連立一次方程式の解法について*

清水留三郎**

あらまし

連立一次方程式 $Ax=b$ が与えられたとき，A と b が貯えられている場所だけを使って（ほかに若干の作業用番地もいるが）係数の行列 A の逆行列 A^{-1} と連立一次方程式の解 $A^{-1}b$ とを同時に計算する方法の一つを示す．この方法は列の交換を伴なう消去法と結果的には一致する．さらにその方法を導く過程を利用して消去法の幾何学的解釈を与える．

1. はじめに

行列 A が与えられたとき，A が貯えられている場所だけを使って（ほかに作業用番地も若干いるが）逆行列 A^{-1} を計算する方法の一つに Ershov の篩法がある[1,2]．

ここではその篩法の算法が連立一次方程式の解法としても使えることを示し，その方法を述べる．またその方法が消去法と結果的には一致することを論じ，そこから消去法の幾何学的解釈を与える．

第2節では，篩法の基礎をなす補足法について説明し，第3節では逆行列を計算するための Ershov の篩法を紹介する．以上をもとにして第4節で連立一次方程式の解を計算するための篩法を導き，第5節でその流れ図を与える．第6節では例題を扱い，第7節で消去法との関係および幾何学的解釈を与える．

2. 逆行列を計算するための補足法[1)]

逆行列を計算するための補足法は次のような考え方にもとづいている．B をその逆行列 B^{-1} がわかっているような任意の行列，u および v を任意の列ベクトルとし，与えられた行列 A を，

$$A=B+uv'$$

と表わすことができるとする．ここで v' は列ベクトル v を転置してできる行ベクトルである．したがって

$$A^{-1}=(B+uv')^{-1}.$$

ところが

$$\begin{aligned}(B+uv')^{-1}&=B^{-1}(E+uv'B^{-1})^{-1}\\&=B^{-1}\{E-uv'B^{-1}+u(v'B^{-1}u)v'B^{-1}\\&\qquad-u(v'B^{-1}u)^2v'B^{-1}+\cdots\cdots\}\\&=B^{-1}-B^{-1}uv'B^{-1}\{1-v'B^{-1}u+(v'B^{-1}u)^2-\cdots\cdots\}\\&=B^{-1}-\frac{B^{-1}uv'B^{-1}}{1+v'B^{-1}u}\end{aligned}$$

であるから，A の逆行列は次式から計算できる．

$$A^{-1}=B^{-1}-\frac{B^{-1}uv'B^{-1}}{1+v'B^{-1}u}. \qquad (1)$$

とくに行列 B を第 k 行を除いて行列 A とまったく同じ行列であるとすると，

$$A=B+e_kv'$$

である．ここで e_k は単位行列 E の第 k 列である．この場合に（1）式を適用すると，

$$\begin{aligned}A^{-1}&=B^{-1}-\frac{1}{1+v'(B^{-1}e_k)}(B^{-1}e_k)(v'B^{-1})\\&=B^{-1}-\frac{1}{1+v'\beta_k}\beta_k(v'B^{-1}).\end{aligned}$$

ここで β_k は逆行列 B^{-1} の第 k 列である．逆行列 A^{-1} の第 j 列を α_j で表わすと，

$$\alpha_j=\beta_j-\frac{v'\beta_j}{1+v'\beta_k}\beta_k \qquad (2)$$

を得る．

補足法は次の手順で構成される．与えられた行列 A を行列の列

$$A_0(=E),\ A_1,\cdots\cdots,\ A_n(=A)$$

の最後の項とみなす．この列の第 k 項 A_k は，A_{k-1} の第 k 行を与えられた行列 A の第 k 行と取り替えることによって得られる．

$$\begin{cases}A_1=A_0+e_1v_1'\\A_2=A_1+e_2v_2'\\\ \vdots\quad\ \vdots\\A_n=A_{n-1}+e_nv_n'.\end{cases}$$

ここで，

$$v_k'=(a_{k1},\cdots\cdots,a_{k,k-1},a_{kk}-1,a_{k,k+1},\cdots\cdots,a_{kn})$$

である．$A_0=E$ の逆行列はわかっているから A_1 の逆行列もわかる．したがって $A_2,\cdots\cdots,A_n$ の逆行列

---

* On a method of solving simultaneous linear equations, by Tomesaburo Simizu (Faculty of Engineering, University of Tokyo)

** 東京大学工学部

もわかる．このようにして上に述べた手順を n 回線返して逆行列 A^{-1} が得られる．このとき（2）式は，

$$\alpha_j^{(k-1)}=\alpha_j^{(k)}-\frac{v_k'\alpha_j^{(k-1)}}{1+v_k'\alpha_k^{(k-1)}}\alpha_k^{(k-1)} \quad (3)$$

と書ける．

3. 逆行列を計算するための篩法[1]

補足法でも $A_0=E$ を貯えて置く場所が A の場所のほかに必要であるが，別の手続きによって A_0 の場所をとくに設けないでもその算法は実行できる．

$$C_{ij}^{(k)}=v_i'\alpha_j^{(k)}$$

とすると，(3) 式は

$$\alpha_j^{(k)}=\alpha_j^{(k-1)}-\frac{C_{kj}^{(k-1)}}{1+C_{kk}^{(k-1)}}\alpha_k^{(k-1)}. \quad (4)$$

と書ける．この（4）式の両辺に v_i' を左からかけると，

$$C_{ij}^{(k)}=C_{ij}^{(k-1)}-\frac{C_{kj}^{(k-1)}}{1+C_{kk}^{(k-1)}}C_{ik}^{(k-1)}.$$

行列 $C_k=\{C_{ij}^{(k)}\}$ の第 j 列を $\gamma_j^{(k)}$ で表わすと，

$$\gamma_j^{(k)}=\gamma_j^{(k-1)}-\frac{C_{kj}^{(k-1)}}{1+C_{kk}^{(k-1)}}\gamma_k^{(k-1)} \quad (5)$$

こうして A_{k-1}^{-1} から A_k^{-1} を計算する算法とまったく同じ算法によって C_{k-1} から C_k が計算される．

行列 A_k^{-1} から行列 A_{k+1}^{-1} を（また C_k から C_{k+1} を）計算するためには，行列 A_k^{-1} のほかに行列 C_k の第 $k+1$ 行が必要である．それを（5）式によって計算するには行列 C_{k-1} の第 k 行が必要である．このことから行列 C_k の最初の k 行はあとの計算には不要であることがわかるから，それを計算する必要はない．一方行列 A_k^{-1} については，

$$\alpha_{ij}^{(k)}=\delta_{ij},\ i>k$$

であるから，最初の k 行だけを計算すれば，十分である．したがって，A_k^{-1} と C_k とから必要な行だけを篩い分けて，行列 S_k と $\tilde{S}_k$ とを導入する．このうち前者 S_k は行列 A_k^{-1} の最初の k 行と C_k のあとの n-k 行とからなる．行列 $\tilde{S}_k$ は S_k の第 $k+1$ 行を単位行列の第 $k+1$ 行に取り替えて得られる．

式（4）および（5）によって行列 S_k は行列 $\tilde{S}_{k-1}$ から次式によって得られる．

$$\sigma_j^{(k)}=\tilde{\sigma}_j^{(k-1)}-\frac{\sigma_{kj}^{(k-1)}}{1+\sigma_{kk}^{(k-1)}}\tilde{\sigma}_k^{(k-1)}. \quad (6)$$

ここで $\sigma_j^{(k)}$ は行列 S_k の第 j 列を，$\tilde{\sigma}_j^{(k-1)}$ は $\tilde{S}_{k-1}$ の第 j 列を表わす．最初の行列 S_0 はもちろん

$$S_0=C_0$$
$$=\{v_i'\alpha_j^{(0)}\}$$
$$=A-E$$

で与えられる．こうして得られた行列 S_n は，逆行列 A^{-1} に等しい．

4. 連立一次方程式を解くための篩法

連立一次方程式

$$A\chi=b$$

の解を計算するために，第3節で述べた篩法を適用する．

補足法の手順と同じように，解 $A^{-1}b$ をベクトルの列

$$\chi^{(0)}(=0),\ \chi^{(1)},\cdots\cdots,\chi^{(n)}(=A^{-1}b)$$

の最後の項とみなす．このベクトルの列に対応して

$$\gamma^{(k)}=A\chi^{(k)}-b$$

で定義される残差ベクトルの列

$$\gamma^{(0)}(=-b),\ \gamma^{(1)},\cdots\cdots,\gamma^{(n)}(=0)$$

が得られる．

χ の列の第 k 項$\chi^{(k)}$ は，$\chi^{(k-1)}$ から次の式によって得られる．

$$\chi^{(k)}=\chi^{(k-1)}-\frac{\gamma_k^{(k-1)}}{1+C_{kk}^{(k-1)}}\alpha_k^{(k-1)}. \quad (7)$$

ここで $\gamma_k^{(k-1)}$ は残差ベクトル $\gamma^{(k-1)}$ の k 番目の成分である．列ベクトル $\chi^{(k)}$ の j 番目の成分を $\chi_j^{(k)}$ で表わすと，（7）式から

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}\chi_j^{(k)}=\sum_{j=1}^n a_{ij}\chi_j^{(k-1)}-\frac{\gamma_k^{(k-1)}}{1+C_{kk}^{(k-1)}}\sum_{j=1}^n a_{ij}\alpha_{jk}^{(k-1)}.$$

したがって，

$$\gamma_i^{(k)}=\gamma_i^{(k-1)}-\frac{\gamma_k^{(k-1)}}{1+C_{kk}^{(k-1)}}\sum_{j=1}^n a_{ij}\alpha_{jk}^{(k-1)}$$

が得られる．ところが右辺の第2項の積和は，

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}\alpha_{jk}^{(k-1)}=\begin{cases}0, & i<k,\\ C_{ik}^{(k-1)}+\delta_{ik}, & i\geqq k\end{cases}$$

である．なぜならば，$\alpha_{jk}^{(k-1)}$ が A_{k-1} の逆行列であることから上の場合が得られ，$i\geqq k$ の場合は

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}\alpha_{jk}^{(k-1)}=v_i'\alpha_k^{(k-1)}+\alpha_{ik}^{(k-1)}$$
$$=C_{ik}^{(k-1)}+\delta_{ik}^{(k-1)}$$

であるからである．以上から

$$\gamma_i^{(k)}=\begin{cases}0, & i\leqq k,\\ \gamma_i^{(k-1)}-\dfrac{\gamma_k^{(k-1)}}{1+C_{kk}^{(k-1)}}C_{ik}^{(k-1)}, & i>k,\end{cases} \quad (8)$$

を得る．一方 $i>k$ のとき $\alpha_{ij}^{(k-1)}=0$ であるから，（7）式は

$\chi_i^{(k)}=0,\ i>k$

を与える．したがって，第3節と同じように $\chi^{(k)}$ と $\gamma^{(k)}$ とから必要な成分だけを篩い分けて，列ベクトル $\xi^{(k)}, \tilde{\xi}^{(k)}$ を導入することができる．このうち前者 $\xi^{(k)}$ は $\chi^{(k)}$ の最初の k 個の成分と，$\gamma^{(k)}$ のあとの n-k 個の成分とから成る．列ベクトル $\tilde{\xi}^{(k)}$ は $\xi^{(k)}$ の $k+1$ 番目の成分を0と取り替えて得られる．行列 S_k と $\tilde{S}_k$ とに第 $n+1$ 列としてこの $\xi^{(k)}$ と $\tilde{\xi}^{(k)}$ とをそれぞれつけ加えてできる矩形行列をあらためて S_k, $\tilde{S}_k$ とすると，式 (6), (7) および (8) によって，S_k は S_{k-1} から次の式によって得られる．

$$\sigma_j^{(k)}=\tilde{\sigma}_j^{(k-1)}-\frac{\sigma_{kj}^{(k-1)}}{1+\sigma_{kk}^{(k-1)}}\tilde{\sigma}_k^{(k-1)}. \quad (9)$$

最初の行列 S_0 はもちろん

$$S_0=[A-E,\ \gamma^{(0)}]$$
$$=[A-E,\ -b]$$

で与えられる．こうして得られた $(\sigma_1^{(n)},\cdots\cdots\ \sigma_n^{(n)})$ は係数の行列 A の逆行列 A^{-1} に，$\sigma_{n+1}^{(n)}$ は連立一次方程式 $A\chi=b$ の解 $A^{-1}b$ にそれぞれ等しい．

5. 篩法の算法

第4節で示した算法を

$$\begin{bmatrix} a_{11}\cdots\cdots a_{1m} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}\cdots\ a_{mm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \chi_{11}\cdots\cdots\chi_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ \chi_{m1}\cdots\ \chi_{mn} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_{1,m+1}\cdots\cdots a_{1,m+n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m,m+1}\cdots a_{m,m+n} \end{bmatrix}=0$$

を解く場合について，ALGOL 60 の procedure declaration の形でここに示す．

```
procedure linequs (a, m, n);
        array a;
        integer m, n;
begin integer i, j, k;
        array c[1 : m+n];
        real d, e;
        for i:=1 step 1 until m do
              a[i, i]:=a[i, i]-1;
        for i:=1 step 1 until m do
        begin for j:=1 step 1 until m+n do
              begin c[j]:=a[i, j];
                    a[i, j]: =0
              end;
              a[i, i]:=1;
              d:=1+c[i];
              for j:=1 step 1 until m do
                    begin e:=a[j, i]/d;
                          for k:=1 step 1 until 1
                                m+n do
                          a[j, k]:=a[j, k]-e×c[k];
                    end
              end
end linequs;
```

6. 例 題

連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

を篩法で解くと**第1表**のようになる．表の中で第 4, 8, 12 行には $\dfrac{\sigma_{kj}^{(k-1)}}{1+\sigma_{kk}^{(k-1)}}$ が与えられている．点線で囲われた行を δ_{kj} で置き換えると $\tilde{S}_k$ を得る．

第1表 篩法による解

$1+\sigma_{kk}^{(k-1)}$	S_k			ξ_k	計
	0	1	1	−1	1
	1	−2	0	0	−1
	1	1	−3	−3	−4
1	0	1	1	−1	1
	1	−1	−1	1	0
	1	−3	−1	1	−2
	1	0	−4	−2	−5
−2	−0.5	1.5	−0.5	−0.5	1
	0.5	0.5	−0.5	0.5	1
	0.5	−0.5	−0.5	0.5	0
	1	0	−4	−2	5
−3	−0.333	0	−1.333	0.667	1.667
	0.333	0.5	0.167	0.833	1.833
	0.333	−0.5	0.167	0.833	0.833
	0.333	0	−0.333	−0.667	−0.667

7. 消去法との関係および幾何学的解釈

第6節の例題を消去法で解くと，**第2表**のようになる．第1表と第2表とをくらべてみると，篩法は列の交換を伴なう消去法と同じであることがわかる．すなわち第2表の第3欄の点線より左の列を第2欄の対応する列と入れ換えて考えれば，枢軸より左上の主小行列は同じであり，枢軸を含む右下の主小行列は対角線要素が1だけ違うのを除いて同じであり，その他の部

第 2 表　消去法よる解

軸枢	χ_1	χ_2	χ_3				b	計
	1	1	1	1	0	0	1	5
	1	−1	0	0	1	0	0	1
	1	1	−2	0	0	1	3	4
1	1	1	1	1	0	0	1	5
	1	1	1	1	0	0	1	5
	0	−2	−1	−1	1	0	−1	−4
	0	0	−3	−1	0	1	2	−1
−2	0	1	0.5	0.5	−0.5	0	0.5	2
	1	0	0.5	0.5	0.5	0	0.5	3
	0	1	0.5	0.5	−0.5	0	0.5	2
	0	0	−3	−1	0	1	2	−1
−3	0	0	1	0.333	0	−0.333	−0.667	0.333
	1	0	0	0.333	0.5	0.167	0.833	2.833
	0	1	0	0.333	−0.5	0.167	0.833	1.833
	0	0	1	0.333	0	−0.333	−0.667	0.333

分は符号だけが反対である．

実際篩法では

$$\sigma_{ij}^{(1)}=\tilde{\sigma}_{ij}^{(0)}-\frac{\sigma_{1j}^{(0)}}{1+\sigma_{11}^{(0)}}\tilde{\sigma}_{i1}^{(0)}$$

$$=\begin{cases} 1-\dfrac{a_{11}-1}{a_{11}}=\dfrac{1}{a_{11}}, & i=j=1 \\ -\dfrac{a_{1j}}{a_{11}}, & i=1, j\neq 1 \\ a_{i1}-\dfrac{a_{11}-1}{a_{11}}a_{i1}=\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}, & i\neq 1,\ j=1 \\ (a_{ij}-\delta_{ij})-\dfrac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}, & i\neq 1,\ j\neq 1. \end{cases}$$

また消去法では篩法の $\xi^{(k)}$ のかわりに b のところには $\chi^{(k)}$ の最初の k 個の成分と $-r^{(k)}$ のあとの $n-k$ 個の成分とから成る列ベクトルが入る．

こうして篩法が消去法と同じであることがわかったから，第 4 節で述べたベクトルの列

$$\chi^{(0)}(=0),\ \chi^{(1)},\cdots\cdots,\ \chi^{(n)}(=A^{-1}b)$$

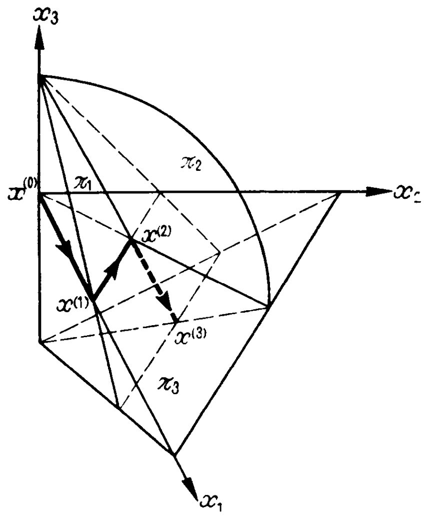
を n 次元ベクトル空間の一点とみることによって消去法の幾何学的解釈を下すことができる．

連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}\chi_1+a_{12}\chi_2+\cdots\cdots+a_{1n}\chi_n=b_1, \\ a_{21}\chi_1+a_{22}\chi_2+\cdots\cdots+a_{2n}\chi_n=b_2, \\ \quad\vdots \\ a_{n1}\chi_1+a_{n2}\chi_2+\cdots\cdots+a_{nn}\chi_n=b_n \end{cases}$$

の各方程式は n 次元空間においてそれぞれ $n-1$ 次の超平面を定義する．その超平面をそれぞれ $\pi_1, \pi_2,\cdots\cdots, \pi_n$ とする．

消去法および補足法の第 1 段は，$n-1$ 個の超平面 $\chi_2=0,\ \chi_3=0,\ \cdots\cdots,\ \chi_n=0$ の交わりとして得られる χ_1 軸に沿って超平面 π_1 に交わるまで進む．この交点が $\chi^{(1)}$ である．第 2 段は $n-1$ 個の超平面 $\pi_1, \chi_3=0,\ \cdots\cdots,\ \chi_n=0$ の交わりとして得られる直線に沿って超平面 π_2 に交わるまで進む．この交点が $\chi^{(2)}$ である．第 3 段は $n-1$ 個の超平面 $\pi_1, \pi_2, \chi_4=0,\ \cdots\cdots,\ \chi_n=0$ の交わりとして得られる直線に沿って，超平面 π_3 に交わるまで進む．この交点が $\chi^{(3)}$ である．等々．このようにして n 段目に n 個の超平面 $\pi_1, \pi_2,\ \cdots\cdots,\ \pi_n$ の交点として解が得られる．これを第 6 節の例題について図示すると，**第 1 図**のようになる．



第　1　図

参考文献

1) A.P. Ershov: On one method of inverting a matrix, Dokl. Academy of Science, USSR, 1955, Vol. 100, No. 2, pp. 209～221. (in Russian)

2) D.K. Faddeev, V.N. Faddeeva: Computational Method for Linear Algebra, Fizmatgiz, 1960, pp. 198～203. (in Russian)

(昭和 36 年 7 月 14 日受付)