函数の近似公式*

宇　野　利　雄**

数理科学総合研究第4班に昨年度（昭和35年）から，重要函数の計算法という標題を目的とした第5分科会が設けられ，主として函数近似についての資料の蒐集，新規公式の開発，近似理論の研究などをやることになった．35年度は参集された委員方から手許で活用されている公式または新たに開発された公式の提出を求め，これらを編集して「計算機のための函数近似公式」なる標題の印刷物を作り，関係諸方面に配布した．この中にはすでに Hastings の公式集などにあるもの，または著名な計算センターなどで慣用されて有名になっている公式なども多数入っているが，そのほかに新たに作られたいろいろ特徴のある公式なども入っていたので，以下にその若干を紹介する，なお分科会は本年度も引きつづき継続したので，公式の第2集を編集中であり，これについてはまた回をあらためて報告したいと思う．

最初に第1集の中にはなかったのであるが，よく疑義とされる，係数の桁数をあるところで端折ったときに誤差はどうなるかという問題についての一実例を提示して，以後の紹介を利用される場合などの参考にしたいと思う．

$\tan x$ の近似式についての処理例（河野）

範囲を $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$ とし，有効16桁でチェビシェフ補間の計算を行って次の数値を得た．

$$\tan x \doteqdot a_1x + a_3x^3 + \cdots\cdots + a_{15}x^{15}$$

$a_1 = 9{,}999\ 9999\ 8855\ 3780 \times 10^{-1}$

$a_2 = 3{,}333\ 3357\ 0384\ 0430 \times 10^{-1}$

$a_5 = 1{,}333\ 2534\ 3485\ 7991 \times 10^{-1}$

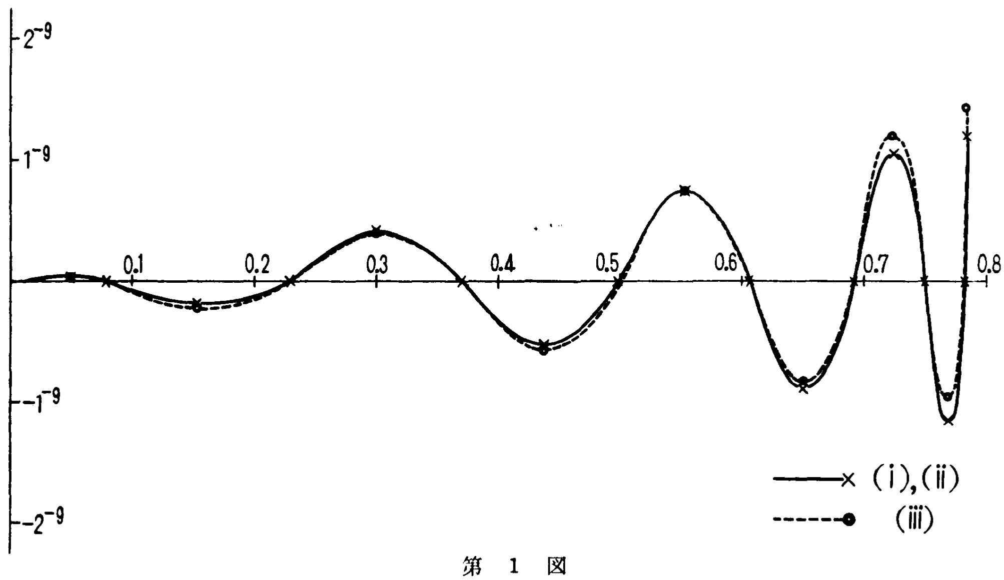
$a_7 = 5{,}406\ 9882\ 9719\ 2048 \times 10^{-2}$

$a_9 = 2{,}124\ 2803\ 5038\ 0115 \times 10^{-2}$

$a_{11} = 1{,}091\ 9043\ 7932\ 6416 \times 10^{-2}$

$a_{18} = 9{,}660\ 8034 \times 10^{-10}$

$a_{15} = 4{,}414\ 8001\ 9212\ 5492 \times 10^{-3}$



第　1　図

この近似公式の誤差曲線が上に示してあるが，

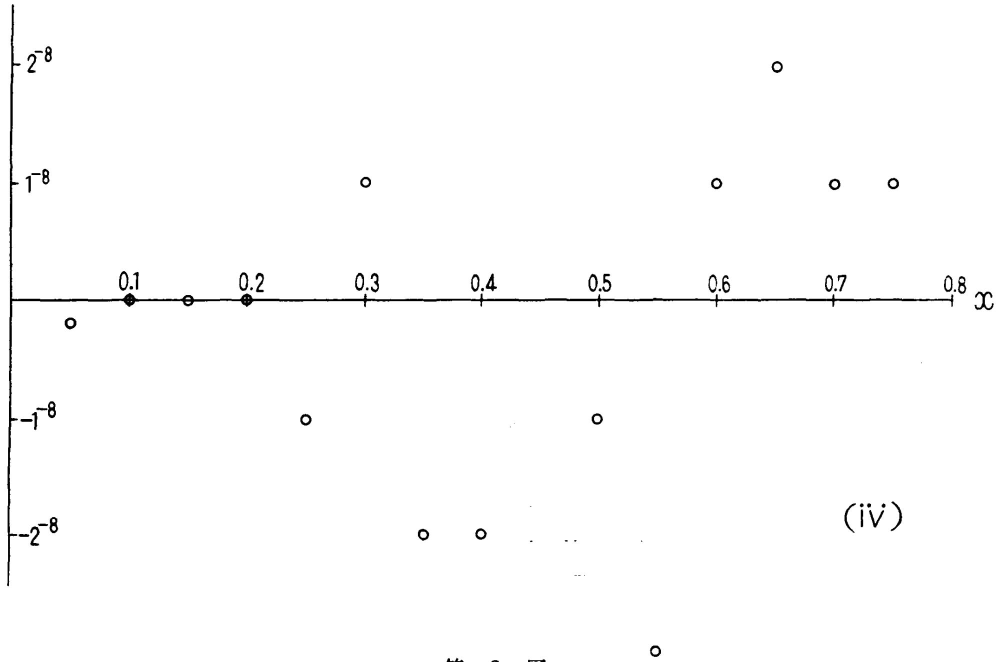
（i）　上の係数をそのまま使ったもの，

（ii）　上の係数の 10^{-12} までの桁をとって以下を丸

---

* Approximation formulas of functions, by Toshio Uno (College of Science and Engineering, Nihon University)

** 日本大学理工学部



第 2 図

めたもの（丸めは四捨五入による，以下皆同じ），

(iii)　10^{-9} 以下を丸めたもの，

(iv)　10^{-8} 以下を丸めたもの，

の四とおりの場合が書いてある，誤差（ここでは函数の真値－近似値を誤差とした）は10^{-9} の程度であるが，係数をこれと同じぐらいまでの正確さでとったものには大して相違のないことがあらわれている（特に（i）と（ii）では区別がつかない）．これに反して係数の精密さを誤差の程度よりあらく，10^{-8} までとした(iv)の場合ではこの桁までの計算による random な丸めの誤差とみなさるべきものが出てきて，真実の誤差曲線がその中に埋没してしまっている．

本題に入って上記 35 年度公式集中にある，いくつかのものを列挙する．なお，はじめの二重番号はこの公式集中でのその公式の番号である．はじめにまず誤差精度の多いものを目標にして集中から採録する．

6.7　$\log_e x$（山下）

範　　囲	$1 \leqq x \leqq 2$
近 似 式	$\log_e x \cong \log_e\sqrt{2}+a_1y+a_3y^3+\cdots\cdots+a_{13}y^{13}$
	ただし　$y=\dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\cdot a$
	$\sqrt{2}=+1.4142\ 1356\ 2373\ 0950\ 4880\ 1688$
	$a=+5.8284\ 2712\ 4746\ 1900\ 9760\ 3377$
	$\log_e\sqrt{2}=+0.3465\ 7359\ 0279\ 9726\ 5470\ 8616$
	$a_1=+0.3431\ 4575\ 0507\ 6198\ 6421$
	$a_3=+0.0033\ 6708\ 9255\ 5585\ 8777$
	$a_5=+0.0000\ 5947\ 0712\ 0820\ 3479$
	$a_7=+0.0000\ 0125\ 0466\ 8101\ 0179$
	$a_9=+0.0000\ 0002\ 8631\ 8179\ 9949$
	$a_{11}=+0.0000\ 0000\ 0687\ 2842\ 9465$
	$a_{13}=+0.0000\ 0000\ 0018\ 7997\ 1261$
最大誤差	5.9×10^{-17}
近似の種類	最良近似

6.6　$\log_e x$（山下）

範　　囲	$1 \leqq x \leqq 2$
近 似 式	$\log_e x \cong \log_e\sqrt{2}+a_1y+a_3y^3+\cdots\cdots+a_{11}y^{11}$
	ただし　$y=\dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\cdot a$
	$\sqrt{2}=+1.4142\ 1356\ 2373\ 0950\ 4880$
	$a=+5.8284\ 2712\ 4746\ 1900\ 9760$
	$\log_e\sqrt{2}=+0.3465\ 7359\ 0279\ 9726\ 5471$
	$a_1=+0.3431\ 4575\ 0507\ 6106\ 2544$
	$a_3=+0.0033\ 6708\ 9256\ 2224\ 8484$
	$a_5=+0.0000\ 5947\ 0704\ 3474\ 5043$
	$a_7=+0.0000\ 0125\ 0499\ 7761\ 6856$
	$a_9=+0.0000\ 0002\ 8568\ 2928\ 5539$
	$a_{11}=+0.0000\ 0000\ 0743\ 7138\ 9125$
最大誤差	9.2×10^{-15}
近似の種類	最良近似

6.7 公式については，くわしい誤差曲線がつけられてあったが，印刷のとき図を入れる手間をはぶいたために，集中にのせられなかったのを次の**第3図**に入れる．

6.5 $\log_e x$（山下）

範囲	$1 \leq x \leq 2$
近似式	$\log_e x \cong \log_e \sqrt{2} + a_1 y + a_3 y^3 + a_5 y^5 + a_7 y^7 + a_9 y^9$ ただし $y = \dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} \cdot a$ $\sqrt{2} = +1.4142\ 1356\ 2373\ 0950$ $a = +5.8284\ 2712\ 4746\ 1901$ $\log_e \sqrt{2} = +0.3465\ 7359\ 0279\ 9727$ $a_1 = +0.3431\ 4575\ 0509\ 0724$ $a_3 = +0.0033\ 6708\ 9183\ 3007$ $a_5 = +0.0000\ 5947\ 1286\ 8414$ $a_7 = +0.0000\ 0124\ 8870\ 5542$ $a_9 = +0.0000\ 0003\ 0428\ 7514$
最大誤差	1.5×10^{-12}
近似の種類	最良近似

6.4 $\log_e x$（山下）

範囲	$1 \leq x \leq 2$
近似式	$\log_e x \cong \log_e \sqrt{2} + a_1 y + a_3 y^3 + a_5 y^5 + a_7 y^7$ ただし $y = \dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} \cdot a$ $\sqrt{2} = +1.4142\ 1356\ 2373\ 0950$ $a = +5.8284\ 2712\ 4746\ 1900$ $\log_e \sqrt{2} = +0.3465\ 7359\ 0279\ 9727$ $a_1 = +0.3431\ 4575\ 0269\ 8954$ $a_3 = +0.0033\ 6709\ 6816\ 6340$ $a_5 = +0.0000\ 5943\ 3181\ 1755$ $a_7 = +0.0000\ 0130\ 9774\ 5432$
最大誤差	2.4×10^{-10}
近似の種類	最良近似

6.3 $\log_e x$（山下）

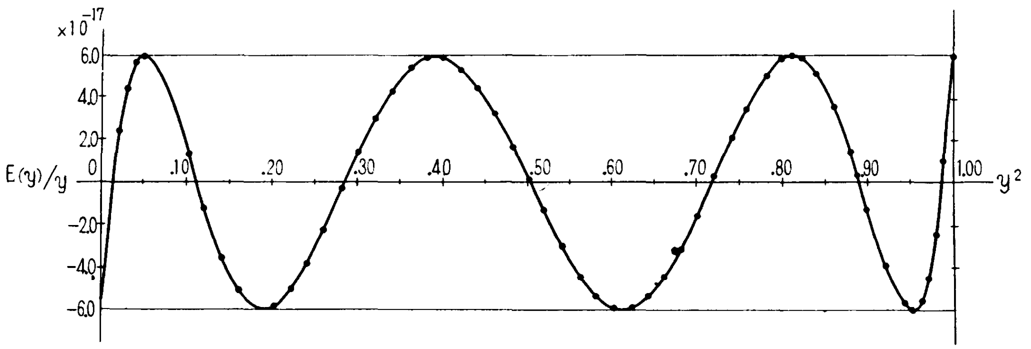
範囲	$1 \leq x \leq 2$
近似式	$\log_e x \cong \log_e \sqrt{2} + a_1 y + a_3 y^3 + a_5 y^5$ ただし $y = \dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} \cdot a$ $\sqrt{2} = +1.4142\ 1356\ 2373$ $a = +5.8284\ 2712\ 4746$ $\log_e \sqrt{2} = +0.3465\ 7359\ 0280$ $a_1 = +0.3431\ 4579\ 1438$ $a_3 = +0.0033\ 6635\ 8167$ $a_5 = +0.0000\ 6139\ 9745$
最大誤差	4.1×10^{-8}
近似の種類	最良近似

9.5 $\cos x$（山下）

範囲	$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
近似式	$\cos x \cong a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \cdots\cdots + a_{12} x^{12}$ $a_0 = +0.9999\ 9999\ 9999\ 2519$ $a_2 = -0.4999\ 9999\ 9970\ 2429$ $a_4 = +0.0416\ 6666\ 6473\ 3986$ $a_6 = -0.0013\ 8888\ 8418\ 0260$ $a_8 = +0.0000\ 2480\ 1040\ 0695$ $a_{10} = -0.0000\ 0027\ 5246\ 9718$ $a_{12} = +0.0000\ 0000\ 1990\ 7868$
最大誤差	7.5×10^{-13}
近似の種類	最良近似

9.4 $\cos x$（山下）

範囲	$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
近似式	$\cos x \cong a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 \cdots\cdots + a_{10} x^{10}$ $a_0 = +0.9999\ 9999\ 9780\ 65$ $a_2 = -0.4999\ 9999\ 3584\ 75$ $a_4 = +0.0416\ 6663\ 6258\ 15$ $a_6 = -0.0013\ 8883\ 6140\ 13$ $a_8 = +0.0000\ 2476\ 0161\ 42$ $a_{10} = -0.0000\ 0026\ 0514\ 96$
最大誤差	2.2×10^{-10}
近似の種類	最良近似



第 3 図

8.5 $\sin x$（宇野）

範　囲	$-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$
近似式	$\sin x\simeq c_1X+c_3X^3+c_5X^5+\cdots\cdots+c_{17}X^{17}$ ただし　$X=\frac{2}{\pi}x$ $c_1=+1.570\ 796\ 326\ 794\ 896\ 487$ $c_3=-0.645\ 964\ 097\ 506\ 241\ 324$ $c_5=+0.079\ 692\ 626\ 246\ 106\ 752$ $c_7=-0.004\ 681\ 754\ 134\ 970\ 304$ $c_9=+0.000\ 160\ 441\ 183\ 681\ 536$ $c_{11}=-0.000\ 003\ 598\ 841\ 181\ 184$ $c_{13}=+0.000\ 000\ 056\ 919\ 474\ 176$ $c_{15}=-0.000\ 000\ 000\ 667\ 402\ 240$ $c_{17}=+0.000\ 000\ 000\ 005\ 636\ 096$
最大誤差	5×10^{-18}
近似の種類	チェビシェフ近似

10.7 $\tan\frac{\pi}{2}x$（山下）

範　囲	$-1\leq x\leq1$
近似式	$\tan\frac{\pi}{2}x\cong\frac{x}{1-x^2}\{a_0+a_2x^2+\cdots\cdots+a_{12}x^{12}\}$ $a_0=+1.5707\ 9632\ 6748\ 866$ $a_2=-0.2788\ 6812\ 7343\ 792$ $a_4=-0.0168\ 4624\ 4877\ 343$ $a_6=-0.0016\ 4448\ 4840\ 859$ $a_8=-0.0001\ 7702\ 2658\ 095$ $a_{10}=-0.0000\ 1769\ 4146\ 233$ $a_{12}=-0.0000\ 0320\ 8101\ 288$
最大誤差	4.6×10^{-11}　{ }の分
近似の種類	最良近似

13.1 $\tan^{-1}x$（通研 M-1）

範　囲	$-1<x<1$
近似式	$\tan^{-1}x\cong c_1x+c_3x^3+c_5x^5+\cdots\cdots+c_{27}x^{27}$ $c_1=+0.9999\ 9999\ 9981$ $c_3=-0.3333\ 3333\ 0571$ $c_5=+0.1999\ 9988\ 1008$ $c_7=-0.1428\ 5473\ 2012$ $c_9=+0.1110\ 8319\ 9831$ $c_{11}=-0.0707\ 0357\ 5005$ $c_{13}=+0.0758\ 9444\ 1137$ $c_{15}=-0.0630\ 0643\ 1052$ $c_{17}=+0.0492\ 5434\ 5382$ $c_{19}=-0.0337\ 3548\ 2406$ $c_{21}=+0.0186\ 0530\ 1964$ $c_{23}=-0.0074\ 8902\ 6772$ $c_{25}=+0.0019\ 1345\ 2767$ $c_{27}=-0.0002\ 2988\ 0755$
最大誤差	2^{-35}
近似の種類	チェビシェフ近似

14.1 $J_0(10x)$（通研 M-1）

範　囲	$-1\leq x<1$
近似式	$J_0(10x)\cong a_0+a_2T_2(x)+a_4T_4(x)+\cdots\cdots+a_{28}T_{28}(x)$ ただし　$T_i(x)$ はチェビシェフ多項式 $a_0=+0.0315\ 4061\ 3181$ $a_2=-0.2146\ 1618\ 2770$ $a_4=+0.0043\ 3662\ 0108$ $a_6=-0.2662\ 0365\ 3662$ $a_8=+0.3061\ 2551\ 9740$ $a_{10}=-0.1363\ 8876\ 9656$ $a_{12}=+0.0343\ 4754\ 0203$ $a_{14}=-0.0056\ 9808\ 2322$ $a_{16}=+0.0006\ 7750\ 4000$ $a_{18}=-0.0000\ 6094\ 7052$ $a_{20}=+0.0000\ 0430\ 8889$ $a_{22}=-0.0000\ 0024\ 6300$ $a_{24}=+0.0000\ 0001\ 1637$ $a_{26}=-0.0000\ 0000\ 0463$ $a_{28}=+0.0000\ 0000\ 0016$
最大誤差	7×10^{-11}
近似の種類	チェビシェフ近似

14.7 $J_1(10x)$（通研 M-1）

範　囲	$-1\leq x<1$
近似式	$J_1(10x)\cong a_1T_1(x)+a_3T_3(x)+\cdots\cdots+a_{29}T_{29}(x)$ ただし　$T_i(x)$ はチェビシェフ多項式 $a_1=+0.1163\ 5399\ 4372$ $a_3=+0.0305\ 0752\ 1264$ $a_5=+0.0339\ 7681\ 7351$ $a_7=-0.2854\ 6756\ 7044$ $a_9=+0.2043\ 3326\ 4540$ $a_{11}=-0.0684\ 4427\ 4772$ $a_{13}=+0.0139\ 8982\ 1716$ $a_{15}=-0.0019\ 6480\ 8786$ $a_{17}=+0.0002\ 0320\ 4014$ $a_{19}=-0.0000\ 1620\ 5372$ $a_{21}=+0.0000\ 0103\ 0184$ $a_{23}=-0.0000\ 0005\ 3536$ $a_{25}=+0.0000\ 0000\ 2320$ $a_{27}=-0.0000\ 0000\ 0085$ $a_{29}=+0.0000\ 0000\ 0003$
最大誤差	2×10^{-11}
近似の種類	チェビシェフ近似

なお第2集については次回にのべようと思ったが，$\tan^{-1}x$ については需要が多いので上記 13.1 に関連し第2集にのせるつもりの次のものをかかげる．

$\tan^{-1}x$　（島内）

$x<0$ のときは　$\tan^{-1}x=-\tan^{-1}(x)$,

$1<x$ のときは　$\tan^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{1}{x}$,

だから $0\leq x\leq1$ とする．

$$x=w+u,\ w=\frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8},\ -\frac{1}{8}\leq u<\frac{1}{8}$$

とおく．

$$\frac{u}{1+xw}=\frac{x-w}{1+xw}=v,\quad |v|\leq\frac{1}{8}$$

$$4v=z,\qquad |z|\leq\frac{1}{2}$$

とおけば $\tan^{-1}x=\tan^{-1}w+\tan^{-1}v$, $\tan^{-1}w$ は表を引く．

w	$\tan^{-1}w$
$\frac{1}{8}$	.12435 49945 46771
$\frac{3}{8}$	.35877 06702 70611
$\frac{5}{8}$	.55859 93153 43560
$\frac{7}{8}$	.71882 99994 21623

$$\begin{aligned}\tan^{-1}v= &\ .24999\ 99999\ 99782\,z\\ &-.00520\ 83333\ 15808\,z^3\\ &+.00019\ 53121\ 0646\,z^5\\ &-.00000\ 87156\ 960\,z^7\\ &+.00000\ 04092\ 948\,z^9\end{aligned}$$

最大誤差 1.0×10^{-14}

$$\begin{aligned}\tan^{-1}v= &\ .24999\ 99999\ 43\,z\\ &-.00520\ 83303\ 18\,z^3\\ &+.00019\ 52689\ 4\,z^5\\ &-.00000\ 84855\,z^7\end{aligned}$$

最大誤差 4×10^{-12}

$$\begin{aligned}\tan^{-1}v= &\ .24999\ 9985\,z\\ &-.00520\ 7866\,z^3\\ &+.00019\ 156\,z^5\end{aligned}$$

最大誤差 2×10^{-9}

$$\begin{aligned}\tan^{-1}v= &\ .24999\ 62\,z\\ &-.00514\ 80\,z^3\end{aligned}$$

最大誤差 4×10^{-7}

$$\tan^{-1}v=\ .2490\,z$$

最大誤差 2×10^{-4}

次に有理函数による近似に関心を持たれた方々からよせられた，いくつかの有理函数近似公式のうち，立方根のための次の公式をあげる．（右表参照）

最後に最近の文献として森口氏の入手せられた A.J.W. Duijvestijn and A.J. Dekkers, Chebyshev approximations of some transcendental functions for use in digital Computing, Philips Research Reports 16, pp. 145～174, 1961 のあることを附記しておく，これには初等函数の近似公式の精細なものと近似計算法についての丁寧な解説がついている．

2.2 $\sqrt[3]{A}$（山内）

10 進 法 の 場 合

範囲: $10^{-3}\leq A\leq 1$

近似式:

$$\sqrt[3]{A}\cong Y_2=Y_1+\frac{3A}{(2^2Y_1)^2+A/Y_1}$$

$$Y_1=a_0-\cfrac{a_1}{A+b_1-\cfrac{a_2}{A+b_2}}$$

この a_i, b_i は次のようになる

	$10^{-1}\leq A\leq 1$	$10^{-2}\leq A\leq 10^{-1}$	$10^{-3}\leq A\leq 10^{-2}$
a_0	0.9907 1534	0.4598 4932	0.2134 4315
a_1	1.5503 5	0.0719 6085	0.0033 4012 7
b_1	2.2210 2	0.2221 02	0.0222 102
a_2	0.0731 438	0.0007 3143 8	0.0000 0731 438
b_2	0.1638 788	0.0163 8788	0.0016 3878 8

最大相対誤差: 3.3×10^{-11}

近似の種類: 最良近似

2.3 $\sqrt[3]{A}$（山内）

2 進 法 の 場 合

範囲: $2^{-3}\leq A\leq 2$

近似式:

$$\sqrt[3]{A}\cong y_2=\frac{1}{2}y_1+\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)A}{2y_1^2+Ay_1^{-1}}$$

$$y_1=a_0-\frac{a_1}{A+b_1}$$

この a_i, b_i は次のようになる

	$1\leq A\leq 2$	$2^{-1}\leq A\leq 1$	$2^{-2}\leq A\leq 2^{-1}$	$2^{-3}\leq A\leq 2^{-2}$
a_0	2.256	1.7907 1	1.4212 9	1.1280 7
a_1	4.8258 7	1.9151 5	0.7600 26	0.3016 17
b_1	2.8425 7	1.4212 9	0.7106 43	0.3553 21

最大相対誤差: 1.1×10^{-11}

近似の種類: 最良近似

2.4 $\sqrt[3]{A}$ (E.T.L.Mark II, 山内)

範囲: $10^{-19}<A<1^{+19}$

近似式:

$A=Z\cdot 2^z \qquad 1\leq Z\leq 2$

$z/3=[z/3]+(z/3)$

ただし $[z/3]$ は $z/3$ を小数第1位で四捨五入したものの整数部分

$$\sqrt[3]{A}=\begin{cases}\sqrt[3]{Z}\cdot 2^{[z/3]}\cdot 2^{0} & \text{if } z/3-[z/3]=0\\ \sqrt[3]{Z}\cdot{}^{[z/3]}\cdot 2^{1/3} & \text{if } z/3-[z/3]>0\\ \sqrt[3]{Z}\cdot 2^{[z/3]}\cdot 2^{-1/3} & \text{if } z/3-[z/3]<0\end{cases}$$

$$X_1=2.25615-\frac{4.82587}{Z+2.84257}$$

$$X_2=\left[\frac{1}{2}X_1+\frac{3Z}{2X_1^2+Z/X_1}\right]\cong\sqrt[3]{Z}$$

$\delta_{n+1}\cong\frac{2}{3}\delta_n^3$ で収束する（δ_n は X_n の相対誤差）

$\delta_2=1.1\times1^{-11}$ である．

最大相対誤差: 10^{-10}

近似の種類: 最良近似

（昭和37年3月23日受付）