情報処理学会研究報告
IPSJ SIG Technical Report
Vol.2013-AL-144 No.19
2013/5/18

安定結婚問題における最大最適選好マッチングの頂点集合の一意性

平川 瑞樹[1,a)] 山内 由紀子[1,b)] 来嶋 秀治[1,c)] 山下 雅史[1,d)]

概要：本稿では安定結婚問題における最適選好マッチングの解構造ついて考える．安定結婚問題の入力は，男性集合と女性集合および各人の選好順序からなる．本稿では，男性の人数と女性の人数が異なる場合を許し，選好順序は全順序制約を満たす不完全リストとする．最適選好マッチングとは，あるマッチング M よりも多くの人々に好まれるマッチング M' が存在しないようなマッチング M のことであり，安定マッチングの緩和概念として知られる．本稿では，特に最適選好マッチングのサイズに着目した議論を行う．具体的には，最大最適選好マッチングを構成する男女はマッチングによらず一意であることを示す．また最適選好マッチングを構成する頂点集合の包含関係に関する半順序構造について考察する．

1. はじめに

安定結婚問題 [1] の入力は無向二部グラフ $G = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}, E)$ によって与えられる．頂点集合は男性集合 $\mathcal{A}$ と女性集合 $\mathcal{B}$ の和集合からなり，各人は異性に対する選好順序をもつ．本研究での選好順序は，男性の人数と女性の人数が異なる場合を許し，全順序制約を満たす不完全リストとする．ただし，男性 $a \in \mathcal{A}$ が女性 $b \in \mathcal{B}$ を選好順序にもつとき，かつそのときに限り，女性 b も男性 a を選好順序にもつと仮定し，$(a, b) \in E$ とする．

このとき，男性 $a \in \mathcal{A}$ と女性 $b \in \mathcal{B}$ の頂点の対からなる枝 $(a, b) \in E$ のことを**ペア**とよぶ．どの頂点も 1 つより多くのペアに属さないとき，それらのペアの集合 $M \subseteq E$ を**マッチング**という．あるマッチング M において，頂点 $u \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ がペアに属しているとき，u の M でのペアの相手を $M(u)$ と表す．マッチング M において，男性 $a' \in \mathcal{A}$ が M でペアを構成していないか $M(a')$ よりも b' を好むとき，かつ，$b' \in \mathcal{B}$ が M でペアを構成していないか $M(b')$ よりも a' を好むとき，ペア $(a', b') \in E \setminus M$ のことをマッチング M における**ブロッキングペア**とよぶ．マッチング M においてブロッキングペアが存在しないとき，M を**安定マッチング**という [1]．本稿のように入力の制約を設けるとき，任意の入力において安定マッチングは必ず存在することが [5] によって知られている．またそのようなマッチングは Gale-Shapley アルゴリズム [1] の一般化 [3] によって線形時間で出力される．

異なる 2 つのマッチング M と M' において，頂点 u が M' での状況よりも M での状況の方を好むとき (u が M' ではペアに属していないが M ではペアに属しているとき，あるいは，いずれのマッチングでもペアに属しているが $M'(u)$ よりも $M(u)$ の方を好むとき)，「頂点 u はマッチング M' よりも M を好む」と表現する．ここで，マッチング M' よりも M を好む頂点数を $\phi(M, M')$ と表す．$\phi(M, M') > \phi(M', M)$ が成り立つとき，「マッチング M は M' よりも人気である」という．マッチング M よりも人気のあるマッチング M' が存在しないとき，M を**最適選好マッチング**という [2]．すなわち，最適選好マッチング M は任意の M' に対して $\phi(M, M') \geq \phi(M', M)$ を満たす．

最適選好マッチングは Gärdenfors[2] によって考案された安定マッチングの緩和概念であり，安定マッチングは必ず最適選好マッチングとなる．本稿での入力の制約において，安定マッチングは必ず存在するので，最適選好マッチングの存在性も保障される．ただし，最適選好マッチングが安定マッチングになるとは限らない．

既存の研究では，安定マッチングを構成する頂点集合 $U_{\min} \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ はマッチングによらず一意であることが知られている [3]．また，任意の最適選好マッチングの頂点集合は $U_{\min}$ を部分集合にもつことが知られている [4]．よって，安定マッチングは最小最適選好マッチングとなり，ペアに属すことができる人数が最も少ないという点ではあまり望ましいマッチングではない．

1 九州大学
Kyushu University, Japan
a) hirakawa@tcslab.csce.kyushu-u.ac.jp
b) yamauchi@inf.kyushu-u.ac.jp
c) kijima@inf.kyushu-u.ac.jp
d) mak@inf.kyushu-u.ac.jp

それに対し，最大最適選好マッチングはペアに属することができる人数が最も多くなる点で期待されるマッチングである．Huang と Kavitha[4] は，最適選好マッチングの必要十分条件と最大最適選好マッチングの十分条件（本稿の2節で紹介）を与え，最大最適選好マッチングを多項式時間で出力するアルゴリズムを提案している．しかし，最大最適選好マッチングの頂点集合に関する性質はよく知られていなかった．

最大最適選好マッチングの頂点集合 $U_{\max} \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ はマッチングによらず一意であり，任意の最適選好マッチングの頂点集合は $U_{\max}$ の部分集合によって構成されることを本稿の3節で示す．

2. 最適選好マッチングの特徴づけ

本節では，Huang と Kavitha[4] による最適選好マッチングや最大最適選好マッチングの特徴付けを紹介する．3節に示す定理の証明にこれらの特徴付けを用いる．

頂点 $u \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ とその選好順序に含まれている頂点 x と y において，関数 $\mathrm{vote}_u(x, y)$ を

$$\mathrm{vote}_u(x,y) = \begin{cases} 1 & (\text{if } u \text{ prefers } x \text{ to } y), \\ -1 & (\text{if } u \text{ prefers } y \text{ to } x), \\ 0 & (\text{otherwise (i.e., } x = y)) \end{cases}$$

と定める [4]．

グラフ G における任意のマッチングを M とする．このとき，各枝 $e = (u, v) \in E \setminus M$ に対して $\alpha_e = \mathrm{vote}_u(v, M(u))$ と $\beta_e = \mathrm{vote}_v(u, M(v))$ を値とするラベル (α_e, β_e) を付ける．また2つのマッチング M, M' に対して関数 $\mathrm{vote}_u(M'(u), M(u))$ を適用するとき，頂点 u がマッチング M を好むときには $\mathrm{vote}_u(M'(u), M(u)) = -1$ という値を示し，マッチング M' を好むときには $\mathrm{vote}_u(M'(u), M(u)) = 1$ という値を示すとする．

グラフ G におけるマッチング M にラベルが $(\alpha_e, \beta_e) = (1, 1)$ である枝 $e \in E \setminus M$ が存在するとき，枝 e はマッチング M におけるブロッキングペアである．

異なる2つのマッチング M, M' における排他的論理和 $M \oplus M'$ 中の各連結成分は，M に属す枝（M' に属さない枝）と M に属さない枝（M' に属す枝）が交互に繋がる交互道または交互閉路となる．

Case 1. $M \oplus M'$ 中の連結成分 ρ が交互閉路または両端の枝がマッチング M に属さない交互道のとき，ρ におけるラベルの値の合計は，$\sum_{u \in \rho} \mathrm{vote}_u(M'(u), M(u)) = \sum_{e=(u,v) \in \rho \cap M'} (\alpha_e + \beta_e)$ と計算される．

Case 2. ρ が片端の枝が M に属す交互道のとき，M' ではペアを組めていないが M ではペアを組めている頂点がただ1つ存在し，その頂点は M での状況を好むので，$\sum_{u \in \rho} \mathrm{vote}_u(M'(u), M(u)) = -1 + \sum_{e=(u,v) \in \rho \cap M'} (\alpha_e + \beta_e)$ と計算される．

Case 3. ρ が両端の枝が M に属す交互道のとき，M' ではペアを組めていないが M ではペアを組めている頂点が2つ存在するので，$\sum_{u \in \rho} \mathrm{vote}_u(M'(u), M(u)) = -2 + \sum_{e=(u,v) \in \rho \cap M'} (\alpha_e + \beta_e)$ と計算される．

$\phi(M', M) - \phi(M, M') = \sum_\rho \sum_{u \in \rho} \mathrm{vote}_u(M'(u), M(u))$ となるので，$\sum_\rho \sum_{u \in \rho} \mathrm{vote}_u(M'(u), M(u)) \le 0$ が成り立つときに $\phi(M, M') \ge \phi(M', M)$ となる．

またマッチング M に対して，M に属す／属さないという立場の枝を交互に繋いで得られる連結成分のことを，M に関する交互道／閉路とよぶ．さらに，両端の枝がマッチング M に属さないような M に関する交互道 p のことを，M に関する増加道という．

最適選好マッチングの必要十分条件

グラフ $G = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}, E)$ におけるマッチング M に関してラベル付けを行い，ラベルが $(\alpha_e, \beta_e) = (-1, -1)$ である枝 $e \in E \setminus M$ を G から全て取り除いた部分グラフを G_M とする．

定理 1. *[4]* マッチング M に関するグラフ G_M において以下の条件 *(i)-(iii)* を全て満たすとき，かつそのときに限り，M は最適選好マッチングである．

(i) ラベルが $(1, 1)$ である枝を含むような M に関する交互閉路が存在しない．

(ii) M に属さない枝で始まり，ラベルが $(1, 1)$ である枝を含むような M に関する交互道が存在しない．

(iii) ラベルが $(1, 1)$ である枝を *2* つ以上含むような M に関する交互道が存在しない．

安定マッチングにはブロッキングペアが存在しないため，ラベルが $(1, 1)$ である枝は存在しない．また最適選好マッチング M において，条件 (ii) と (iii) からわかるように，両端の枝が M に属す交互道にはラベルが $(1, 1)$ である枝は高々1つ許されている．

最大最適選好マッチングの十分条件

定理 2. *[4]* 最適選好マッチング M が次の条件 *(iv)* を満たすとき，M は最大最適選好マッチングである．

(iv) グラフ G_M において，M に関する増加道が存在しない．

安定結婚問題において条件 (iv) を満たすような最大最適選好マッチングを線形時間で出力するアルゴリズムが [4] で提案されている．このアルゴリズムは，任意の安定結婚問題において条件 (iv) を満たすような最大最適選好マッチングの1つを必ず出力するので，次の定理が成り立つ．

定理 3. *[4]* 任意の安定結婚問題の入力において，条件 *(iv)* を満たす最大最適選好マッチングは *1* つ以上存在する．

3. 主定理

2節で示した特徴づけによって，次に示す定理4を得ることができる．

定理 4. 任意の安定結婚問題の入力 $G = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}, E)$ に対し，

ある最大最適選好マッチングの頂点集合を $U_{\max} \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ とする．このとき，任意の最適選好マッチングの端点集合は $U_{\max}$ の部分集合となる．

証明は後述する．定理 4 が導かれると，その特殊な場合として次の系 5 が直ちに導かれる．

系 5. 任意の安定結婚問題の入力 $G = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}, E)$ に対し，最大最適選好マッチングの頂点集合 $U_{\max} \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ はマッチングによらず一意である．

定理 4 の証明には，次の補題 6 と 7 を用いる．

補題 6. 最適選好マッチングの任意の対 M, M' に対し，$M \oplus M'$ の連結成分中には M に属す枝で始まり M' に属す枝で終わる交互道 p は存在しない．

Proof. 背理法で示す．$M \oplus M'$ の連結成分中に，M に属す枝で始まり M' に属す枝で終わる交互道 p が存在すると仮定する．交互道 p は奇数個の頂点によって構成されるので $\sum_{u \in p} \mathrm{vote}_u(M'(u), M(u)) \neq 0$ となる．さらに，M は最適選好マッチングなので $\sum_{u \in p} \mathrm{vote}_u(M'(u), M(u)) \leq -1$ である．よって，マッチング $M' \oplus p$ は M' より人気のあるマッチングとなり，M' が最適選好マッチングであることに矛盾する． □

補題 7. 最適選好マッチングの任意の対 M, M' に対し，$M \oplus M'$ の連結成分中に M に関する増加道が存在するとき，その増加道を p とする．このとき，増加道 p はラベルが $(1, 1)$ である枝，および $(-1, -1)$ である枝を含まない．

Proof. M, M' はともに最適選好マッチングなので，$\sum_{u \in p} \mathrm{vote}_u(M'(u), M(u)) = 0$ である．よって，M に関する増加道 p の中に存在するラベルが $(1, 1)$ である枝の本数とラベルが $(-1, -1)$ である枝の本数は一致する．このとき，ラベルが $(-1, -1)$ である枝が $t (t > 0)$ 本存在すると仮定する．

グラフ G_M を構成するとき，増加道 p では $(-1, -1)$ の枝が削除され，新たな部分連結成分 $p_1, p_2, ..., p_{t+1}$ に分割される．p_1, p_{t+1} は M に属さない枝を片端に持つ交互道なので，M に関する最適選好マッチングの条件 (ii) より，p_1, p_{t+1} にラベルが $(1, 1)$ である枝はそれぞれ存在しない．また M に関する最適選好マッチングの条件 (iii) より，$p_2, ..., p_t$ にはラベルが $(1, 1)$ である枝はそれぞれ高々 1 本のみ存在する．よって，

$$\sum_{u \in p} \mathrm{vote}_u(M'(u), M(u)) \leq 2(t-1) - 2t = -2$$

となり，$\sum_{u \in p} \mathrm{vote}_u(M'(u), M(u)) = 0$ に矛盾する．すなわち，ラベルが $(-1, -1)$ である枝は M に関する増加道 p の中に存在せず，また，本数の等しいラベルが $(1, 1)$ である枝も存在しない． □

定理 4 の証明. 背理法で示す．定理 3 より，マッチング M を条件 (iv) を満たす最大最適選好マッチングとし，その端点集合を $U_{\max} \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ とする．また，任意の最適選好マッチングを M' とし，その端点集合を U' とする．このとき，$U' \not\subseteq U_{\max}$ と仮定する．

$U' \not\subseteq U_{\max}$ より，マッチング M' ではペアに属しているが M ではペアに属していない頂点 $v \in U' \setminus U_{\max}$ が存在する．よって，$M \oplus M'$ の連結成分中には頂点 v_0 を端点とする交互道 p が存在する．補題 6 より，交互道 p はグラフ G における M に関する増加道である．補題 7 より，グラフ G における M に関する増加道 p にはラベルが $(-1, -1)$ である枝は存在しない．よってグラフ G_M において，増加道 p は部分連結成分に分割されることなくそのまま存在し，M は最適選好マッチングの条件 (iv) を満たさない．これは M が条件 (iv) を満たす最大最適選好マッチングであることに矛盾する． □

既存の研究より，安定マッチングを構成する頂点集合 $U_{\min} \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ はマッチングによらず一意であり [3]，任意の最適選好マッチングの頂点集合は $U_{\min}$ を部分集合にもつ [4]．よって，これらの事実と本稿の定理 4 と系 5 を合わせて，次に示す定理 8 を得ることができる．

定理 8. 安定結婚問題の任意の入力に存在する全ての最適選好マッチングを構成する頂点集合からなる集合族は，唯一の最大元 $U_{\max}$ と最小元 $U_{\min}$ をもつ．

定理 8 は，最大（または最小）最適選好マッチングを構成する頂点集合は一意であることを表している．しかし，サイズが最大（または最小）でない場合にはこの性質は必ずしも成り立たない．その簡単な例を表 1 に示す．表 1 には，サイズが 2 である安定マッチング（最小最適選好マッチング）$S = \{(a_2, b_1), (a_4, b_3)\}$ と，サイズが 3 の最適選好マッチング $M_1 = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_4, b_3)\}$ と $M_2 = \{(a_2, b_1), (a_3, b_3), (a_4, b_4)\}$，そしてサイズが 4 の最大最適選好マッチング $M_3 = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_4)\}$ が存在する．

a_1 :	b_1			b_1 :	a_2	a_1
a_2 :	b_1	b_2		b_2 :	a_2	
a_3 :	b_3			b_3 :	a_4	a_3
a_4 :	b_3	b_4		b_4 :	a_4	

表 1 a_1 は b_1 のみを好み，a_2 は b_1 を 1 番目に好み b_2 を 2 番目に好む．その他の人についても同様に解釈する．

マッチング M_1 の頂点集合 $\{a_1, a_2, a_4, b_1, b_2, b_3\}$ とマッチング M_2 の頂点集合 $\{a_2, a_3, a_4, b_1, b_3, b_4\}$ は互いに異なる．よって，サイズが最大（または最小）でない場合には，頂点集合の一意性は必ずしも成り立たない．

参考文献

[1] D. Gale and L.S. Shapley, *College admissions and the stability of marriage*, The American Mathematical Monthly, (1962) 69, pp.9–14.

[2] P. Gärdenfors, *Match making: Assignments based on bilateral preferences*, Behavioral Science, (1975) 20, pp.166–173.
[3] D. Gusfield and R.W. Irving, *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms*, MIT Press, (1989).
[4] C.C. Huang and T. Kavitha, *Popular matching in the stable marriage problem*, Lecture Notes in Computer Science, (2011) 6755, pp.666–677.
[5] D.E. Knuth, *Marriage Stables*, Les Presses de L'Université de Montreal, (1976).