海外での経験*

——ある動的計画型問題のプログラミング——

森　口　繁　一**

1. まえがき

私は1960年9月2日に羽田をたち，フランスで開かれた第2回国際オペレーションズ・リサーチ大会およびイタリアで開かれた国際計数センターのシンポジウムに出席した後，9月26日にニューヨークに着き，それから1961年6月7日まで数理統計学の客員教授としてコロンビア大学に滞在，そのあと8月23日まで統計学の客員教授としてスタンフォード大学に滞在し，8月30日帰国した.

その間，ヨーロッパおよびアメリカの諸大学の計算センターなどをいろいろ見学したが，その方の話は別の機会にゆずって，ここではコロンビア大学とスタンフォード大学とで行なったちょっとした計算の経験談を申し上げることとする.

2. 問　題

その計算というのは，未知関数 $V(a, b)$ に関する関数方程式

$$V(a, b)=\max\left[A\frac{\max(a, b)}{a+b},\ \frac{aV(a+1,b)+bV(a, b+1)}{a+b}-1\right] \qquad (1)$$

を解くことである.

この問題は，抜取検査や仮説検定に関係した次のような数理統計学上の問題として発生したものである[1]（問題はロビンズによる).

“壺の中に白い玉と黒い玉がはいっている. 黒玉の割合 p は未知である $(0\leq p\leq 1)$. 明日，この壺の中から玉を1個ランダムに取り出すことになっていて，われわれはその玉の色を予言しなければならない. もし予言が当たれば，ほうびとして A ドルもらうが，もし当たらなければ何ももらわない. p について，なにがしかの情報を得るために，今日，何回でも好きなだけ玉を抜いて（1回に1個ずつ，毎回もとへもどしながら）色をしらべることができる. ただしそのためには1回について1ドルずつ支払わなければならない. 問題：今日何回玉抜き実験を行ない，その結果どちらの色を予言すべきであるか？”

これは不完全な情報にもとづく決定の問題である. その扱い方には，事前分布が与えられたものとして，いわゆるベイズ解を求める方法と，最悪の場合を考えてミニマックス解を求める方法とがある. いま前者の立場に立ち，p の事前分布としてベータ分布

$$\frac{1}{B(a, b)}p^{a-1}(1-p)^{b-1} \qquad (2)$$

を仮定すると，ベイズ解を求める計算が（1）を解くことに帰着するのである. このとき，$V(a, b)$ は事前分布が（2）であるときのわれわれの最大期待利得を表わしている.（1）の右辺の［　］の中の第一の要素は，1回も玉抜きをしないで，事前分布だけの知識にもとづいて予言を行なうときの期待利得；第二の要素は少なくとも1回玉抜きを行なうとしたときの最大期待利得の式である. その1回の結果が黒であれば，事後分布は $(a+1, b)$ を母数とするベータ分布になり，白であれば $(a, b+1)$ を母数とするベータ分布になる. -1 という項は1回の玉抜きのために支払う1ドルである.

3. 考　察

関数方程式（1）を見ると，ある点 (a, b) での V の値が，その「隣」の点 $(a+1, b)$ および $(a, b+1)$ での V の値に依存することになっている. これは「動的計画（Dynamic Programming)」型の問題に共通な性質である. もしかりにこれが，(a, b) よりも原点に近い方の「隣」での値に依存するならば，（1）のような式を順ぐりに——再帰公式として——用いて $V(a, b)$ を算出することができるはずであるが，実際は原点より遠い方の「隣」での値に依存する

* Experience abroad (Programming of a problem of the Dynamic Programming type), by Sigeiti Moriguti (University of Tokyo). 昭和36年11月17日情報処理学会第2回大会での招待講演.

** 東京大学工学部.

のだから，遠い方から順々に逆もどりしてこなければならないわけである．しかしこれでは計算を始めることができない．

そこで最初に考えられたやり方は，玉抜きの回数を n 回以下に制限したときの最大期待利得

$$V_n(a,\ b)$$

というものを考えて，それについての方程式

$$V_n(a,\ b)=\max\left\{A\frac{\max\ (a,\ b)}{a+b},\ \frac{aV_{n-1}(a+1,\ b)+bV_{n-1}(a,\ b+1)}{a+b}-1\right\} \qquad (3)$$

を解くことである．これならば，十分遠い $(a,\ b)$ に対する

$$V_0(a,\ b)=A\frac{\max(a,\ b)}{a+b} \qquad (4)$$

から出発して逆もどりしてくれば，$V_n(a,\ b)$ が計算できることになる．そして一定の a, b に対して n を次第に大きくしてゆけば，おそらく $V_n(a,\ b)$ は単調に増加して，一定の極限値に近づくであろうし，その極限値が求める $V(a,\ b)$ となってくれるであろうと想像された．

しかしこの予想を厳密に確かめることはかなりやっかいであったし，計算の分量も相当大変なことになりそうであった．イスラエルから来たサミュエル嬢が，$A=100$ ぐらいまでのいろいろな A について手で計算してみた結果からも，あまりはっきりした法則性は見つからなかった．

そのうちに，しかし，うまいことに気がついた．それは，“もし $a+b\geqq A/2-1$ ならば $V(a,b)=V_0(a,b)$ である”ということである．すなわち，(1) 式の右辺の [ ] 内の二つの要素のうち，右の方が大きくなってそれが $V(a,\ b)$ の値を与えるということは，$a+b$ が $A/2-1$ 以上のときは起こらないという事実である．これと同時に，“$a+a<A/2-1$ ならば $V(a,\ a)>V_0(a,\ a)$,” すなわち，$a+b<A/2-1$ の範囲内では，少なくとも直線 $a=b$ の上では，(1) 式の右辺の [ ] の中の第二の要素がものをいうことがわかった．

それで，計算は (1) 式そのものを用い，“境界条件”として，

$$a+b\geqq\frac{A}{2}-1 \text{ のとき } V(a,\ b)=\frac{A\ \max(a,\ b)}{a+b} \qquad (5)$$

を与えて解けばよいことになった．これならば順ぐりに逆もどりしてくればよいので問題ない．しかも記憶すべきものは，ある t に対して，$a+b=t$ を充たす $a,\ b$ に対する $V(a,\ b)$ だけですむ．つまり

$$V(1,\ t-1),\ V(2,\ t-2),\ V(3,\ t-3),\cdots\cdots$$

を記憶するだけでよい．これから1だけ小さい t に対する $V(a,\ b)$ が (1) 式によって求められるので，それを同じところへ記憶してゆくことができる．その上，対称性によって

$$V(a,\ b)=V(b,\ a) \qquad (6)$$

となることは明らかだから，半分だけ記憶すれば十分である．

4. 最初のプログラム

以上の考察にもとづいて，IBM 709 用の FORTRAN を用いて，次のようなプログラムを作った：[2]

```
C     MORIGUTI BUYING INFORMATION
      WRITE OUTPUT TAPE 6, 100
100   FORMAT (77 H 1   SIGEITI   MORIGUTI
     1 BAYES SOLUTION TO ROBBINS BUY
     2 ING INFORMATION PROBLEM)
      DIMENSION V(10001), A(40)
      READ INPUT TAPE 5, 99, LL
 99   FORMAT (I 4)
      READ INPUT TAPE 5, 101, (A(L), L=1,
     1 LL)
101   FORMAT (5 F 8.1)
      DO 10 L=1, LL
      WRITE OUTPUT TAPE 6, 102, A(L)
102   FORMAT (/7 H    A=F 8.1)
      DMAX=INTF (A(L)/2.0)
      NMAX=DMAX
      FIMAX=INTF (DMAX/2.0)
      IMAX=FIMAX
      DO 20 I=1, IMAX
      Y=I
 20   V(I)=A(L)*(DMAX-Y)/DMAX
      J=NMAX-2*IMAX
      IF (J) 22, 21, 22
 22   V(IMAX+1)=V(IMAX)
 21   NMAX=NMAX-2
      DO 30 N=1, NMAX
      C=N
      D=DMAX-C
      FKMAX=INTF(D/2.0)
      KMAX=FKMAX
```

```
      DO 40 K=1, KMAX
      Y=K
      X=D-Y
      Z=A(L)*X/D
      U=(V(K)*X+V(K+1)*Y)/D-1.0
      W=U-Z
      IF(W) 39, 39, 38
 38   WRITE OUTPUT TAPE 6, 103, X, Y, U, W
103   FORMAT (7H X=F8.1, 3X, 2HY=F8.1,
      15X, 2HV=F8.1, 3X, 2HW=F8.1)
      V(K)=U
      GO TO 40
 39   V(K)=Z
 40   CONTINUE
      IF(J) 41, 42, 41
 41   J=0
      GO TO 30
 42   J=1
      V(KMAX+1)=V(KMAX)
 30   CONTINUE
      PRINT 104, L
104   FORMAT (8H CASE L=I2,
                  12H IS FINISHED)
 10   CONTINUE
      CALL EXIT
      END (1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
```

計算は，コロンビア大学のワトソン研究所を通じて行なった．このプログラムを作るにあたって，ちょうどコロンビア大学に来ておられた佐藤泰夫・宇佐美竜夫両氏の指導を受けた．また小さい「虫」がいくつもあって，それを取り除くのに何日かかかった．

しかし，ともかくこれで $A=10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000$ を一気にやり上げ，その後 $A=2000$ と $A=5000$ を追加した．$A=5000$ のときの記録は3327行になった［これは $V(a, b)>V_0(a, b)$ であるような領域（これを「進行領域」と呼ぶ）の中のすべての整数点 (a, b) のうち，直線 $a=b$ 上またはその下側にあるものすべての数である］．

5. 結果の考察

こうして得られた結果から，いろいろな図を作ってみた．結果はもちろん A の値に強く依存するが，A が大きくなったときの漸近的な性質に特に興味があるので，それをいろいろしらべてみた．そのおかげで，次の二つの極限がおもしろいことがわかった．

1)　$\xi=(a+b)/A$ と $v=a-b$ とを有限の値に保ち，$A\to\infty$ とした場合，

この場合，

$$V''(\xi, v)=V\left(\frac{A\xi+v}{2}, \frac{A\xi-v}{2}\right) \tag{7}$$

という関数は，「進行領域」内で

$$V''(\xi, v)=\frac{1}{2}[V''(\xi, v+1)+V''(\xi, v-1)]-1 \tag{8}$$

という差分方程式をみたし，その外では「境界条件」

$$V''(\xi, v)=\frac{A}{2}+\frac{|v|}{2\xi} \tag{9}$$

を充たすことになる．

2)　$x=(a+b)/A^{2/3}$, $y=(a-b)/A^{1/3}$ を有限に保って $A\to\infty$ とした場合．

このとき，

$$W(x, y)=\{V(a, b)-V_0(a, b)\}/A^{2/3} \tag{10}$$

という関数は，$y>0$ なる「進行領域」内では

$$-\frac{\partial W}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\frac{y}{x}\frac{\partial W}{\partial y}-1 \tag{11}$$

という微分方程式を充たし，その「自由境界」

$y=y_1(x)$

の上で

$$W=\frac{\partial W}{\partial y}=0 \tag{13}$$

を充たし，直線 $y=0$ の上で

$$\frac{\partial W}{\partial y}=-\frac{1}{2x} \tag{14}$$

を充たすことになる．

このような極限の場合の解としては，1）の場合には完全に，また 2）の場合には $x\geqq1$ の部分で使える漸近展開の形で，それぞれ解析的な解が得られ，それぞれ計算結果とよく一致することがわかった（くわしくは文献[1]を参照）．

6. OC 曲線および ASN 曲線

母数 a, b に対する最適決定規則（ベイズ解）D_{ab} を用いたとき，真の黒玉比率が p であったときの“白と予言する確率” $\delta(p, a, b)$ と，決定に達するまでの平均観測数 $n(p, a, b)$ とを，p の関数とみたとき，これらはそれぞれ D_{ab} の OC (operating characteristic) 関数および ASN (average sample number) 関数と呼ばれ，そのグラフはそれぞれ OC 曲線および ASN 曲線と呼ばれる．

$\delta(p, a, b)$ を求めるには，次の再帰公式を使えば

よい：

$$\delta(p,\ a,\ b)=p\delta(p,\ a+1,\ b)+(1-p)\delta(p,\ a,\ b+1) \quad (15)$$

ただし「進行領域」の外では

$$\left.\begin{aligned}\delta(p,\ a,\ b)&=0, \quad a>b \text{ のとき}\\ &=1, \quad a<b \text{ のとき}\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

とする．

$n(p,\ a,\ b)$ に対しては，同様に，進行領域内で

$$n(p,\ a,\ b)=pn(p,\ a+1,\ b)+(1-p)n(p,\ a,\ b+1)+1 \quad (17)$$

を用い，その外では

$$n(p,\ a,\ b)=0 \quad (18)$$

とすればよい．

「進行領域」そのものは，さきほどの計算で定め，p=0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 に対して (15), (16), (17), (18) を用いて $\delta(p, a, b)$ と $n(p,\ a,\ b)$ とを計算した．そのプログラムは省略するが，A は1000についてだけ計算した．これまでで，割り当ててもらってあった IBM 709 の時間 1時間が（少々超過したが）ちょうどなくなったし，私はその後方々を旅行したので，コロンビア大学での計算は以上でおしまいということになった．

7. BALGOL

6月からスタンフォード大学に移ったが，そこの計算センターにはバロウズ 220 があって，比較的自由に使うことができる（お金は研究費の移算で支払う）．プログラムは ALGOL 58 に近い BALGOL で書く[3]．そこでまずやったことは，さきほどのプログラムとそっくりのことを BALGOL で書いてやってみることである．ただしプリントはもったいないから $a=b=1$ のときの値だけをプリントし，しかも，せっかくだから有効数字をたくさんプリントさせることにした．

こうして作ったのが次のプログラムである：

```
S 440   JOB 07/24/61 5 MIN  MORIGUTI X 2208
   COMMENT MORIGUTI-ROBBINS BUYING
   INFORMATION PROBLEM; WRITE (;;
   TITLE);
   FORMAT TITLE (B 10, * MORIGUTI-ROBB
   INS BUYING INFORMATION PROBLEM*,
   W 0);
   ARRAY V(1500);
   INTEGER NMAX, IMAX, I, J, NMAXM,
   N, KMAX, K;
   FOR A=10.0, 20.0, 50.0, 100.0;
   BEGIN
     WRITE(;; AVALUE, F 1);
     OUTPUT AV ALUE(A);
     FORMAT F 1(*A=*, X 8.1, W 0);
     DMAX=ENTIRE (A/2.0);
     NMAX=FIX (DMAX);
     FIMAX=ENTIRE(DMAX/2.0);
     IMAX=FIX(FIMAX);
     FOR I=(1, 1, IMAX);
     BEGIN Y=FLOAT(I);
     V(I)=A. (DMAX-Y)/DMAX END;
     J=NMAX-2.IMAX;
     IF(J NEQ 0); V(IMAX+1)=V(IMAX);
     NMAXM=NMAX-2;
     FOR N=(1, 1, NMAXM);
     BEGIN C=FLOAT(N);
       D=DMAX-C;
       FKMAX=ENTIRE(D/2.0);
       KMAX=FIX(FKMAX);
       FOR K=(1, 1, KMAX);
       BEGIN Y=FLOAT(K);
         X=D-Y; Z=A.X/D;
         U=(V(K). X+V(K+1). Y)/D-1.0;
         W=U-Z;
         IF(W GTR 0); BEGIN V(K)=U;
         GOTO C 1 END;
         V(K)=Z; C 1:
       END;
       IF(J NEQ 0); BEGIN J=0; GO TO C 2
         END;
       J=1; V(KMAX+1)=V(KMAX); C 2:
     END;
     WRITE(;; RESULT, F 2);
     OUTPUT RESULT(U, W);
     FORMAT F 2(*V(1, 1)=*, X 10.5, B 3,
       *W(1, 1)=*, X 10.5, W 0)
   END;
   STOP 1111;
   FINISH;
```

この最後の FINISH は，このプログラムの終りを示すものであるが，その前の STOP 1111 は，Acc に 1111 を入れて止まれということで，自分ではこれが仕事の終りを示す良い方法だと思っていた．ところ

が，これは良くないのだそうで，仕事がすんだら止まらずにそのまま次の仕事に移るのが正規のやり方だということが，あとからわかった．つまり STOP 1111 は全くなくてよかったのである．

このプログラムを編集して実行する時間が全部で2分間であった．BALGOL の編集ルーチンは一般に非常に速いようである．したがってスタンフォード大学の計算センターでは，毎回もとのままの（BALGOL 語の）カードを読んで編集することを原則にしているとのことである．

さて，つぎに8行目の FOR のところを A=200.0, 500.0, 1000.0, 2000.0, 5000.0 に変えて，推定時間を5分として入れてみたところ，こんどは $A=200$ の分をすませるのに7分かかってしまい，予定時間超過ということで打ち切られてしまった．この割でいくと，大きい A に対しては（大体 A^3 に比例した計算時間になるので）大変な時間がかかりそうである．それではたまらないので，プログラムを作りなおすことにした．

8. 10分の1きざみ

プログラムを作りなおす目的は他にもあった．それは，ベータ分布の母数 a, b はかならずしも整数に限る必要はなく，むしろ正の実数をすべて考えることにした方が，「進行領域」の境界を連続曲線として理解するためにも好都合である．それで，$u=a+b$ の方は整数に限り，$v=a-b$ の方は 0.1 きざみにとって計算した結果がほしかったのである．前の計算の結果によると，$a+b$ は非常に広い範囲にわたるので，プリントはほんの一部分をやることにした．なお $M(a,b)=V(a,b)-V_0(a,b)$ を未知関数として使った．

こうしてできたのが次のプログラムである．

```
S 440  JOB 08/19/61, 35 MIN MORIGUTI X 2208
    COMMENT BUYING INFORMATION PRO-
    BLEM-STEP 1/10;
  INTEGER A, I, U, IMAX;
  ARRAY M(500), MM(500);
  FOR A=100, 200, 500, 1000, 2000, 5000;
  BEGIN
    WRITE(;; AVALUE, F 1);
    OUTPUT AVALUE(A);
    FORMAT F 1 (*A=*, I 4, W 3);
    FOR I=(1, 1, 500); M(I)=0;
    FOR U=(A/2-1, -1, 1);
    BEGIN V=0; FOR I=(1, 1, 500);
      BEGIN EITHER IF(I LEQ 10);
        MC=((U+V) M (I+10)+(U-V)M (12-
          I))/2U-1+A (U+V*2-(U + 1) V)/2U
          (U+1);
      OTHERWISE; MC=((U+V)M(I+10)+(U
        -V)M(I-10))/2U-1;
      MM(I)=MC; V=V+0.1;
      IF(MC LSS 0); BEGIN IMAX=I; GO TO
        ALT END;
    END; STOP 1;
    ALT: EITHER IF(U GEQ 100) AND (MOD
      (U, 100) NEQ 0);
      GO TO NEXT;
      OR IF (U GEQ 20) AND (MOD (U, 20)
      NEQ 0);
      GO TO NEXT END;
    PRINT: WRITE(;; RESULT, F 2);
            OUTPUT RESULT(U, FOR I=(1,
              1, IMAX); (0.1 (I-1), MM(I)));
            FORMAT F2(*U=*, I 4, W4, (4(*V
              =*, X 4.1, B 3, *M=*, F 15.8, B
              2), W0));
    NEXT: FOR I=(1, 1, IMAX-1); M(I)=
      MM(I);
    FOR I=(IMAX, 1, 500); M(I)=0;
  END
END; FINISH;
```

実はその前の日に，$A=10$, 20, 50 に対して同じプログラムを見積時間5分としてやったところ，2分間でそれが完了したので，こんどは FOR $A=\cdots$ というカードをさしかえて，見積時間を35分として出したのである．

8月19日は土曜日で，したがって職員はみんな休みである．しかし土曜も日曜も，それからふだんの日の夜も，アルバイト学生が機械を動かしていて，計算はやってもらえる．パンチ室もあいてはいる．ただし出入には中庭の方の扉を使うことになっていて，そこの押しボタンを押すと中から学生が扉をあけに来てくれることになっている．そういうことを前日にきいてあったので，スタンフォードをたつ4日前というギリギリの時間を有効に使うことができたのである．

記録によると，TIME ON が 0803 すなわち午前

8時3分，TIME OFF が 0852 だから，49 分かかっている．その間に $A=100$ から $A=2000$ までをすませて，21 ページの印刷記録ができている．ここまでで見積時間を過ぎているので，OVER TIME ESTIMATE と印刷してはずしたらしい．それにしても $A=5000$ という見出しを印刷したところではずしたのは，$A=2000$ の分が終るまで時間を延長してくれたことを意味するもので，この辺に，あまりコチコチでない操作員の親切心がうかがわれる．

パンチのサービスなども，建前はきちんとしていて，1人のチーフのおばさんが3人ばかりの専門のパンチャーを指揮して手順よくやってくれるのであるが，カードを数枚訂正してかけるなんていうときは，けっこうゆうずうがきいて，しゃくし定規でない親切なあたたかみを感じた次第であった．

以上，ささやかな経験の報告ではあるが，計算センターのあり方とか，プログラミングの実際とかについて何かのヒントにでもなれば幸である．

参考文献

1) Sigeiti Moriguti and Herbert Robbins, "A Bayes test of '$p\leq 1/2$' versus '$p>1/2$'," Columbia Univ., Sept. 5, 1961; 日科技連英文リポートに掲載される予定.

2) IBM, Reference manual, 709 FORTRAN, Automatic Coding System for the IBM 709 Data Processing System, 1958, 1959, International Business Machines Corporation.

3) Burroughs Algebraic Compiler, A Representation of ALGOL for Use With the Burroughs 220 Data-Processing System, Bulletin 220-21011-P, January 1961, Burroughs Corporation.