはじめて u_i, u_j を



求めてできるだけ多く流すと第 5 表を得る。その時の枝の状態は第 2 図である、以下同様にして第 6, 7 表に

第 5 表

	\bar{b}_j	0	0	6	0	0	0	
\bar{a}_i								
0		0	6	0	0	3	2	0
0		1	0	1	4	2	0	0
0		0	2	3	8	0	6	0
5		1	8	6	0	0	8	0
$u_j = \beta$		∞	∞	0	∞	∞	∞	$P=106$
$u_j = \beta$		0	1	0	6	6	1	
$u_j = \beta$		0	1	0	1	0	1	
$u_j = \beta$		0	1	0	0	0	1	



第 2 図

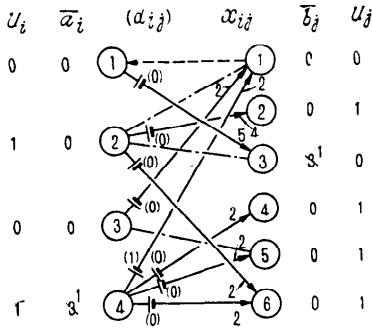
第 6 表

	\bar{b}_j	0	0	1	0	0	0	
\bar{a}_i								
0		0	6	0	0	3	2	0
0		1	0	1	4	2	0	0
0		0	2	3	8	0	6	0
1		1	8	6	0	0	8	0
$u_j = \beta$		∞	∞	0	∞	∞	∞	$P=108+4=112$
$u_j = \beta$		3	1	0	6	6	1	
$u_j = \beta$		3	1	0	4	4	1	

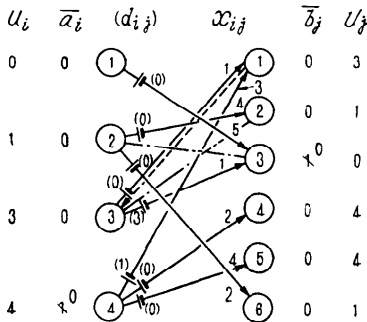
第 7 表

	\bar{b}_j	0	0	3	0	0	0	
\bar{a}_i								
0		0	6	0	0	3	2	0
0		1	0	1	4	2	0	0
0		0	2	3	8	0	6	0
3		1	8	6	0	0	8	0
$u_j = \beta$		∞	∞	0	∞	∞	∞	$P=106+2=108$
$u_j = \beta$		0	1	0	6	6	1	
$u_j = \beta$		0	1	0	1	1	1	

対しそれぞれ第 3, 4 図を得、最終結果は第 8 表に示す。図中実線は実際に流した枝、鎖線はつながりのあ



第3図



第4図

第8表

$\bar{a}_i \backslash b_j$	0	0	0	0	0	0	0
0	0	6	0/5	0	3	2	
0	1	0/4	1	4	2	0/2	
0	0/1	2	3/1	8	0	6	
0	1/3	6	6	0/2	0/4	6	
$P=112$							

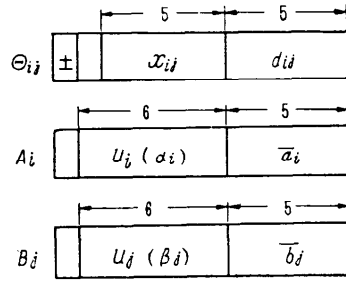
る枝、点線は逆に流した時の枝を示す。 u_i, u_j ともに次第に上ることに注意。費用は $P=6$ と出るから全体で $P=106+6=112$ となる。

4. プログラム

用いた機械は JEIDAC-101 (NEAC 2203) で磁気ドラム 2000 語の記憶容量を持つ。1 語 12 桁で、符号と 10 進法 11 桁の数値か、あるいは二つの命令を入れる。演算速度は加減に 3.2 ms, 平均待時間 3 ms である。

必要なデータは価格 d_{ij} と入口流量 a_i , 出口流量 b_j である。これらを各々 5 桁以内の数値に制限してテープに穿孔する。記憶装置内部では、 d_{ij} は x_{ij} と、 a_i, b_j はそれぞれ対応する双対変数 $u_i(\alpha_i), u_j(\beta_j)$ と組になって 1 語を形成するようにし、それらをそれ

ぞれ θ_{ij}, A_i, B_j とする (第 5 図)。計算の流れ図は第 6 図に示したが、以下にそのあらましを説明する。



第5図 1語の使用区分

まず読みルーチンを入れ、これにより d_{ij}, a_i, b_j をこの順に読みこんで $x_{ij}=0, \alpha_i=\infty, \beta_j=0$ とする (流れ図第 1 列)。このとき A_i, B_j の格納開始番地をプリセットパラメーターとして記憶し以下の各ルーチンの読みこみに使う。このすぐ後に、 d_{ij} を修正するルーチンを入れて d_{ij} の行列の要素に 0 を多くし、 P の補正值を求めておく (この部の流れ図は省略)。

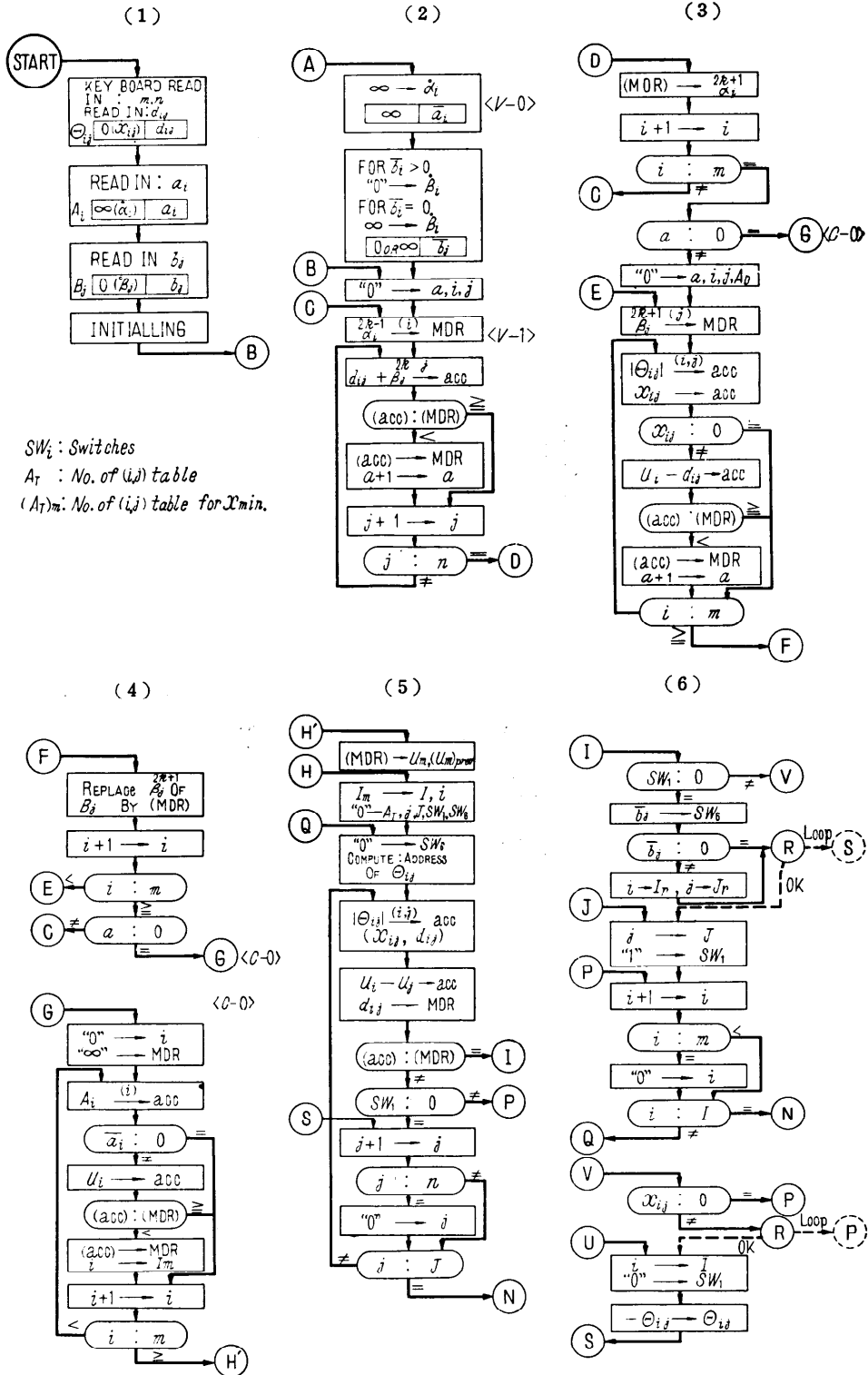
その後 $\langle V \rangle, \langle C \rangle$ の計算ルーチンを入れて計算がはじまる。流れ図の第 2, 3 列および第 4 列の前半は $\langle V \rangle$ の計算過程で、(2・1), (2・2) の部分が行われる。図中 a は収束判定用の値で α_i あるいは β_j に置換が行われるごとに 1 を加えておく。(2・2) のどちらかの計算が終わるごとに $a=0$ か否かを調べる。 $a=0$ ならば α_i, β_j が各々 u_i, u_j に収束したことになる。 $\langle C-0 \rangle$ につづる。

第 4 列の後半は u_i の最小値 u を出す (2・3) の演算である。この時の i の値を I_m に入れておく。 i, j は各々 Ind. 1, Ind. 2 に入れ、Ind. 3 は場合に応じ各種のスイッチに用いる。

第 5 列は $\langle C-1 \rangle$ の路さがしで、水平方向、垂直方向ともに同じ場合を用いるので、その区別は $SW_1 (=0$ のとき水平、 $\neq 0$ のとき垂直方向)で行う。垂直方向で、 $\bar{b}_j > 0$ か否かは $SW_0 (= \bar{b}_j)$ による。第 6 列のはじめの部分は、第 5 列で $u_i - u_j = d_{ij}$ となった場合について水平、垂直、 $\bar{b}_j > 0, \bar{b}_j = 0$ の選別をする。 $\bar{b}_j > 0$ の場合以外はその路が今までに既に通った路でないか否かを調べる (Ⓢ, 第 7 列前半*)。もし路がなくてピボットになった点まで戻ったとすれば、その点を曲ることを止めて他にピボットになる点をさがす。

* 路の記憶にはピボットになった点 (i, j) を書きこんで作ったテーブルによる。1 語に 2 個入れその番号を A_r で示す。

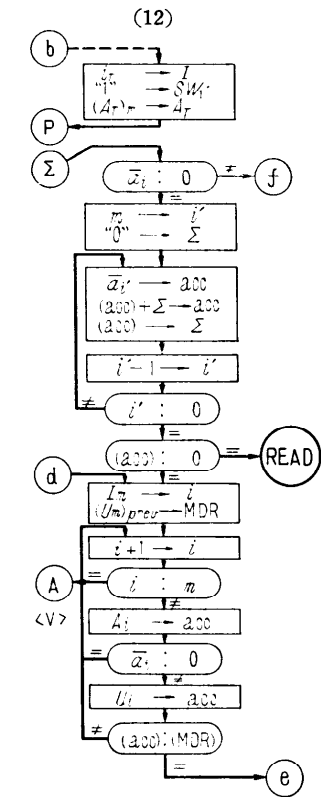
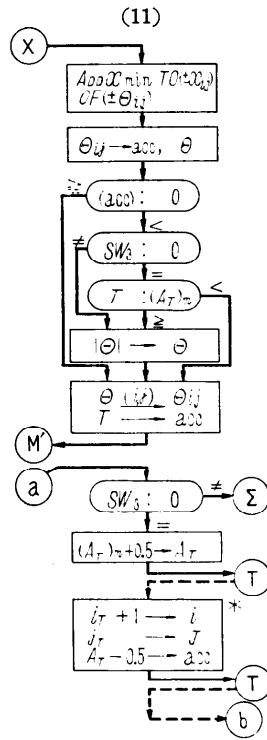
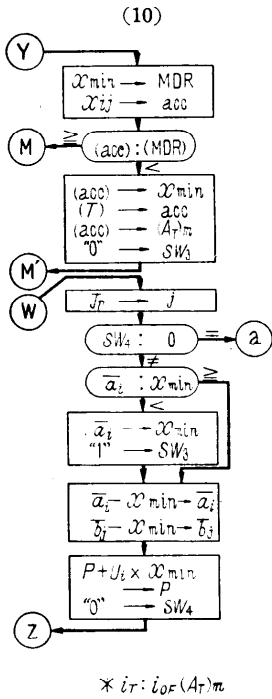
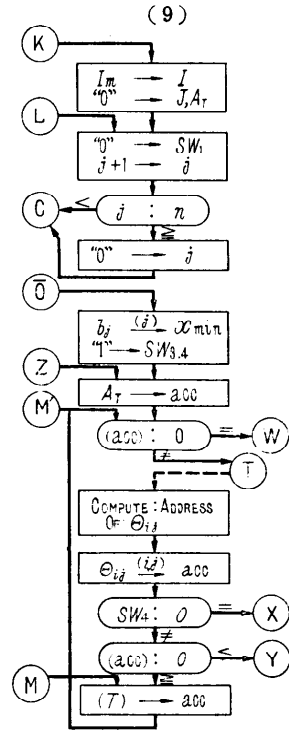
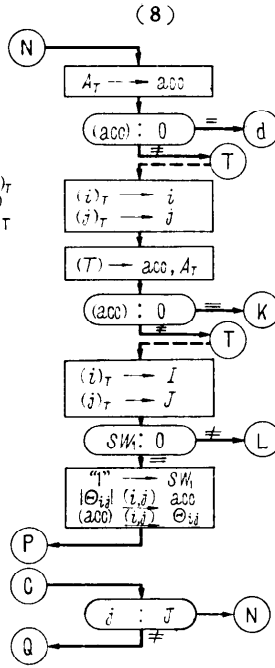
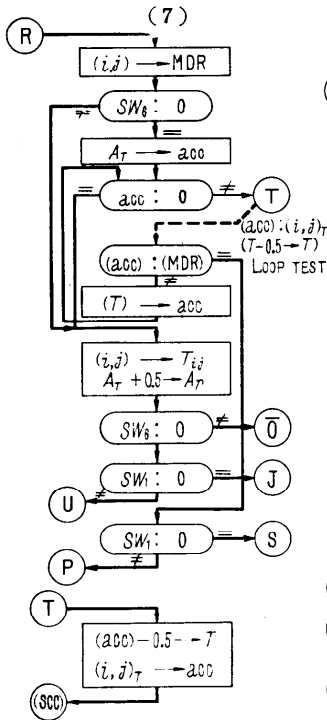
第 6 図 流れ 図

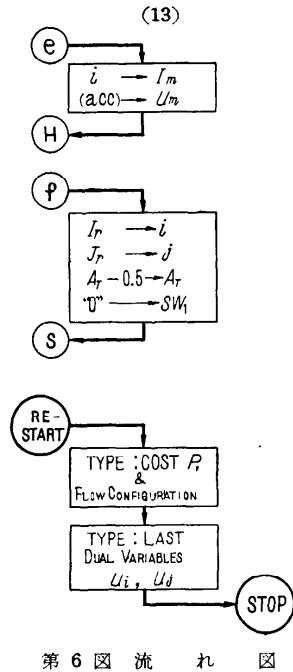


SW_i : Switches

A_r : No. of (i, j) table

$(A_r)_m$: No. of (i, j) table for X_{min} .





第 6 図 流 れ 図

これを第 8 列および第 9 列前半の ㊸ のルーチンで行う。

もし $x_{ij} > 0$ の所で垂直方向から水平方向に曲るピボットがあれば、 θ_{ij} に負号をつけておく (第 6 列後半)。 $\bar{b}_j > 0$ なる出口が見つかったら \bar{b}_j を SW_0 に入れて ㊹ (第 9 列後半) にうつる。それ以下では今までどって来たピボットの θ_{ij} を引出して、 x_{ij} の最小値が問題になる点 (垂直から水平に曲った所、 $\theta_{ij} < 0$ にしておいたもの) をさがし、もしあればそのときの (i, j) の入っているテーブル番号 A_T を $(A_T)_m$ に入れておき、 SW_0 を 0 にする (第 10 列前半)。一応 x_{min} をさがし出したならばそれだけの量を流して、関係のある $\bar{a}_i, \bar{b}_j, x_{ij}$ を修正し、電力 (費用) P を加算しておく (㊸ 以下の第 10 列後半, 第 11 列前半)。なお SW_i は θ_{ij} を出してくる演算を 2 カ所で共用するので、その区別のためのものである。

流し終ると、第 11 列後半 ㊺ にうつり、隘路になった x_{ij} があるか否かを見る ($SW_0 = 0$ による)。あればそのピボットから先に路を見つける。もし隘路がなければ第 12 列 Σ に移り、今の入口の量 \bar{a}_i にのりがあるか否かを見る。あれば ㊻ (第 13 列) に移り、再び路をさがす。 $\bar{a}_i = 0$ ならば他の入口流量の合計が零か否かを調べ、0 ならば計算終了であるからタイプ

ルーチンを読みこみ結果を出す。残りがあるならば u に等しい u_i のもので $\bar{a}_i > 0$ のものがあるか否かを調べる。あればその入口から再び路を見つけて流す。なければ $\langle V-0 \rangle$ にもどる (第 12 列後半)。

以上がプログラムのあらましである。結果としては費用と x_{ij} の値の行列を印刷し、さらに最終段階での流量、その入口、双対変数 u_i, u_j を印刷するようにしてある。

5. 結 果

このプログラムで可能な問題は $m \times n + m + n \leq 1660$ という制限以内であればよい。テープ読込には全部で約 1 分かかる。計算時間は $m = n = 10$ の一つの例に対して、 d_{ij} の修正に 15 秒、計算に 9 分 35 秒を要し、結果のタイプに約 2 分を要した。この計算時間の大部分は $\langle V \rangle$ つまり双対変数の計算であった。初期で 25~30 秒、次第に長くなり 40~50 秒程度、おしまい近くの u_i, u_j は共に 4 回の反復を行っている。 $\langle V \rangle$ ステップの演算を全体で 11~12 回行って、これに比べて $\langle C \rangle$ ステップの演算時間は短く、おしまいだけが少し長かった。はじめは $\langle V \rangle$ の時間があまり長くないものと予想して $\langle C \rangle$ を 1 回終るごとに直ちに $\langle V \rangle$ に移るようプログラムしていたので、同じ問題に演算時間だけで 12 分 50 秒かかっていた。それでプログラムをここにのべたように修正したのであるが、このようにデータを逐次に拾って来る演算に時間がかかるのは、この程度のドラム式のものでは致し方ないことかも知れない。

問題は Houthakker 法との優劣であるが、同じ機械でプログラムされていないし、同じ程度の機械でやった例を寡聞にして知らないので残念ながら比較できない。ただ Whirlwind という機械でやった例はあるが、その機械の速度、問題の大きさからいって直接の比較は困難である。しかし原理上この方法が能率的な筈である。

6. あとがき

以上伊理の方法による輸送問題のプログラムについて述べた。彼の方法は枝に容量制限のある極く一般の場合にも適用できるものであるが、ここでは Hitchcock 型に限った。輸送問題の特殊化された場合である割当問題にも用いることができプログラムもかなり複雑である。知的水準の高い方法であるだけに流れ図に念を入れたが、完成までにはかなりの手数を要した。

なお Houthakker 法との優劣を論じてもらえれば幸いです。

参考文献

- 1) 伊理正夫: 経営科学, 3, 4 (1960) pp.190-206.
M. Iri: Fundamentals of the Algebraic and Topological Treatments of General Information Networks, 応用幾何学研究協会, Research Notes No. 30, (1960).
- 2) 高田: オペレーションズリサーチ誌, 3, 1 (1960), p. 3-9.
- 3) M. Sasieni 他: オペレーションズリサーチ手法と例題 (森口繁一監訳) (紀伊国屋, 1960) pp. 249-273.
- 4) J. B. Dennis: Journ. of A.C.M., 5, 2 (1958), pp. 132-153.

2元シフトレジスタ系列を利用した組織符号系について*

嵩 忠 雄**

要 約

一つの誤りが訂正可能ならば、同時にその誤りの数字の位置を循環的にシフトして得るすべての誤りも訂正可能となる組織符号の必要充分条件を求め、2元シフトレジスタ系列を使った符号化、復号化法を示した。このタイプの符号は、機構化が単純で、かつ独立でない誤りの場合に便利な性質を持っている。このタイプの三つの符号例(その一つは符号長 23, $d=7$ の無駄のない組織符号†)とその機構化の一例を示した。またこの型を含み、符号全体として桁のシフトに不変な性質をもつ二つの型の符号系も統一的に取扱い、2元シフトレジスタ系列を直接利用する組織符号としてはほぼこれらの型の符号系でつくされることを示した。

1. ま え が き

組織符号系の群符号としての一般的な性質は、喜安¹⁾、Slepian²⁾によって示され、また Slepian, Fountain と Peterson³⁾ はかなりの範囲にわたって独立な誤りに対する最良な組織符号系を計算機を使って求めている。しかし符号器、復号器の機構の単純な符号系

を求めることは一つの問題である。符号の問題に2元シフトレジスタ系列を利用することについては Huffman⁴⁾ の考察があり、また Green-SanSoucie⁵⁾ の符号系でも利用されている。

2元シフトレジスタ系列を利用した符号系の一つの特徴は機構化が単純なことであるが、他にも著しい特色をもっている。比較的最近に、いわゆる“bursts”に対する符号系が Abramson⁶⁾、Fire⁷⁾、Reiger⁸⁾、Melas⁹⁾ 等により得られているが、これらは最大長系列およびその組合せを利用している。

“bursts”に対する符号系では必然的に、高能率の符号長 n と情報点の桁数 k の組合せはごく限られ、一部を除いて n が大きくなる^{8,9)}。また誤りが独立でない場合でも、ある一定の長さ以内の誤りが他のすべての誤りより確率が大きいという仮定、たとえば連続4桁の誤りが、中3桁おいた2個の誤りより起りやすいという仮定は必ずしも実状に合わぬ。

一方独立でない誤りに対する符号系を一般的に考えるとき、個々の誤りを正直に対象として取扱うのは、数学的にかなり厄介な問題となる¹⁰⁾*。したがって一つの中間的で実際的な方法として、個々の誤りを別々に取扱わずに誤りの桁の相対的な位置関係が同一である誤り(これを同じパタンに属すると呼ぶことにする。

* Systematic Codes Using Binary Shift Register Sequences, by Tadao Kosami (Faculty of Engineering, Osaka University)

** (大阪大学工学部)

† Golay の符号。このタイプであれば機構化が単純化される。

* 文献¹⁰⁾では個々の誤り自体をパタンと呼んでいる。