

国際計数センターのシンポジウムに出席して*

後藤 以紀**

昭和35年9月20日より24日までローマ大学で開催された国際計数センター主催のシンポジウムの模様を中心として報告します。ただし、個々の講演の内容については、いずれ報告が出版されるはずですから、それを御覧願います。

1951年 UNESCO の提唱により、近代的計数装置に関して国際的な規模で「1. 科学上の研究, 2. 教育, 3. 諮問的および計数的業務」の三つの任務を行なうものとして国際計数センターをローマに設立することが同年わが国および18カ国の参加のもとに協定されたのであります。当初わが国では東京に置くことを希望したのでありますが、まず欧州に置くことになり、英国など、既に計算機をもっている処には不用ですから、ローマが選定されたのであります。わが国は直ちにこの条約に批准しましたが、条約には10カ国の批准によって発効するように定めてあったために発効が手間取ったので、1958年より仮センターとして情報・技術の交換、技術者の養成、各国の技術的助成などに主眼を置き、日、英、米、共産圏などを含む11カ国より31の協力研究所 (corresponding institutions) などの強力な協力を得て活動を開始し、本センターへの移行の準備を着々進めております。わが国に対しても fellow として1959年度に電気試験所の高橋茂君、60年度に電電公社電気通信研究所の池野信一君が選ばれました。その他電子計算機に関する術語の選定も行なっています。シンポジウムは毎年開かれていまして、1958年は連立代数方程式などの数値解法について、1959年1月にはローマで偏微分方程式の数値解法について開催され、計数センターの建物で行なわれました。それには山下教授と共に出席し、私も発表をしました。つぎは今回のシンポジウムで、常微分方程式、積分方程式および微積分方程式に関する数値的取扱に関する研究発表であって、出席者は約200人、欧米各国より集まり、日本からは私と東大の森口繁一教

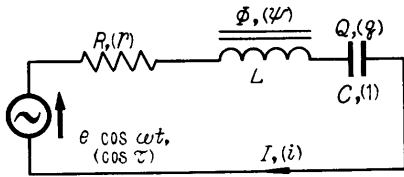
授とが出席しました。講演は54件で、1件大体30分位の研究発表に対して質問討論が随時行なわれましたが、全体を三つの部会に別け、第1部会は常微分方程式、第2部会は積分方程式または微積分方程式、第3部会は応用となっています。なお、研究発表の他に一般報告として、ドイツの A. Walther 教授により「積分および微積分方程式の数値的取扱」、フランスの F. Genuys 氏により「常微分方程式の数値的取扱」、アメリカの老大家 R. Courant 博士により「数値解析および計算法に関する教育の問題」に関する講演が行なわれました。各部会はそれぞれ並列に午前9時または10時より12時過ぎまでと午後5時より8時位までとになりますので、昼食後より5時までが休息で、イタリア人は昼寝するそうですが、もう、それ程の暑さでもなく、観光バスで遠出する暇はなし、われわれには中途半端です。前回の場合は午後の休息がもっと短くて夕方にはだいたい講演が終わりました。私は常微分方程式の部会で講演をし、半日座長を勤めた関係で、他の部会にはほとんど出ず、結局、誰でも1/3より講演を聴けないわけですから、全体のことは判りませんが、他の出席者の感想と、題目とを総合しますと、一般的な数値計算法が多く、計算機に特有なものは少ないように感じました。たとえば反復近似による解法とか、丸めその他の誤差の評価などで、丁度、日本の数学会の応用数学科会の講演に似ていました。応用部会では原子物理学に現われる問題とか、太陽、地球、月、vehicle の四体問題の三次元軌道の問題などがありました。計算機としてはローマ大学の数学研究所の IBM 1620 による Volterra 形積分方程式の解法の実演がありました。

あと時間が短いので私の発表しました論文の概要を報告しておきましょう。

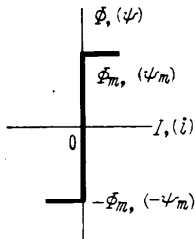
「ある非線形微分方程式の一般解について」と題するもので、折線形の磁気飽和特性を有するインダクタンス L と静電容量 C と抵抗 R とを直列にした回路に正弦波交流電源をつないだときに発生する分数調波などの非線形振動の厳密解を求めるものであります (第1

* Attending the Fourth Symposium Organized by the Provisional International Computation Centre, by Mochinori Gotô

** 工業技術院



第 1 図



第 2 図

図参照)。折線形特性はここでは最も簡単な第 2 図の場合を扱いますが、計算機を使用できるので、もっと複雑な場合も可能であります。実験または近似解によっては、このような回路で分数調波の発生することは知られています。その他にはどんな非線形振動が発生するのでしょうか。非線形微分方程式は、厳密解を求めうるのは極特殊な場合に限られるため、たとえ第 1 近似解より順次に近似を進めて正しい解に到達し得たとしても、それは概して始めの第 1 近似解に近いものとなり、他にどのような解があるか不明となり、始末の悪いものであります。それで、まず単純化された第 2 図の特性に対してでも、厳密解の全貌を捕捉しようと企てたのであります。その結果として顕著な例を挙げると「基本波または分数調波に近いがその位相が漸次ずれて永久に同じ波形に戻らない不減衰振動 (第 3 図参照)」や「あるサイクルの間は上記のような不減衰振動を繰返しているうちに適当な電流位相の範囲に入り込むと、その後は普通の過渡現象に変わって、普通の安定週期解 (電源周波数を有する定常状態) に漸近する振動 (第 4 図参照)」などが存在することが確認されました。第 1 図の回路に対しては

$$\frac{d\Phi}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = e \cos \omega t, \quad I = \frac{dQ}{dt} \quad (1)$$

なる微分方程式が成立しますが、これを書き換えると

$$\frac{d\psi}{d\tau} + ir + q = \cos \tau, \quad i = \frac{dq}{d\tau} \quad (2)$$

ここに $\tau \equiv \omega t, q \equiv \frac{Q}{eC}, \psi \equiv \frac{\omega\Phi}{e}, i \equiv \frac{I}{\omega eC},$

$$r \equiv \omega CR, q_n \equiv (q)\tau = \tau_n, \psi_m \equiv \omega\Phi_m/e$$

となり、これを解くと、つぎの厳密解をうる。

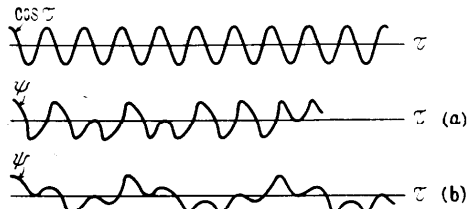
(i) $\tau_1 \leq \tau < \tau_2: i = 0,$

$$-\psi_m \leq \psi = \sin \tau - \sin \tau_1 - (\tau - \tau_1)q_1 \pm \psi_m \leq \psi_m$$

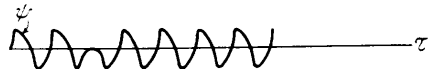
(ii) $\tau_2 \leq \tau \leq \tau_3: \psi = \mp \psi_m,$

$$ir = r \frac{dq}{d\tau} = \frac{r^2}{1+r^2} \cos \tau - \frac{r}{1+r^2} \sin \tau$$

$$-\left(q_1 - \frac{1}{1+r^2} \cos \tau_2 - \frac{r}{1+r^2} \sin \tau_2 \right) e^{-(\tau-\tau_2)/r} \quad (3)$$

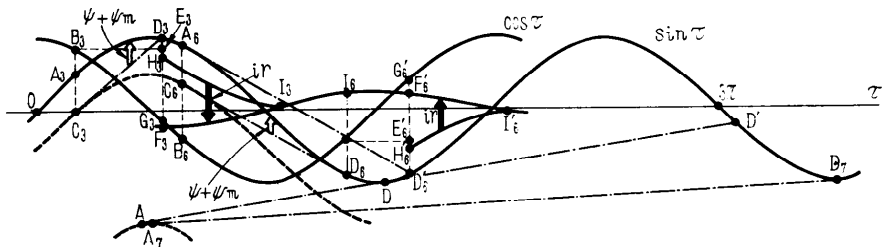


第 3 図

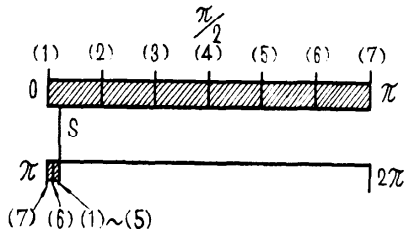


第 4 図

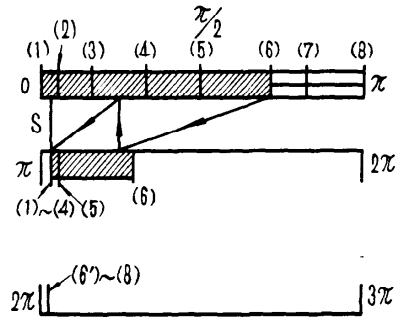
第 5 図は上記の解の各項の関係を図式的に表わしたものであります。曲線 $B_3G_3B_6G_6'$ は $\cos \tau$ [式 (2) の起電力]。曲線 $A_3D_3A_6D_6'$ は $\sin \tau$ 。曲線 C_3C_6 は $\sin \tau - 2\psi_m$ 。その切線 C_3D_3 より測った曲線 $\sin \tau$ の値は磁束鎖交数 $\psi + \psi_m$ [矢印]。 $C_3A_3 = 2\psi_m$ ですから、 $\psi = \psi_m$ の状態 [$\Phi = \Phi_m$, 式 (3) では $\tau = \tau_1$] から現象が始まる場合を考えると、 ψ は減り始め D_3 で $\psi = -\psi_m$ に達します [式 (3) では $\tau = \tau_2$]。それから負の電流が流れ始めます [第 2 図参照]。曲線 $F_3I_3I_6F_6'I_6'$ は ir の式の右辺の項 $(r^2 \cos \tau - r \sin \tau) / (1+r^2)$ を表わし、 E_3 の高さは B_3 と同じで電荷 q の



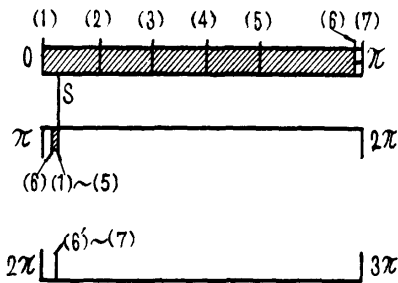
第 5 図



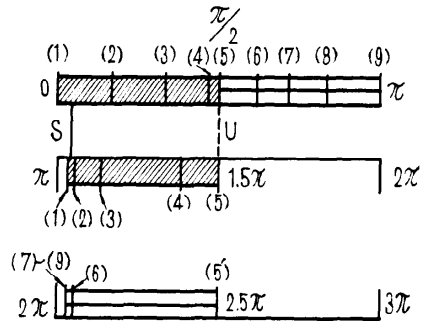
第 6 図 $r=0.1, \psi_m=0$



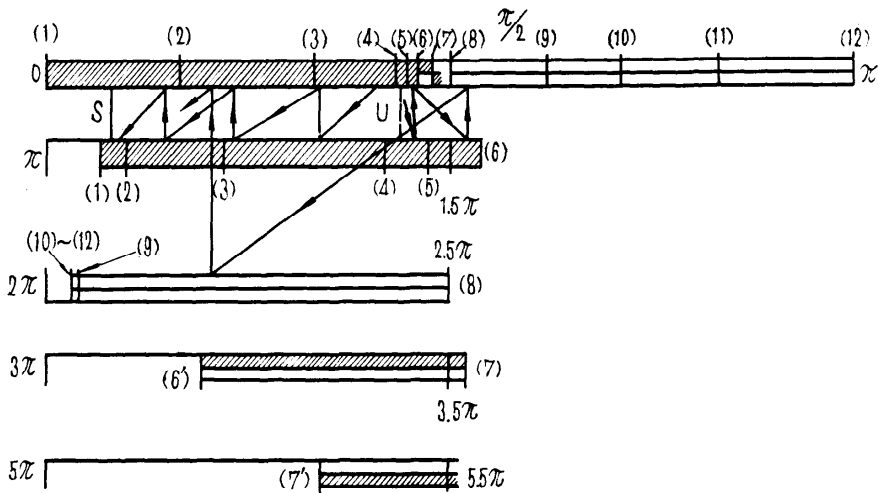
第 8 図 $r=0.1, \psi_m=0.25$



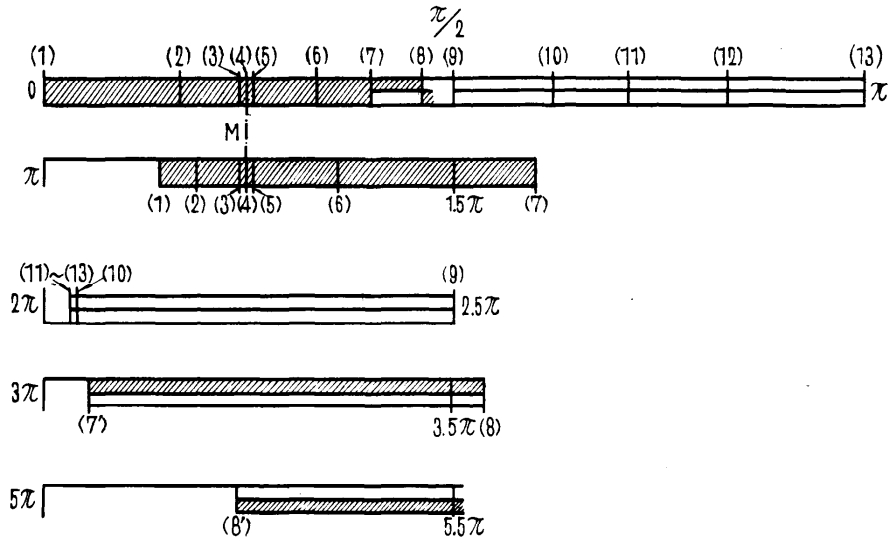
第 7 図 $r=0.1, \psi_m=0.0001$



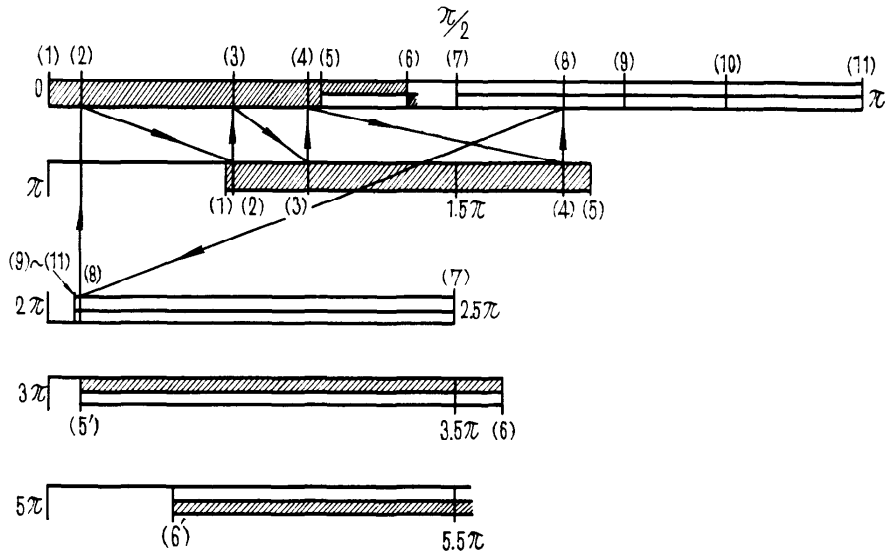
第 9 図 $r=0.1, \psi_m=1$



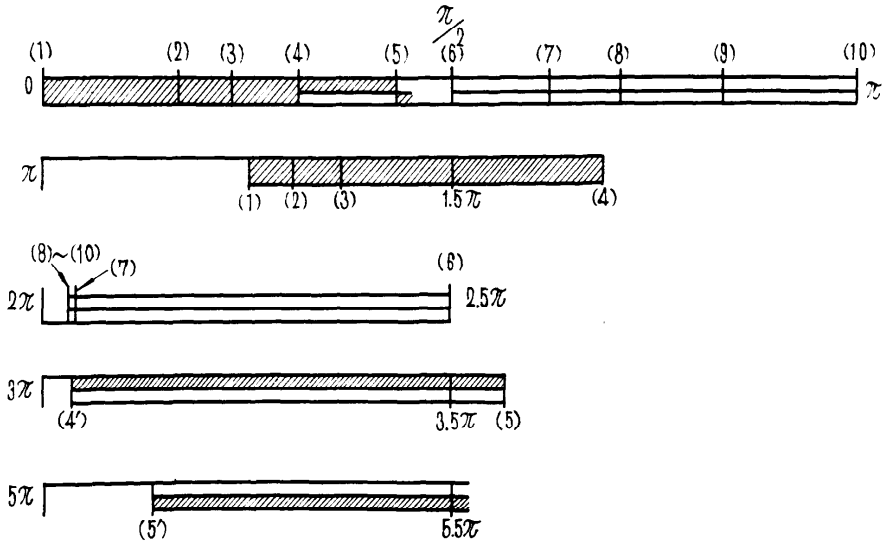
第 10 図 $r=0.1, \psi_m=1.25$



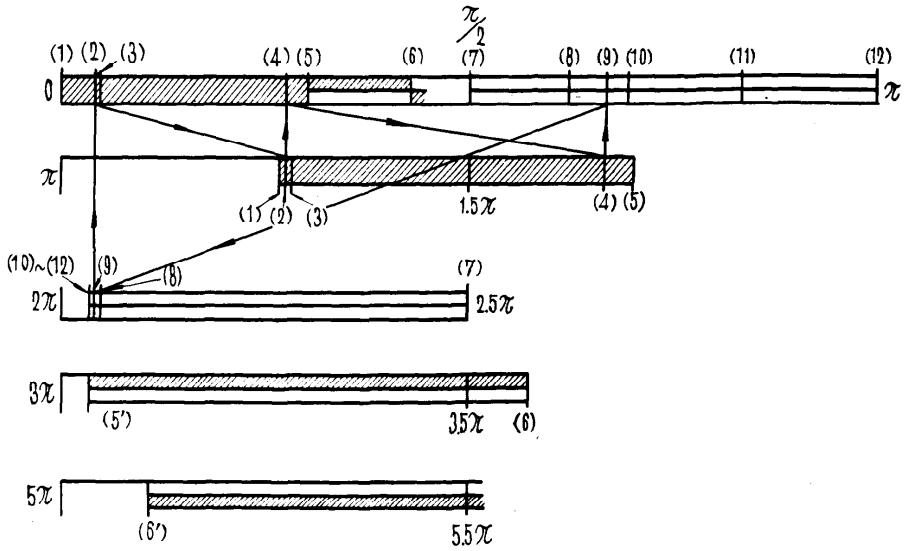
第 11 図 $r=0.1, \phi_m=1.571$



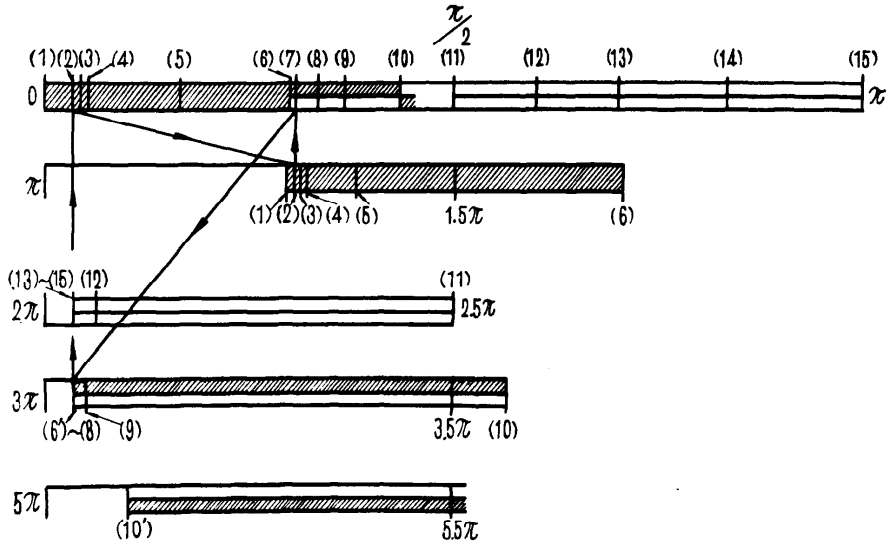
第 12 図 $r=0.1, \phi_m=1.894$



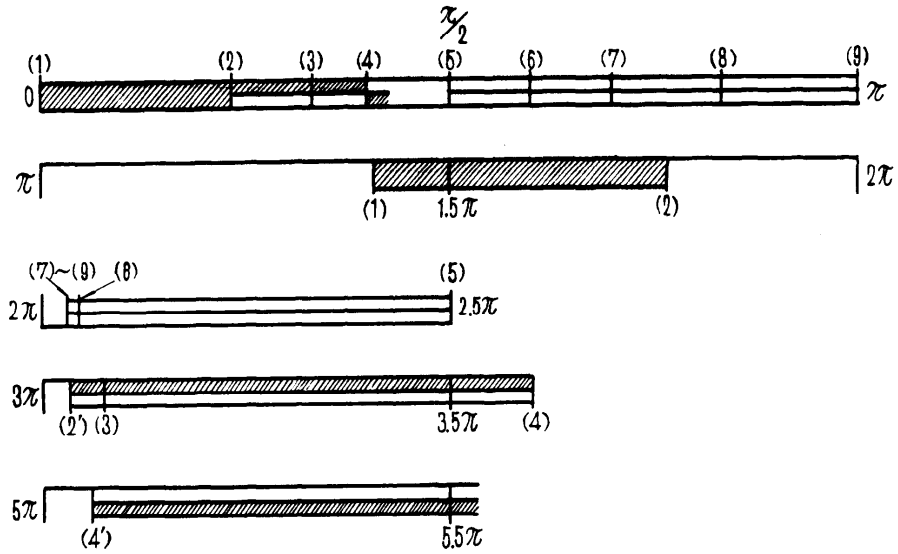
第 13 図 $r=0.1, \psi_m=2$



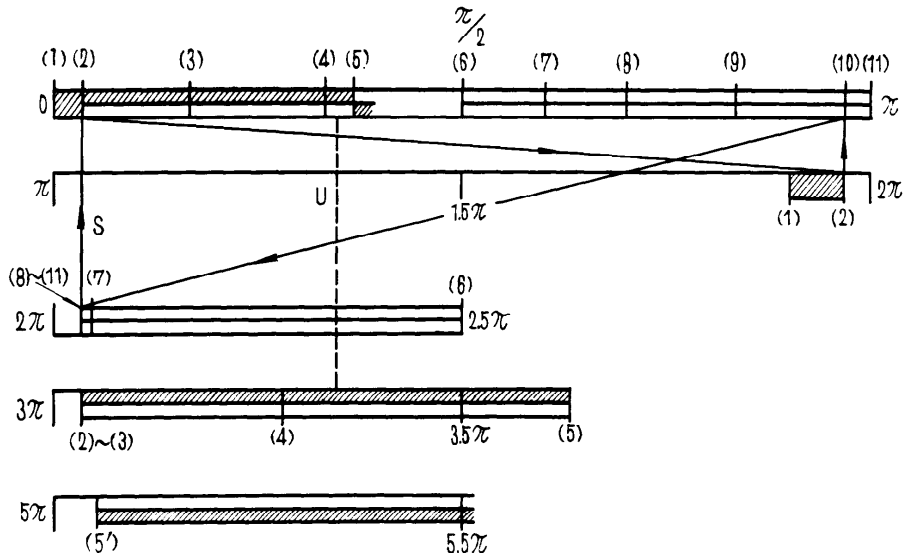
第 14 図 $r=0.1, \psi_m=2.135$



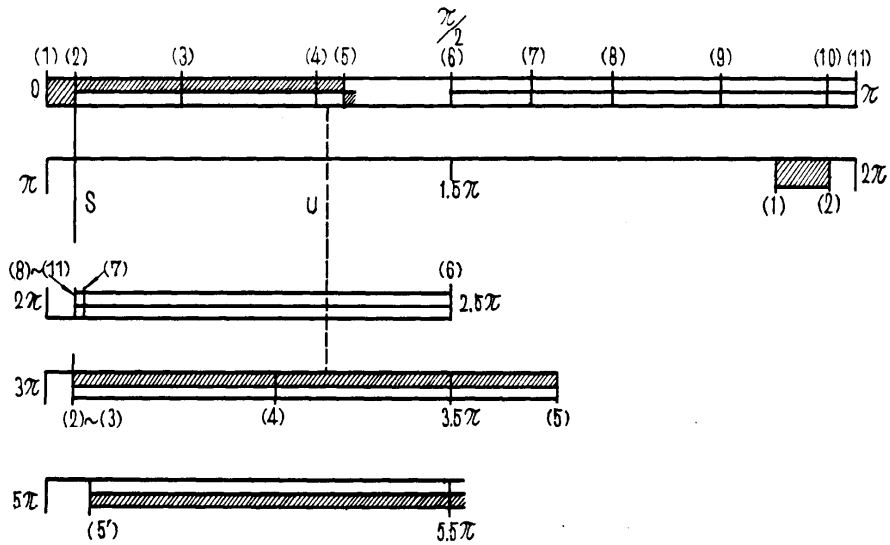
第 15 図 $r=0.1, \phi_m=2.14$



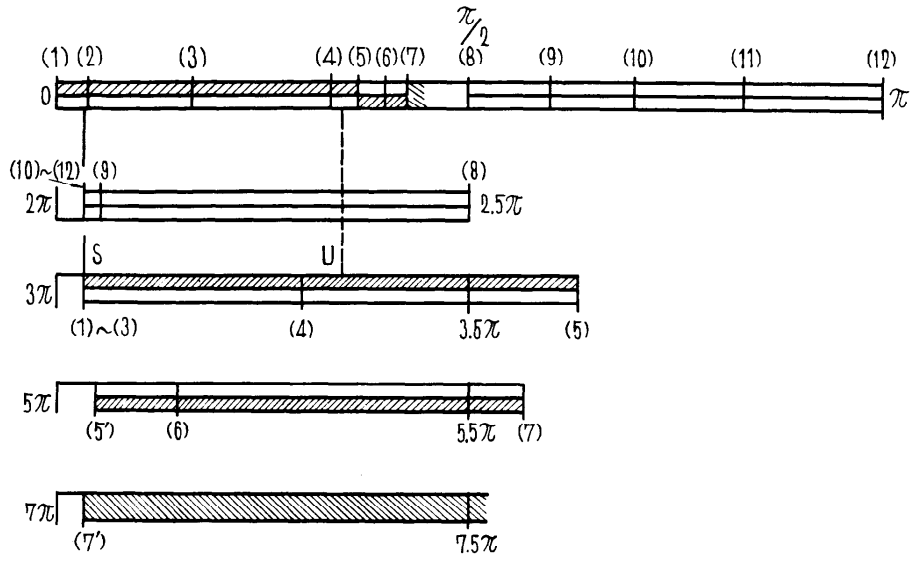
第 16 図 $r=0.1, \phi_m=2.5$



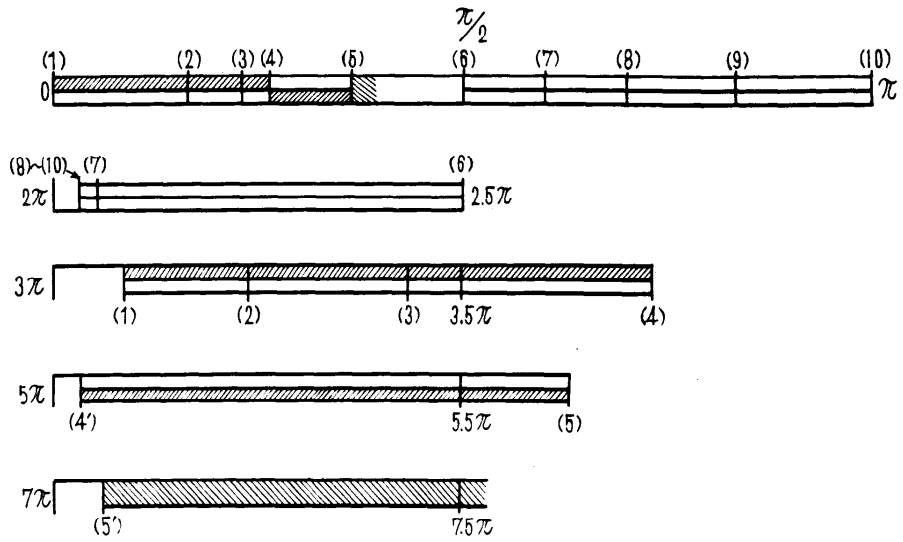
第 17 図 $r=0.1, \psi_m=3.124-0$



第 18 図 $r=0.1, \psi_m=3.124+0$



第 19 図 $r=0.1, \phi_m=\pi$



第 20 図 $r=0.1, \phi_m=4.5$

第 1 表

ϕ_m	0 (第 6 図)	0.0001 (第 7 図)	0.25 (第 8 図)
(1)	0	$\pi+0.0997$	0
(2)	0.5	"	0.1
(3)	1	"	0.5
(4)	$\pi/2$	"	1
(5)	$\pi-1$	"	$\frac{\pi}{2}$
(6)	$\pi-0.5$	$\pi+0.0982$	$\pi-0.0670$
(7)	π	π	$2\pi+0.0997$
(8)			π
ϕ_m	1 (第 9 図)	1.25 (第 10 図)	1.571 (第 11 図)
(1)	0	$\pi+0.1154$	0
(2)	0.5	$\pi+0.1510$	0.5
(3)	1	$\pi+0.3970$	1
(4)	1.5	$\pi+1.1700$	1.35
(5)	$\pi/2$	$\frac{1.5\pi}{2}$ $\frac{2.5\pi}{2}$	1.4
(6)	$\frac{\pi}{2}+0.3670$	$2\pi+0.1288$	$\frac{\pi}{2}-0.1524$
(7)	$\frac{\pi}{2}+0.6350$	$2\pi+0.0997$	$\frac{\pi}{2}-0.0528$
(8)	$\pi-0.5$	"	$\pi/2$
(9)	π	"	$\frac{\pi}{2}+0.3670$
(10)		$\frac{\pi}{2}+0.6350$	$2\pi+0.0997$
(11)		$\pi-0.5$	"
(12)		π	"
(13)			π
ϕ_m	1.894 (第 12 図)	2 (第 13 図)	2.135 (第 14 図)
(1)	0	$\pi+0.6841$	0
(2)	0.1125	$\pi+0.6933$	0.5
(3)	0.6933	$\pi+1.0506$	0.7
(4)	1.0506	$\pi+1.9717$	$\frac{\pi}{2}-0.5716$
(5)	$\frac{\pi}{2}-0.513$	$\frac{1.5\pi}{2}+0.513$ $\frac{3\pi}{2}+0.1003$	$\frac{\pi}{2}-0.2091$
(6)	$\frac{\pi}{2}-0.187$	$\frac{3.5\pi}{2}+0.187$ $\frac{5\pi}{2}+0.469$	$\pi/2$
(7)	$\pi/2$	2.5π	$\frac{\pi}{2}+0.3670$
(8)	1.9717	$2\pi+0.1125$	$\frac{\pi}{2}+0.6350$
(9)	$\frac{\pi}{2}+0.6350$	$2\pi+0.0997$	$\pi-0.5$
(10)	$\pi-0.5$	"	π
(11)	π	"	π

ϕ_m	2.14 (第 15 図)	2.5 (第 16 図)	3.124 (第 17, 18 図)
(1)	0	0	0
(2)	0.0997	$\pi - 0.8634$	0.0997
(3)	0.1	1	0.5
(4)	0.11	$\pi - 0.3133$	1
(5)	0.5	π	$\pi - 0.446$
(6)	0.92	$\pi + 0.3670$	π
(7)	0.9202	$\pi + 0.6350$	$\pi + 0.3670$
(8)	0.924	$\pi - 0.5$	$\pi + 0.6350$
(9)	1	π	$\pi - 0.5$
(10)	$\frac{\pi}{2} - 0.238$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi - 0.0997$
(11)	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π
(12)	$\frac{\pi}{2} + 0.3690$	$\frac{\pi}{2}$	π
(13)	$\frac{\pi}{2} + 0.6350$	$\frac{\pi}{2}$	π
(14)	$\pi - 0.5$	π	π
(15)	π	π	π

ϕ_m	π	(第 19 図)	4.5 (第 20 図)
(1)	0	$3\pi + 0.0997$	0
(2)	0.1	"	0.5
(3)	0.5	"	0.7
(4)	1	$3\pi + 0.8993$	$\frac{\pi}{2} - 0.7613$
(5)	$\frac{\pi}{2} - 0.450$	$\begin{cases} 3.5\pi + 0.450 \\ 5\pi + 0.103 \end{cases}$	$\begin{cases} 3.5\pi + 0.7613 \\ 5\pi + 0.0997 \end{cases}$
(6)	1.2	$5\pi + 0.4401$	$\frac{\pi}{2} - 0.4483$
(7)	$\frac{\pi}{2} - 0.2715$	$\begin{cases} 5.5\pi + 0.2715 \\ 7\pi + 0.0997 \end{cases}$	$\begin{cases} 5.5\pi + 0.4483 \\ 7\pi + 0.136 \end{cases}$
(8)	$\pi/2$	2.5π	$\frac{\pi}{2}$
(9)	$\frac{\pi}{2} + 0.3670$	$2\pi + 0.1288$	$\pi - 0.5$
(10)	$\frac{\pi}{2} + 0.6350$	$2\pi + 0.0997$	π
(11)	$\pi - 0.5$	"	"
(12)	π	"	"

初期値 C_3B_3 であり、 $E_3H_3 = G_3F_3$ で H_3F_3 は ir の最初の値を表わします。曲線 F_3I_3 より曲線 H_3I_3 を減じた値〔矢印〕が $ir < 0$ を表わし、 I_3 に達して $i = 0$ となります。このときの $\psi = -\psi_m$ で、それから ψ が増し始めることは C_3A_3 の状態と正反対であります。以下同様。 A_6 の位相から始まる場合は最初 $\psi = \psi_m$ で、 D_6 に達すると $\psi = -\psi_m$ になり、再び増して D_6' で $\psi = \psi_m$ に戻ることが前例と異なる点であります。つぎに $ir > 0$ は最初 $H_6'F_6'$ で I_6' に達して 0 となります。

第 8 図の $0 \sim \pi$ 上の (1)~(8) は A の位相の例 (r

$= 0.1$, $\psi_m = 0.25$) を示し、第 5 図の A_3 はこの (3) の位相〔式 (3) の $\tau = \tau_1$ 〕を示し、 $(\psi)_{t=\tau_1} = \psi_m$ 、 $(q)_{t=\tau_1} = \cos \tau_1$ なる初期条件の下に A_3 から現象が始まった場合には、 $i = 0$ となる位相 I_3 〔式 (3) の $\tau = \tau_3$ 〕は第 8 図の $\pi \sim 2\pi$ 上の位相 (3) で示されます。この場合は位相 (1)~(4) はほとんど一致するのでありまして、もしも、第 8 図の斜線区間 (1)~(6) の間の任意の位相から始めると (たとえば矢の線のように) 約半サイクルで $\pi \sim 2\pi$ の対応する番号の位相で $i = 0$ となり、つぎの半サイクルも同様で、結局、S の位相に安定に収束します。すなわち S に安定解 (電源周波数の) があることが判ります。第 8 図 $0 \sim \pi$ 上の位相 (6) は第 5 図の A_6 の位相を示し、第 8 図 $\pi \sim 2\pi$ 上の (6) は第 5 図の I_6 の位相を示し、 $2\pi \sim 3\pi$ 上の (6') は第 5 図 I_6' の位相を示します。 ψ の初期値 ψ_0 が異なる場合、すなわち $0 \leq \psi_0 < \psi_m$ なる場合は、 A_3D_3 の途中から出発したとみられるので、やはり前の理論が使われます。また $(q)_{t=\tau_1} \neq \cos \tau_1$ なる場合には、(2) 式より

$$(q)_{t=\tau_1} = \cos \tau_1 - \left(\frac{d\psi}{d\tau} \right)_{t=\tau_1} \quad (4)$$

となるので、 $(d\psi/d\tau)_{t=\tau_1} \neq 0$ となり、 D_3 と I_3 との位相がずれますが、 I_3 では $d\psi/d\tau = 0$ なるため、以後は上記の理論が適用されます。

第 6, 7 図は ψ_m の極小さい場合、第 10 図では U なる位相の両側の任意の位相より始めると、結局 S なる

る安定位相に収束します。この不安定解 U は $\psi_m=1$ [第9図より現われ、第10図では(4)と(5)との間に存在します。この場合は、 S の左または右の U との間から始まると、単純な過渡振動を経て安定定常振動 S (電源周波数の) に収束しますが、 U の右側から始まると、複雑な不減衰振動に類似の過渡現象を経て、結局 S に到達します。第5図の A, D, D' は、 $\psi_m=1.25$ の場合(第10図参照)の A_6, D_6, D_6' を示し、 A_7, D_7 も同様。一般に $\psi_m > 1$ の場合には $-\psi_m < \psi < \psi_m, i=0$ なる小振幅の安定定常解(電源周波数)も別に存在します。第11図は $r=0.1, \psi_m=1.571$ で、 U と S とが一致して準安定解 M となる場合で、 $r=0.1, \psi_m > 1.571$ に対しては、それも消失するので、電源周波数の安定解は上記の小振幅のもの他は存在しません。第12図は $r=0.1, \psi_m=1.894$ は位相(2)-(3)-(4)-(8)-(2)の順序で変化する $1/5$ 調波の安定週期解があります。

$\psi_m=2$ の近傍では既に単純な位相の安定週期解は無く、一般には不減衰振動を発生します。

$\psi_m=2.135$ の近傍では位相(2)-(4)-(9)-(2)の順序で変化する $1/2$ 調波が安定に存在します。

$\psi_m=2.14$ の近傍では位相(2)-(7)-(2)の順序で変化する $1/2$ 調波が安定に存在します。

$\psi_m=2.5$ を経て、 $\psi_m=3.124$ の近傍では $1/3$ 調波の安定解が存在します。

$\psi_m=\pi$ の近傍では $\pi \sim 2\pi$ の位相は消失して、単純な $1/3$ 調波の安定解 S および不安定解 U が存在します。これは $1 < \psi_m < 1.571$ における電源周波数の安

定、不安定解と同様で、 ψ_m をさらに増せば、両者は一致して準安定解となり、ついに消失して後には、 $1/3$ 調波に近い不減衰振動となります。以下同様。

第1表は、電気試験所の ETL Mark II によつて計算した、 τ_1 と τ_3 との位相関係を示します。通常は計算機によってパラメータの特定な値に対する解を求めたり、近似解の点をつないだりするのが普通ですが、パラメータを変化して厳密解の種類がどのように列んでいるかを計算機によって求めるならば、純解析的の一般解が求められなくとも解の全貌を把握することができるわけであり、今後はこのような使い方が発展するでしょう。

森口さんののは、本会誌第1巻第2号 p. 70 に掲載されております講演と同種のものでありまして、計算機で方程式の解などを反復法を用いて求める際に丸めの誤差に基因して答が振動する場合や、収束する場合に関する理論で、微分方程式などへの応用例を挙げて説明されました。ほとんど総ての人の講演は予稿なしでありましたが、森口さんは、非常に綺麗な図面を何枚も使って判り易く説明され、好評を博しました。スライドがよいか図面がよいか大部検討しましたが、同時に何枚も見えるということで図面にしたのが成功しました。

帰途マンチェスター大学に立寄り、例の高速度計算機 Muse の試作状況を見て来ましたが、クリスマスまでに一応仕上げ、翌年のクリスマスまでには Ferranti で実用化すると言って張切っていました。