Vol.2013-AL-144 No.9
2013/5/17

アイテム入札による組合せオークションのナッシュ均衡

梅田 博之[1,a)]　浅野 孝夫[1,b)]

概要：n 人プレイヤーのアイテム入札による組合せオークションのナッシュ均衡を議論する．具体的には，評価関数が対称的で劣加法性を満たすときに，ナッシュ均衡が存在するための必要十分条件を与える．これからナッシュ均衡が存在するかどうかを判定するアルゴリズムも得られることになる．

キーワード：ナッシュ均衡，組合せオークション，第二価格オークション，劣加法性，無秩序の対価

Nash Equilibriums in Combinatorial Auctions with Item Bidding

Abstract: We discuss Nash equilibrium in a combinatorial auction with item bidding by n players. Specifically, we give a characterization for the existence of Nash equilibrium in such a combinatorial auction when valuations by n players satisfy symmetric and subadditive properties. By this characterization, we can obtain an algorithm for deciding whether a Nash equilibrium exists.

Keywords: Nash Equilibrium, combinatorial auction, second-price auction, subadditivity, price of anarchy

1. はじめに

各アイテムに対して，**第二価格オークション**を行うという単純な Bhawalkar and Roughgarden [1] のアイテム入札による組合せオークションでは，評価関数に**劣加法性**制約が，入札に**超過入札なし**制約が課されていて，**無秩序の代価**が最大 2 であることが示されている．一方，**ナッシュ均衡**については成立しない例が挙げられているものの，成立条件について深くは言及されていない．したがって，これを求めることは非常に興味深いと思われる．

著者らは，**対称性制約**を加えて，プレイヤー数が 2 のときに，ナッシュ均衡が存在するための必要十分条件を与え，それに基づいて，ナッシュ均衡が存在するかどうかを判定する効率的なアルゴリズムが得られることを示した [2]．本論文では，プレイヤー数 2 の条件を取り去って，与えられた n 人のプレイヤーのアイテム入札による組合せオークションに，ナッシュ均衡が存在するための必要十分条件を与える．さらに，それに基づいて，ナッシュ均衡が存在するかどうかを判定するアルゴリズムが得られることを示す．

[1] 中央大学　東京都文京区春日 1-13-27
Chuo University, Bunkyo-ku, Tokyo, 112–8551
[a)] humeda@educ.ise.chuo-u.ac.jp
[b)] asano@ise.chuo-u.ac.jp

2. 組合せオークションとアイテム入札

本節では組合せオークションとアイテム入札に関する基本的な定義といくつかの補題を与える．

n 人の**プレイヤー**の集合 $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ と m 個の**アイテム**の集合 $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ および M の各部分集合 S に対する各プレイヤー $i \in N$ の非負の評価 $f_i(S)$ を表す**評価関数** $f_i : 2^M \to \mathbf{R}_+$ からなる**組合せオークション**を考える．まず，**アイテム入札**について定義する．

各プレイヤー $i \in N$ の各アイテム $j \in M$ に対する入札額は非負であるとし，$b_i(j)$ と表記する．すると，各プレイヤー $i \in N$ の**入札**は，$b_i = (b_i(1), b_i(2), \ldots, b_i(m)) \in \mathbf{R}_+^m$ と書ける．そして，全プレイヤーの入札を $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ と表記する．さらに，入札 $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ において，プレイヤー $i \in N$ 以外の全プレイヤーのアイテム $j \in M$ に対する最高入札額を $b_{-i}(j)$ と表記する．すなわち，

$$b_{-i}(j) = \max_{h \in N - \{i\}} \{b_h(j)\} \qquad (j \in M) \tag{1}$$

とする．そして

$$b_{-i} = (b_{-i}(1), b_{-i}(2), \ldots, b_{-i}(m)) \tag{2}$$

とする．入札の**実行可能性**は以下のように定義される．

定義 2.1 プレイヤー $i \in N$ の入札 b_i は，アイテムの部分集合 $S \subseteq M$ に対して

$$\sum_{j \in S} b_i(j) > f_i(S) \tag{3}$$

であるとき，S に対して**超過入札**であると呼ばれる．入札 b_i は，どの部分集合 $S \subseteq M$ に対しても超過入札でない（すべての $S \subseteq M$ に対して $\sum_{j \in S} b_i(j) \le f_i(S)$ である）とき，**実行可能**であると呼ばれる．さらに，全プレイヤーの入札 $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ は，すべてのプレイヤー $i \in N$ の入札 b_i が実行可能であるとき，**実行可能**であると呼ばれる．□

アイテム入札の組合せオークション [1] では，アイテムごとに**第二価格オークション**が行われ，アイテムの落札と価格（支払い額）は以下のように定義される．全プレイヤーの実行可能入札 $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ において，アイテム $j \in M$ へのプレイヤー $i \in N$ の入札額 $b_i(j)$ が，他のすべてのプレイヤー $h \in N - \{i\}$ の入札額 $b_h(j)$ より真に大きい（$b_i(j) > b_{-i}(j)$ の）ときには，プレイヤー $i \in N$ がアイテム $j \in M$ を**落札する**（したがって，プレイヤー $i \in N$ は，自身の入札額 $b_i(j)$ が最大となっているアイテム $j \in M$ 以外は落札できない）．このとき，アイテム $j \in M$ の**価格** $price(j)$ は，他のすべてのプレイヤー $h \in N - \{i\}$ の入札額 $b_h(j)$ の最高入札額（プレイヤー全体では 2 番目に高い入札額）$b_{-i}(j)$ となる．すなわち，プレイヤー $i \in N$ がアイテム $j \in M$ を落札したときの**支払い額**は

$$price(j) = b_{-i}(j) \tag{4}$$

（そのアイテムの価格）となる．

さらに，アイテム $j \in M$ に対して，すべてのプレイヤーの入札額が 0 のときには，アイテム j は誰にも落札されないと考える．問題は，あるアイテム $j \in M$ に対して入札額が正で，最大となるプレイヤーが二人以上いる場合である．このときには，アイテム $j \in M$ に対して最大の入札をしているプレイヤーのうちの一人だけがそのアイテム j を落札することになる（したがって，アイテム $j \in M$ に対して最大の入札をしているそれ以外のプレイヤーはアイテム $j \in M$ を落札できない）．もちろん，このときには，落札されたアイテム $j \in M$ の価格は最大の入札額になる．

全プレイヤーの実行可能入札 $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ に対して，プレイヤー $i \in N$ の落札するアイテムの集合を $X_i(\boldsymbol{b})$ とする．すると上記の議論より，

$$X_i(\boldsymbol{b}) \subseteq \{j \in M \mid b_i(j) = \max\{b_h(j) \mid h \in N\}\} \tag{5}$$

となる．このとき，プレイヤー $i \in N$ の利得とナッシュ均衡は以下のように定義される．

定義 2.2 全プレイヤーの実行可能入札 $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ に対して，プレイヤー $i \in N$ の落札するアイテムの集合を $X_i(\boldsymbol{b})$ とする．このとき，$X_i(\boldsymbol{b})$ から得られるプレイヤー $i \in N$ の**利得** $u_i(X_i(\boldsymbol{b}))$ は，落札するアイテム集合に対する評価から落札するアイテムの価格の総和を引いた値の

$$u_i(X_i(\boldsymbol{b})) = f_i(X_i(\boldsymbol{b})) - \sum_{j \in X_i(\boldsymbol{b})} price(j) \tag{6}$$

と定義される．□

定義 2.3 全プレイヤーの実行可能入札 $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ に対して，プレイヤー $i \in N$ の落札するアイテムの集合を $X_i(\boldsymbol{b})$ とする．さらに，プレイヤー $i \in N$ のみが b_i を実行可能入札 b'_i に変えて得られる全プレイヤーの実行可能入札を $\boldsymbol{b}'_i$ とする．すなわち，

$$\boldsymbol{b}'_i = (b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}, b'_i, b_{i+1}, \ldots, b_n)$$

とする．さらに，この入札 $\boldsymbol{b}'_i$ でプレイヤー $i \in N$ の落札するアイテムの集合を $X_i(\boldsymbol{b}'_i)$ とする．このとき，どのプレイヤー $i \in N$ も b_i をどのような実行可能入札 b'_i に変えても，得られる利得が $u_i(X_i(\boldsymbol{b}))$ より真に大きくならないとき，すなわち，すべてのプレイヤー $i \in N$ と上記のすべての実行可能入札 $\boldsymbol{b}'_i$（および落札集合 $X_i(\boldsymbol{b}'_i)$）に対して，

$$u_i(X_i(\boldsymbol{b})) \ge u_i(X_i(\boldsymbol{b}'_i))$$

が成立するとき，実行可能入札 $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ は**ナッシュ均衡**であると定義される．□

本論文では，評価関数に以下の制約を課すことにする．

仮定 2.1 全プレイヤーの評価関数組 $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ の各 f_i $(i \in N)$ は，以下の性質を満たすものとする．

1. （**空集合**）空集合 $\emptyset$ に対して $f_i(\emptyset) = 0$ である．
2. （**単調性**）$\emptyset \ne S \subset T$ を満たすすべての $S, T \subseteq M$ に対して $0 < f_i(S) \le f_i(T)$ である．
3. （**劣加法性**）すべての $S, T \subseteq M$ に対して $f_i(S \cup T) \le f_i(S) + f_i(T)$ である．
4. （**対称性**）$|S| = |T|$ を満たすすべての $S, T \subseteq M$ に対して $f_i(S) = f_i(T)$ である．□

仮定 2.1 の f_i の対称性より，すべての $k \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ に対して，$k = |S|$ となる任意の $S \subseteq M$ を用いて $v_i(k) = f_i(S)$ と定義して，f_i は**対称的な評価関数** $v_i : \{0, 1, 2, \ldots, m\} \to \mathbf{R}_+$ として簡潔に表現できる．対称的な評価関数 v_i を用いると，仮定 2.1 の 1.〜3. と定義 2.2 の利得は，以下のように書ける．

定義 2.4 全プレイヤーの評価関数組 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ の各 v_i $(i \in N)$ は，以下の性質を満たすものとする．

1. （**空集合**）$v_i(0) = 0$ である．

2. （**単調性**）$1 \le k < k' \le m$ を満たすすべての k, k' に対して $0 < v_i(k) \le v_i(k')$ である．
3. （**劣加法性**）$0 \le k, k' \le m$ を満たすすべての k, k' に対して $v_i(\min\{k+k', m\}) \le v_i(k) + v_i(k')$ である．□

定義 2.5　全プレイヤーの実行可能入札 $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ に対して，プレイヤー $i \in N$ の落札するアイテムの集合を $X_i(\boldsymbol{b})$ とすると，プレイヤー $i \in N$ の**利得** $u_i(X_i(\boldsymbol{b}))$ は，

$$u_i(X_i(\boldsymbol{b})) = v_i(|X_i(\boldsymbol{b})|) - \sum_{j \in X_i(\boldsymbol{b})} price(j) \tag{7}$$

と書ける．□

定義 2.6　各プレイヤー $i \in N$ の定義 2.4 を満たす対称的な評価関数を v_i とする．このとき，各プレイヤー $i \in N$ に対する関数 w_i をすべての $k_i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ に対して，

$$w_i(k_i) = k_i \min\left\{ v_i(1), \frac{v_i(2)}{2}, \ldots, \frac{v_i(k_i-1)}{k_i-1}, \frac{v_i(k_i)}{k_i} \right\} \tag{8}$$

として定義し，さらに $w_i(0) = 0$ と定義する．□

補題 2.1　[2]　定義 2.4 の 1. と 2. を満たす対称的な評価関数 v_i と定義 2.6 で定義された関数 w_i に対して，

$$w_i(1) = v_i(1), \quad w_i(k_i) \le v_i(k_i) \quad (k_i = 2, 3, \ldots, m) \tag{9}$$

である．さらにすべての $k_i \in \{2, 3, \ldots, m\}$ に対して，

$$w_i(k_i) = k_i \min\left\{ \frac{w_i(k_i-1)}{k_i-1}, \frac{v_i(k_i)}{k_i} \right\} \tag{10}$$

である．したがって，

$$w_i(1) \ge \frac{w_i(2)}{2} \ge \cdots \ge \frac{w_i(m)}{m}, \tag{11}$$

$$w_i(1) \le w_i(2) \le \cdots \le w_i(m), \tag{12}$$

$$w_i(k_i) < v_i(k_i) \text{ ならば } w_i(k_i) = \frac{k_i}{k_i-1} w_i(k_i-1) \tag{13}$$

が成立する．□

定理 2.1　[2]　定義 2.4 の 1. と 2. を満たす対称的な評価関数 v_i と定義 2.6 で定義された関数 w_i と全プレイヤーの任意の入札 $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ に対して，各プレイヤー $i \in N$ の入札 b_i は

$$b_i(\pi_i(1)) \le b_i(\pi_i(2)) \le \cdots \le b_i(\pi_i(m)) \tag{14}$$

と $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ 上の置換 π_i を用いて並べられているとする．このとき，$b_i = (b_i(1), b_i(2), \ldots, b_i(m))$ が実行可能であるための必要十分条件は，すべての $k_i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ に対して，$b_i = (b_i(1), b_i(2), \ldots, b_i(m))$ の大きいほうの k_i 個の入札額の和が $w_i(k_i)$ 以下であること，すなわち，

$$\sum_{j=m-k_i+1}^{m} b_i(\pi_i(j)) \le w_i(k_i) \tag{15}$$

が成立することである．したがって，入札 $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ が実行可能であるための必要十分条件は，すべての $i \in N$ とすべての $k_i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ に対して，

$$\sum_{j=m-k_i+1}^{m} b_i(\pi_i(j)) \le w_i(k_i) \tag{16}$$

が成立することである．□

3. ナッシュ均衡の存在

本論文の主結果を説明するのに必要となる用語と補題を与え，その後に主結果の証明の概略を与える．詳細な証明は次節以降で与える．本論文のこれ以降の節では，n 人のプレイヤーの集合 $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ と m 個のアイテムの集合 $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ において，全プレイヤーの評価関数組 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ の各 v_i $(i \in N)$ は**定義 2.4 を満たす対称的な評価関数**であり，各 w_i は**定義 2.6 で定義された関数**であるとする．

M の n 個の任意の部分集合 $M_1, M_2, \ldots, M_n$ への分割，

$$M_i \cap M_h = \emptyset \quad (i, h \in N, i \neq h), \tag{17}$$

$$M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n = M \tag{18}$$

に対して，プレイヤー i の入札 $d_i = (d_i(1), d_i(2), \ldots, d_i(m))$ を，$\frac{0}{0} = 0$ として，

$$d_i(j) = \begin{cases} \frac{w_i(|M_i|)}{|M_i|} & (j \in M_i \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases} \tag{19}$$

と定義する．このとき，以下の補題（証明は後述）から，本論文の主結果が得られる．

補題 3.1　式 (19) で定義される n 人のプレイヤーの入札 $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ は実行可能入札である．□

定理 3.1　定義 2.4 を満たす $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ にナッシュ均衡が存在するための必要十分条件は，式 (19) で定義される n 人のプレイヤーの実行可能入札 $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ がナッシュ均衡となるような M の n 個の部分集合 $M_1, M_2, \ldots, M_n$ への分割が存在することである．□

定理 3.1 の証明の概略を与える．以下の記法を用いる．

実行可能入札 $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ において，各プレイヤー $i \in N$ の落札するアイテムの集合を $X_i(\boldsymbol{b})$ とし，

$$x_i = |X_i(\boldsymbol{b})| \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{20}$$

とする．すると，

$$X_i(\boldsymbol{b}) \cap X_h(\boldsymbol{b}) = \emptyset \quad (i, h \in N, i \neq h),$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq m$$

である（これは落札の定義より自明である）．そこで，$Y_1 = X_1(\boldsymbol{b})$，$Y_2 = X_2(\boldsymbol{b})$，…，$Y_{n-1} = X_{n-1}(\boldsymbol{b})$，$Y_n = M - (X_1(\boldsymbol{b}) \cup \cdots \cup X_{n-1}(\boldsymbol{b}))$ と定義する．すなわち，

$$Y_i = \begin{cases} X_i(\boldsymbol{b}) & (i \neq n \text{ のとき}), \\ M - (Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_{n-1}) & (i = n \text{ のとき}) \end{cases} \quad (21)$$

と定義する．したがって，$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ は M の n 個の部分集合への分割であり，$M_i = Y_i$ とおけば式 (17)，(18) を満たす．さらに，$c_i = (c_i(1), c_i(2), \ldots, c_i(m))$ を式 (19) で定義したプレイヤー i の入札 d_i とする．したがって，

$$y_i = |Y_i| \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (22)$$

とすると，$c_i = (c_i(1), c_i(2), \ldots, c_i(m))$ は，$\frac{0}{0} = 0$ として，

$$c_i(j) = \begin{cases} \frac{w_i(y_i)}{y_i} & (j \in Y_i \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases} \quad (23)$$

となる．このとき，以下の補題が言える（証明は後述する）．

補題 3.2 実行可能入札 $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ がナッシュ均衡であるならば，式 (23) で定義した $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ もナッシュ均衡である．□

定理 3.1 の証明：この補題から，定理 3.1 の証明は直ちに得られる．実行可能入札が存在して，ある実行可能入札の $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ がナッシュ均衡であるならば，補題 3.2 より，式 (23) で定義した $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ もナッシュ均衡であるので，必要性はすべての $i \in N$ で $M_i = Y_i$ とおいて得られる．

十分性は明らかである．式 (19) で定義される n 人のプレイヤーの実行可能入札 $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ がナッシュ均衡となるような M の n 個の部分集合 $M_1, M_2, \ldots, M_n$ への分割が存在するときには，それが実際に $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ におけるナッシュ均衡であるからである．□

4. 実行可能入札の基本的な性質

補題 3.1 と補題 3.2 の証明の概略を与えるために，最初に実行可能入札の基本的な性質を調べる．これ以降，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ は n 人のプレイヤーの**実行可能入札**であり，各入札 b_i は，定理 2.1 の式 (14) で述べているように，$M = \{1, 2, \ldots, m\}$ 上の置換 π_i を用いて

$$b_i(\pi_i(1)) \leq b_i(\pi_i(2)) \leq \cdots \leq b_i(\pi_i(m)) \quad (24)$$

と並べられているとする．同様に，式 (2) の $b_{-i} = (b_{-i}(1), b_{-i}(2), \ldots, b_{-i}(m))$ も，M 上の置換 π_{-i} を用いて，

$$b_{-i}(\pi_{-i}(1)) \leq b_{-i}(\pi_{-i}(2)) \leq \cdots \leq b_{-i}(\pi_{-i}(m)) \quad (25)$$

と並べられているとする．すると，以下の補題が成立する（定理 2.1 を用いて容易に証明できる）．

補題 4.1 任意の $i \in N$ と任意の k_i $(1 \leq k_i \leq m)$ に対して，$b_i = (b_i(1), b_i(2), \ldots, b_i(m))$ $(i \in N)$ の大きいほうの k_i 個のうちで，小さいほうの $k' \leq k_i$ 個の和は，$\frac{k'}{k_i} w_i(k_i)$ 以下である．すなわち，

$$\sum_{j=m-k_i+1}^{m-k_i+k'} b_i(\pi_i(j)) \leq \frac{k'}{k_i} w_i(k_i) \quad (26)$$

が成立する．したがって，k_i 個のアイテムの任意の集合 $M'_i = \{j_{i_1}, j_{i_2}, \ldots, j_{i_{k_i}}\} \subseteq M$ に対して b_i の値の小さいほうの $k' \leq k_i$ 個の和は，$\frac{k'}{k_i} w_i(k_i)$ 以下である．すなわち，式 (24) の M の置換 π_i のもとで，

$$b_i(\pi_i(j_{i_1})) \leq b_i(\pi_i(j_{i_2})) \leq \cdots \leq b_i(\pi_i(j_{i_{k_i}})) \quad (27)$$

であるとき，

$$\sum_{h=1}^{k'} b_i(\pi_i(j_{i_h})) \leq \frac{k'}{k_i} w_i(k_i) \quad (28)$$

が成立する．□

この補題を用いて補題 3.1 の証明を以下に与える．

補題 3.1 の証明: 式 (17)，(18) を満たす M_i $(i \in N)$ を $M_i = \{j_{i_1}, j_{i_2}, \ldots, j_{i_{k_i}}\} \subseteq M$ とする．さらに式 (19) で定義される n 人のプレイヤーの入札 $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ は，

$$d_i(\sigma_i(1)) \leq d_i(\sigma_i(2)) \leq \cdots \leq d_i(\sigma_i(m)) \quad (29)$$

と M 上の置換 σ_i を用いて並べられているとする．すると，任意の k' $(1 \leq k' \leq k_i)$ に対して，

$$\sum_{j=m-k_i+1}^{m-k_i+k'} d_i(\sigma_i(j)) = \frac{k'}{k_i} w_i(k_i)$$

が成立する．これは，d_i の定義式 (19) と式 (29) から

$$d_i(\sigma_i(1)) = d_i(\sigma_i(2)) = \cdots = d_i(\sigma_i(m-k_i)) = 0,$$
$$d_i(\sigma_i(m-k_i+1)) = \cdots = d_i(\sigma_i(m)) = \tfrac{w_i(k_i)}{k_i}$$

であるので明らかである．さらに，d_i の実行可能性も以下のように得られる．補題 2.1 の式 (11) の

$$w_i(1) \geq \frac{w_i(2)}{2} \geq \cdots \geq \frac{w_i(m)}{m}$$

から，任意の $k'' \leq k_i$ で

$$\sum_{j=m-k''+1}^{m} d_i(\sigma_i(j)) = \frac{k''}{k_i} w_i(k_i) \leq w_i(k'')$$

である．一方，任意の $k'' > k_i$ では，$d_i(\sigma_i(m-k''+1)) = d_i(\sigma_i(m-k''+2)) = \cdots = d_i(\sigma_i(m-k_i)) = 0$ であるので，

$$\sum_{j=m-k''+1}^{m} d_i(\sigma_i(j)) = \sum_{j=m-k_i+1}^{m} d_i(\sigma_i(j)) = w_i(k_i) \leq w_i(k'')$$

である（不等式は補題 2.1 の式 (12) より得られる）．したがって，定理 2.1 の式 (16) より，d_i は実行可能である．□

5. 補題 3.2 の証明のための準備

次に，補題 3.2 を証明するために，式 (23) で定義される $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ についての基本的な性質を調べる．

式 (21) による $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ の定義より，$Y_n - X_n(\boldsymbol{b}) \neq \emptyset$ のときには，アイテム $j \in Y_n - X_n(\boldsymbol{b})$ はどのプレイヤーにも落札されないので，

$$b_i(j) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n,\ j \in Y_n - X_n(\boldsymbol{b})) \tag{30}$$

である．さらに，$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ において，各プレイヤー $i \in N$ の落札するアイテムの集合を $X_i(\boldsymbol{c})$ とすると，

$$X_i(\boldsymbol{c}) = Y_i, \quad |X_i(\boldsymbol{c})| = y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{31}$$

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = m \tag{32}$$

である．以下では，記法の単純化のため，

$$j^{(0)} = 0, \quad j^{(i)} = y_1 + \cdots + y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

と書くことにする．したがって，式 (32) より，

$$j^{(1)} = y_1, \quad j^{(i)} = j^{(i-1)} + y_i, \quad j^{(n)} = m$$

である．すると，対称性から，

$$\begin{aligned} X_i(\boldsymbol{c}) &= \{j^{(i-1)} + 1, j^{(i-1)} + 2, \ldots, j^{(i-1)} + y_i\} \\ &= \{j^{(i)} - y_i + 1, j^{(i)} - y_i + 2, \ldots, j^{(i)}\} \end{aligned} \tag{33}$$

と仮定できる．式 (2) の b_{-i} の定義と式 (33) の仮定より，

$$b_{-i}(j) = b_h(j) \quad (j \in X_h(\boldsymbol{c}),\ h \neq i)$$

である．同様に，式 (23) と式 (2) の c_{-i} の定義より，

$$c_{-i}(j) = c_h(j) = \frac{w_h(y_h)}{y_h} \quad (j \in X_h(\boldsymbol{c}),\ h \neq i)$$

である．プレイヤー i の落札集合 $X_i(\boldsymbol{c})$ に含まれないアイテムを b_{-i} の小さい順に並べる．すなわち，

$$M - X_i(\boldsymbol{c}) = \{j_1^{(-i)}, j_2^{(-i)}, \ldots, j_{m-y_i}^{(-i)}\} \tag{34}$$

は

$$b_{-i}(j_1^{(-i)}) \leq b_{-i}(j_2^{(-i)}) \leq \cdots \leq b_{-i}(j_{m-y_i}^{(-i)}) \tag{35}$$

であるとする．さらに，任意の $h \in N - \{i\}$ に対して，

$$b_h(j) \leq b_h(j') \quad (j, j' \in X_h(\boldsymbol{c}),\ j < j') \tag{36}$$

と対称性より仮定できる．このとき以下の補題が成立する（証明は補題 4.1 を用いてできるが，省略する）．

補題 5.1 任意の $i \in N$ に対して，M_{-i} を $M - X_i(\boldsymbol{c}) = \{j_1^{(-i)}, j_2^{(-i)}, \ldots, j_{m-y_i}^{(-i)}\}$ の任意の部分集合とする．さらに，任意の $h \in N - \{i\}$ に対して $X_h(\boldsymbol{c}) = Y_h$ に注意して，

$$Y'_h = M_{-i} \cap X_h(\boldsymbol{c}) = M_{-i} \cap Y_h \tag{37}$$

とする．したがって，$y = |M_{-i}|$ かつ $y'_h = |Y'_h|$ とすると，

$$M_{-i} = \bigcup_{h \in N - \{i\}} Y'_h, \quad y = \sum_{h \in N - \{i\}} y'_h \tag{38}$$

である．このとき，式 (35) の b_{-i} の値の小さいほうの y 個の和に対して

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{y} b_{-i}(j_p^{(-i)}) &\leq \sum_{h \in N - \{i\}} \sum_{j \in Y'_h} c_h(j) \\ &= \sum_{h \in N - \{i\}} y'_h \frac{w_h(y_h)}{y_h} \end{aligned} \tag{39}$$

が成立する． □

系 5.1 実行可能入札 $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ からプレイヤー i の c_i を実行可能入札 c'_i に置き換えて得られる実行可能入札を $\boldsymbol{c}'_i = (c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}, c'_i, c_{i+1}, \ldots, c_n)$ とする．さらに，$\boldsymbol{c}'_i$ において，プレイヤー i の落札集合を $X_i(\boldsymbol{c}'_i)$ は，$X_i(\boldsymbol{c}'_i) \supseteq X_i(\boldsymbol{c})$ を満たすとする．このとき，

$$M_{-i} = X_i(\boldsymbol{c}'_i) - X_i(\boldsymbol{c}_i) \subseteq M - X_i(\boldsymbol{c}) \tag{40}$$

とすると，補題 5.1 と同じ条件と記法のもので，式 (39) が成立する． □

さらに，実行可能入札 $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ がナッシュ均衡であるときに成立する性質を調べる．$\boldsymbol{b}$ において各プレイヤー $i \in N$ の落札するアイテムの集合 $X_i(\boldsymbol{b})$ に対して，x_i は式 (20) で定義したように $x_i = |X_i(\boldsymbol{b})|$ である．このとき以下の補題が得られる（証明は紙面の都合で省略する）．

補題 5.2 式 (2) の $b_{-i} = (b_{-i}(1), b_{-i}(2), \ldots, b_{-i}(m))$ で，式 (25) の $b_{-i}(\pi_{-i}(1)) \leq b_{-i}(\pi_{-i}(2)) \leq \cdots \leq b_{-i}(\pi_{-i}(m))$ を満たす置換 π_{-i} が複数個存在するときには，そのような置換 π_{-i} で $X_i(\boldsymbol{b}) \cap \{\pi_{-i}(1), \pi_{-i}(2), \ldots, \pi_{-i}(x_i)\}$ の要素数が最大となるような置換を改めて π_{-i} とする．このとき，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ がナッシュ均衡であるならば，

$$X_i(\boldsymbol{b}) = \{\pi_{-i}(1), \pi_{-i}(2), \ldots, \pi_{-i}(x_i)\}$$

である． □

補題 5.3 落札されないアイテムが存在する（すなわち，$x_1 + x_2 + \cdots + x_n < m$ である）とする．このとき，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ がナッシュ均衡であり，アイテム j がプレイヤー i に落札されるならば，$b_i(j) > 0$ かつ $b_{-i}(j) = \max_{h \in N - \{i\}}\{b_h(j)\} = 0$ である． □

補題 3.2 を証明を完成するために，最後にこれらの補題に基づいて，安定性と落札可能性の概念を導入する．

定義 5.1 各 $i \in N$ に対して，すべての k, k' $(1 \leq k \leq m - x_i,\ 1 \leq k' \leq x_i)$ で

$$v_i(x_i + k) - v_i(x_i) \leq \sum_{j=1}^{k} b_{-i}(\pi_{-i}(x_i + j)), \tag{41}$$

$$v_i(x_i - k') \leq v_i(x_i) - \sum_{j=0}^{k'-1} b_{-i}(\pi_{-i}(x_i - j)) \tag{42}$$

が成立するとき，b_i は $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ で**安定である**と呼び，そうでないときには**不安定である**と呼ぶ．すべての $i \in N$ で b_i が $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ で安定であるとき，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ は**安定である**と呼ぶ． □

定義 5.2 与えられた $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ に対して，すべての $1 \leq k' \leq k$ で，$b_{-i} = (b_{-i}(1), b_{-i}(2), \ldots, b_{-i}(m))$ の小さいほうの k 個の入札額のうちから大きいほうの k' 個を選んで得られる和が $w_i(k')$ 以下であるとき，すなわち，すべての $1 \leq k' \leq k$ で

$$\sum_{j=0}^{k'-1} b_{-i}(\pi_{-i}(k - j)) \leq w_i(k') \tag{43}$$

が成立するとき，プレイヤー i は k 個のアイテムが**落札可能**であるという．一方，$1 \leq k' \leq k$ のある k' で

$$\sum_{j=0}^{k'-1} b_{-i}(\pi_{-i}(k - j)) > w_i(k') \tag{44}$$

が成立するときは，プレイヤー i は k 個のアイテムは**落札不可能**であるという． □

実行可能入札 $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ が安定であるときには，どのプレイヤー i も入札 $b_i = (b_i(1), b_i(2), \ldots, b_i(m))$ を（実行可能な入札のみならず，実行不可能な入札）$b'_i = (b''_i(1), b'_i(2), \ldots, b'_i(m))$ に変えたとしても，入札 $\boldsymbol{b}'_i = (b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}, b'_i, b_{i+1}, \ldots, b_n)$ において，利得が増加することはない．したがって，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ が安定であるならば，ナッシュ均衡でもある．逆も成立するので，以下の定理が得られる（証明は後述する）．

定理 5.1 n 人のプレイヤーの実行可能入札 $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ の落札集合組 $(X_1(\boldsymbol{b}), X_2(\boldsymbol{b}), \ldots, X_n(\boldsymbol{b}))$ がナッシュ均衡であるための必要十分条件は，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ が安定であることである． □

定理 2.1 と定理 5.1 から以下が得られる．すなわち，入札 $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ に対して，すべての $i \in N$ で式 (25) の

$$b_{-i}(\pi_{-i}(1)) \leq b_{-i}(\pi_{-i}(2)) \leq \cdots \leq b_{-i}(\pi_{-i}(m))$$

が与えられているとする．このとき，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ がナッシュ均衡であるかどうかは $O(nm)$ 時間で判定できる．さらに，定理 3.1 とを合わせて以下の系も得られる．

系 5.2 定義 2.4 を満たす評価関数組 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ に対して，ナッシュ均衡が存在するかどうかは $O(m^n)$ 時間で判定できる．さらに，存在するときには，ナッシュ均衡も $O(m^n)$ 時間で得ることができる． □

定理 5.1 の証明を与える前に，この定理から補題 3.2 の証明が得られることを示す．

6. 補題 3.2 の証明

$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ がナッシュ均衡であるにもかかわらず，$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ がナッシュ均衡でなかったと仮定する．そこで，あるプレイヤー $i \in N$ が入札 $c_i = (c_i(1), c_i(2), \ldots, c_i(m))$ を実行可能入札 $c'_i = (c'_i(1), c'_i(2), \ldots, c'_i(m))$ に変えると，n 人のプレイヤーの実行可能入札 $\boldsymbol{c}'_i = (c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}, c'_i, c_{i+1}, \ldots, c_n)$ でプレイヤー i の落札集合 $X_i(\boldsymbol{c}'_i)$ の利得 $u_i(X_i(\boldsymbol{c}'_i))$ がもとの利得 $u_i(X_i(\boldsymbol{c}))$ より真に大きくなったとする．すなわち，

$$\begin{aligned} u_i(X_i(\boldsymbol{c}'_i)) &= v_i(|X_i(\boldsymbol{c}'_i)|) - \sum_{j \in X_i(\boldsymbol{c}'_i)} c_{-i}(j) \\ &> u_i(X_i(\boldsymbol{c})) = v_i(y_i) \end{aligned} \tag{45}$$

であるとする．すると，以下に示すように矛盾が得られる．

一般性を失うことなく，

$$X_i(\boldsymbol{c}'_i) \supseteq X_i(\boldsymbol{c}) \tag{46}$$

と仮定できる．実際，$\boldsymbol{c}$ の定義より，任意の $j \in X_i(\boldsymbol{c})$ で

$$c_{-i}(j) = \max_{h \in N - \{i\}} c_h(j) = 0$$

であるので，v_i の単調性から，$u_i(X_i(\boldsymbol{c}'_i))$ を減らすことなく，必要ならば $X_i(\boldsymbol{c}'_i) - X_i(\boldsymbol{c})$ の要素を 1 個除去して，$X_i(\boldsymbol{c}'_i)$ が j を含むように $c'_i(j)$ を修正できるからである．ここで，

$$M_{-i} = X_i(\boldsymbol{c}'_i) - X_i(\boldsymbol{c}), \quad y = |M_{-i}| \tag{47}$$

とする．すると，$u_i(X_i(\boldsymbol{c}'_i))$ は，

$$u_i(X_i(\boldsymbol{c}'_i)) = v_i(|X_i(\boldsymbol{c}'_i)|) - \sum_{j \in M_{-i}} c_{-i}(j) \tag{48}$$

と書ける．したがって，式 (46)，(47) より，

$$X_i(\boldsymbol{c}'_i) = X_i(\boldsymbol{c}) \cup M_{-i},$$

$$|X_i(\boldsymbol{c}'_i)| = |X_i(\boldsymbol{c}_i)| + |M_{-i}| = y_i + y$$

であるので，系 5.1 を適用することができる．したがって，式 (34)，(35)，(38)，(39) より，

$$u_i(X_i(\boldsymbol{c}'_i)) = v_i(|X_i(\boldsymbol{c}'_i)|) - \sum_{j \in M_{-i}} c_{-i}(j)$$

$$\leq v_i(|X_i(\boldsymbol{c}_i')|) - \sum_{h=1}^{y} b_{-i}(j_h^{(-i)})$$
$$= v_i(y_i + y) - \sum_{h=1}^{y} b_{-i}(j_h^{(-i)})$$

が得られる．一方，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ はナッシュ均衡であるので，定義 5.1 と定理 5.1 より，

$$v_i(y_i + y) - v_i(y_i) \leq \sum_{h=1}^{y} b_{-i}(j_h^{(-i)})$$

である．しかし，これらを組み合わせると $u_i(X_i(\boldsymbol{c}_i')) \leq v_i(y_i)$ となって，式 (45) に反する．したがって，$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ がナッシュ均衡であることが得られた． □

7. 定理 5.1 の証明

次の補題（証明は困難ではないが紙面の都合で省略する）を用いて定理 5.1 を証明する．

補題 7.1 実行可能入札 $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ において，プレイヤー i は g_i 個のアイテムが落札可能であるが，$g_i + 1$ 個のアイテムは落札不可能であるとする．さらに，g_i' を $1 \leq g_i' \leq g_i + 1$ で

$$\sum_{j=0}^{g_i'-1} b_{-i}(\pi_{-i}(g_i + 1 - j)) > w_i(g_i') \tag{49}$$

を満たす最小の値とする．すると，すべての $k \leq g_i' - 1$ で

$$\sum_{j=0}^{k-1} b_{-i}(\pi_{-i}(g_i + 1 - j)) \leq w_i(k) \tag{50}$$

であり，さらに $w_i(g_i') = v_i(g_i')$ が成立する． □

定理 5.1 の必要性を示す次の補題の証明を与える．

補題 7.2 $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ がナッシュ均衡であるならば，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ は安定である．

証明： 背理法で証明する．そこで，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ は安定でなかったと仮定する．したがって，ある $i \in N$ とある k, k' $(1 \leq k \leq m - x_i,\ 1 \leq k' \leq x_i)$ に対して

$$v_i(x_i + k) - v_i(x_i) > \sum_{j=1}^{k} b_{-i}(\pi_{-i}(x_i + j)), \tag{51}$$

あるいは

$$v_i(x_i - k') > v_i(x_i) - \sum_{j=0}^{k'-1} b_{-i}(\pi_{-i}(x_i - j)) \tag{52}$$

が成立する．議論を明快にするために，必要ならばアイテムのラベルを変えて，π_{-i} は恒等置換で，すべての $j = 1, 2, \ldots, m$ で $\pi_{-i}(j) = j$ であると仮定する．これは一般性を失うことなく仮定できる．したがって，式 (25) は，

$$b_{-i}(1) \leq b_{-i}(2) \leq \cdots \leq b_{-i}(m) \tag{53}$$

と書ける．そこで，プレイヤー i は g_i 個のアイテムが落札可能であるが，$g_i + 1$ 個のアイテムは落札不可能であるとする．$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ はナッシュ均衡であるので，補題 5.2 より，$X_i(\boldsymbol{b}) = \{1, 2, \ldots, x_i\}$ と仮定でき，すべての $1 \leq k \leq g_i - x_i$ に対して

$$v_i(x_i + k) - v_i(x_i) \leq \sum_{j=1}^{k} b_{-i}(x_i + j) \tag{54}$$

であり，すべての $1 \leq k' \leq x_i$ に対して

$$v_i(x_i - k') + \sum_{j=0}^{k'-1} b_{-i}(x_i - j) \leq v_i(x_i) \tag{55}$$

である．したがって，式 (52) が成立することはない．また，式 (51) は，k $(1 \leq k \leq g_i - x_i)$ で成立することはない．すなわち，式 (51) は，ある k $(g_i - x_i + 1 \leq k \leq m - x_i)$ で成立することになる（したがって，$g_i \neq m$ と仮定できる）．

そこで，k^* をそのような k の最小値とする．したがって，

$$k^* \geq g_i - x_i + 1, \tag{56}$$

$$v_i(x_i + k^*) - v_i(x_i) > \sum_{j=1}^{k^*} b_{-i}(x_i + j) \tag{57}$$

かつすべての $0 \leq k \leq k^* - 1$ で

$$v_i(x_i + k) - v_i(x_i) \leq \sum_{j=1}^{k} b_{-i}(x_i + j) \tag{58}$$

である．一方，プレイヤー i は g_i 個のアイテムが落札可能であるが，$g_i + 1$ 個のアイテムは落札不可能であるとしているので，補題 7.1 で定義されている g_i' を考えることができる．すなわち，g_i' は，$1 \leq k'' \leq g_i + 1$ で

$$b_{-i}(g_i - k'' + 2) + b_{-i}(g_i - k'' + 3) + \cdots + b_{-i}(g_i + 1) > w_i(k'')$$

を満たす k'' の最小値である．したがって，

$$\sum_{j=1}^{g_i'} b_{-i}(g_i + 1 - g_i' + j) > w_i(g_i'), \tag{59}$$

$$w_i(g_i') = v_i(g_i') \tag{60}$$

を満たす．また，プレイヤー i は g_i 個のアイテムが落札可能であるので，任意の $1 \leq k \leq g_i$ で，$\sum_{j=1}^{k} b_{-i}(g_i - k + j) \leq w_i(k)$ である．

ここで，$x_i + k^*$ から g_i' を何回か引いていくと，幅 g_i' の区間 $[g_i + 1 - g_i', g_i]$ に値が入るようになる．そこで，g_i' を $q \geq 1$ 回引いてそのようになったとする．すなわち，

$$g_i + 1 - g_i' \leq x_i + k^* - q g_i' \leq g_i \tag{61}$$

である．そこで，

$$k^* - r = qg_i' \tag{62}$$

とおく．すると，$x_i + r = x_i + k^* - qg_i'$ である．ここで，式 (59), (60) を用いて, (i) $r \geq 0$ と (ii) $r < 0$ のケースに分けて議論する．式 (59) より $\sum_{j=1}^{g_i'} b_{-i}(g_i + 1 - g_i' + j) > w_i(g_i')$，式 (61) より $g_i + 1 - g_i' \leq x_i + k^* - qg_i'$，式 (56) より $x_i + k^* \geq g_i + 1$ であるので，式 (53) より，

$$\begin{aligned} qw_i(g_i') &< q\sum_{j=1}^{g_i'} b_{-i}(g_i + 1 - g_i' + j) \\ &\leq q\sum_{j=1}^{g_i'} b_{-i}(x_i + k^* - qg_i' + j) \\ &\leq \sum_{j=1}^{qg_i'} b_{-i}(x_i + k^* - qg_i' + j) \\ &= \sum_{j=1}^{qg_i'} b_{-i}(x_i + r + j) \\ &= \sum_{j=x_i+r+1}^{x_i+r+qg_i'} b_{-i}(j) = \sum_{j=x_i+r+1}^{x_i+k^*} b_{-i}(j) \end{aligned}$$

が得られる．したがって，式 (57) より，

$$v_i(x_i + k^*) - v_i(x_i) > \sum_{j=1}^{k^*} b_{-i}(x_i + j) = \sum_{j=x_i+1}^{x_i+k^*} b_{-i}(j)$$

であるので，

$$qw_i(g_i') < v_i(x_i+k^*) - v_i(x_i) - \sum_{j=x_i+1}^{x_i+k^*} b_{-i}(j) + \sum_{j=x_i+r+1}^{x_i+k^*} b_{-i}(j) \tag{63}$$

が得られる．

(i) $r \geq 0$ のとき：$r = k^* - qg_i' \leq k^* - 1$ と式 (58) より

$$v_i(x_i + r) - v_i(x_i) \leq \sum_{j=1}^{r} b_{-i}(x_i + j) = \sum_{j=x_i+1}^{x_i+r} b_{-i}(j)$$

であるので，式 (63) と劣加法性を用いて，

$$\begin{aligned} &qw_i(g_i') \\ &< v_i(x_i + k^*) - v_i(x_i) - \sum_{j=x_i+1}^{x_i+k^*} b_{-i}(j) + \sum_{j=x_i+r+1}^{x_i+k^*} b_{-i}(j) \\ &= v_i(x_i + k^*) - v_i(x_i) - \sum_{j=x_i+1}^{x_i+r} b_{-i}(j) \\ &= v_i(x_i+k^*) - v_i(x_i+r) + v_i(x_i+r) - v_i(x_i) - \sum_{j=x_i+1}^{x_i+r} b_{-i}(j) \\ &\leq v_i(x_i + k^*) - v_i(x_i + r) \\ &\leq v_i(k^* - r) = v_i(qg_i') \leq qv_i(g_i') \end{aligned}$$

となり，

$$w_i(g_i') < v_i(g_i') \tag{64}$$

となる．しかし，これは式 (60) に矛盾する．

(ii) $r = k^* - qg_i' < 0$ のとき：$k_r = -r$ とする．すると，式 (61)，(62) から $1 \leq k_r = -r \leq x_i$ となるので，式 (55) より，

$$v_i(x_i+r) + \sum_{j=x_i+r+1}^{x_i} b_{-i}(j) = v_i(x_i-k_r) + \sum_{j=x_i-k_r+1}^{x_i} b_{-i}(j) \leq v_i(x_i)$$

である（これは $k_r = -r = x_i$ でも成立する）．したがって，式 (63) と劣加法性を用いて，

$$\begin{aligned} &qw_i(g_i') \\ &< v_i(x_i + k^*) - v_i(x_i) - \sum_{j=x_i+1}^{x_i+k^*} b_{-i}(j) + \sum_{j=x_i-k_r+1}^{x_i+k^*} b_{-i}(j) \\ &= v_i(x_i + k^*) - v_i(x_i) + \sum_{j=x_i-k_r+1}^{x_i} b_{-i}(j) \\ &\leq v_i(x_i + k^*) - v_i(x_i - k_r) \\ &\quad - \left(v_i(x_i) - v_i(x_i - k_r) - \sum_{j=x_i-k_r+1}^{x_i} b_{-i}(j) \right) \\ &\leq v_i(x_i + k^*) - v_i(x_i - k_r) \\ &\leq v_i(k^* + k_r) = v_i(k^* - r) = v_i(qg_i') \leq qv_i(g_i') \end{aligned}$$

となり，$w_i(g_i') < v_i(g_i')$ が得られる．しかし，これも式 (60) に矛盾する．

したがって，$v_i(x_i + k) - v_i(x_i) > \sum_{j=1}^{k} b_{-i}(x_i + j)$ を満たす正整数 k $(1 \leq k \leq m - x_i)$ は存在しないこと，すなわち，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ は安定であることが得られた． □

8. おわりに

本論文では，定義 2.4 を満たす対称的な評価関数組 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ にナッシュ均衡が存在するための必要十分条件（定理 3.1）を与えた．最後に，定義 2.6 の式 (8) で与えた関数 $w_i(k_i)$ がすべての i と k_i で $w_i(k_i) = v_i(k_i)$ となる（v_i が対称的で劣モジュラーであるときはこれを満たす）ときには，常にナッシュ均衡が存在し，そのナッシュ均衡も容易に多項式時間で求めることができることを注意しておく [3]．

謝辞　本研究は日本学術振興会科学研究費および中央大学特定課題研究費の助成に基づいて行われたものである．

参考文献

[1] K. Bhawalkar and T. Roughgarden, Welfare guarantees for combinatorial auctions with item bidding, in: *Proc. of 22nd Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pp. 700–709, 2011.

[2] 梅田博之，浅野孝夫，二人プレイヤーのアイテム入札による組合せオークションのナッシュ均衡，情報処理学会研究報告，Vol.2012-AL-142, No.7, pp.1–8, 2012.

[3] 梅田博之，浅野孝夫，複数人プレイヤーのアイテム入札による組合せオークションのナッシュ均衡，日本オペレーションズ・リサーチ学会 2013 年春季研究発表会，2-B-6, pp. 156–157, 2013.