談　話　室

e の計算について

本誌 Vol. 3 No. 3 に和田英一さんの「e の計算のこと」という文が掲載され，面白く読ませていただきましたが，その中で外国製計算機による記録はともかく，日本製の機械で，「より長く」種目と「よりはやく」種目の記録について言及されております．わたくしはあの文を読んだあと，「よりはやく」種目について記録更新を試みました．もちろん使える機械は東大理学部の PC-2 ときまっていますから，和田さんと条件は同じなわけです．したがって記録更新のためには，プログラムをよりじょうずにするか，計算方法をかえるか，どちらかしか手はありません．しかし第一の手段はわたくしには全く希望はもてませんでした．というのは和田さんという人は，時に曲芸的ともいうべきプログラムをつくる，プログラム名人の一人だからです．とすると計算方法ですが，これもあちこちで使われている方法しかなさそうです．ところが実は，もっとよい方法によって（少なくとも PC-2 にとってはよりよい方法があった），e の 1,000 桁の計算に要する時間を，12 秒から 9 秒に一挙に 25% 縮めることができました（和田さん，おひざもとから火の手をあげてすみません）．ところで和田さんの文に示された方法は次のようなものです．

$$e-2=\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\left(\cdots\cdots+\frac{1}{n-2}\left(1+\frac{1}{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\cdots\right)\right)\right) \tag{1}$$

というように(1)式を計算するのに右の方から割算と加算を繰り返すものです．実際には割算の回数をへらすために，$n(n-1)\cdots\cdots(n-i)$ が single precision にはいるような i を見出して，$n(n-1)\cdots\cdots(n-i)$ で割るという方式をとっています．したがって10進，1,000桁が N precision になるとすると，1ステップの長い割算を行なうのに，N回の割算が必要であり，それがNステップ繰り返えされるわけですから全体で割算の回数は N^2 程度になります．さらに和田さんによると，ちょっとくふうを施してはじめから全体の長さ分の割算は行なわず，順々に precision 数をのばしていったそうですから $N^2/2$ 回の割算ですむことになります．

わたくしが使った方法は，簡単にいえば，$e-2$ を

$$e-2=\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}$$
$$=\frac{1}{n!}\left[\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}\right)n!\right] \tag{2}$$

と変形し，〔……〕の中，すなわち

$$\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}\right)n!$$
$$=3\cdot4\cdot n+4\cdot5\cdots\cdot n+\cdots\cdots$$
$$+(n-1)n+n+1$$
$$=(\cdots((3+1)4+1)5+\cdots\cdots)$$
$$(n-1)+1)n+1 \tag{3}$$

と $n!$ を multiple precision で正しく求め，分母分子とも multiple precision の割算を実行しようというものです．したがって割算を早く実行する方法が必要になりますが，これは以下のようにして $N^2/2$ 回程度の乗算でできます．

いま，accumulator を2進 S 桁として $h=2^S$ としておき，ある数が

$$\frac{b_0h^n+b_1h^{n-1}+\cdots\cdots\quad+b_n}{a_0h^n+a_1h^{n-1}+\cdots\cdots\quad+a_n} \tag{4}$$

と表わされるとします．もちろん a_i, b_i は0と $h-1$ の間の整数です．ただし $\frac{h}{2}\leq a_0\leq h-1$ になるように規格化しておきます．また分母分子の h の次数を同じにとったことは何も意味はありません．一般には違うわけです．さて答を

$$C_0h^{-1}+C_1h^{-2}+\cdots\cdots$$
$$+C_{n-1}h^{-n}(0\leq C_i\leq h-1) \tag{5}$$

とすると C_0 から順に求めていくわけですが，C_0 が大体どれくらいになるか見当をつけます．それには

$$\frac{b_0h+b_1}{a_0h+a_1}=\frac{1}{a_0}\left[b_0+\left(b_1-\frac{b_0}{a_0}a_1\right)h^{-1}\right] \tag{6}$$

というようにして double precision の割算を行ない，single precision 分の答を採用します（もちろん $b_0<a_0$ となるように事前に処置が施してあるとして，$\frac{b_0}{a_0}a_1$ のところで overflow の心配などないことにします）．そうすると，この single precision の答はほとんど正しく，(6)の展開式で考慮されなかった h^{-2} の項による誤差しかありませんが，a_0 が規格化されてい

ますので，single precision の答に高だか ± 1 の影響しかありません（そのようなことが起るのは答に single precision 程度の長さの 00…0 や 99…9 が続く場合です）．そこで，その答を用いて，分子 －〔答×(分母)〕を計算します．これが負ならば答に -1 の補正し，それに見合う処置をし，これの h 倍が分母より大きければ $+1$ の補正をして適当な処置を行ないます（e の計算にはそのような悪いケースは生じません）．あとは同様のプロセスのくりかえしです．したがって single precision の答を見出すのに乗算が N 回（(6) を求めるための乗除算の回数はコンスタントですから無視します），それを N precision 分ですから N^2 回の乗算，実際にはあとになるほど乗算を行なう precision 数はへらせますから $N^2/2$ 回の乗算で multiple precision 同志の割算ができます．

つまりこの方法によると，分母分子の整数を求めるのにそれぞれ $N^2/2$ 回ずつの乗算，割算に $N^2/2$ 回の乗算で，合計 $\frac{3}{2}N^2$ 回の乗算で e の答が得られます．割算の所要時間を D，乗算のそれを M とすると，和田さんの方法による所要時間と，ここにのべた方法によるそれの比は $3M/D$ ということになりますが，PC-2 では $M/D=1/5$ くらいですから，$3M/D\approx 3/5$ となり「より早く」種目での記録が更新されたわけです．

ついでながら，高橋秀俊先生の idea による例の Exact Calculation で，線型一次方程式の解を，分母分子が長い長い整数の比であらわす方法をとりますが，そのあとの処理方法としてここにのべた multiple precision の割算が利用できることはいうまでもありません．

（東大理学部　石橋善弘）