

## Taylor 級数による非線形方程式の高次解法

平 山 弘<sup>†1</sup>

Taylor 級数の四則演算および関数等は C++ 言語等のプログラム言語によって容易に定義できる。四則演算、関数、条件文等で記述された C++ 言語等で定義された関数は容易に Taylor 展開できる。

これを利用して、代数方程式でない非線形方程式を代数方程式で近似できる。このように近似すれば、非線形方程式を多数ある代数方程式の解法を使って解くことができる。

本論文では、非線形方程式を Taylor 展開法を使って代数方程式で近似し、それを Padé 展開を使った代数方程式の解法を利用すると非線形方程式を安定的に解くことができることを示す。

### Higher Order Methods to Solve Nonlinear Equations by Taylor Series

HIROSHI HIRAYAMA<sup>†1</sup>

The arithmetic operations and functions of Taylor series can be defined by C++ language easily. The functions represented by C++ language which consist of arithmetic operations, pre-defined functions and conditional statements can be expanded in Taylor series.

The nonlinear equation which is not an algebraic equation can be approximated by an algebraic equation using Taylor series. Therefore the nonlinear equations can be solved using many methods to solve an algebraic equation.

In this paper, when a nonlinear equation is approximated by an algebraic equation using Taylor series and apply the methods to solve the algebraic equation using Padé series to it, the nonlinear equations can be solved stably and easily.

<sup>†1</sup> 神奈川工科大学  
Kanagawa Institute of Technology

### 1. はじめに

有限項で打ち切った Taylor 級数間の四則演算や関数計算は容易に定義できる。これを利用すると、1 変数の関数を任意次数の Taylor 級数に展開できる。この考え方は、数学的には自動微分<sup>8)5)</sup>と同じである。

次のような 1 変数の非線形方程式について考える。

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

この方程式 (1) の解は、逆関数を使って、次のようにも書ける。

$$x = f^{-1}(0) \quad (2)$$

逆関数が容易に求められるならば、この方法も選択肢の一つとなる。

関数  $f(x)$  の Taylor 展開が与えられているとき、その逆関数の Taylor 展開が次のように計算できる。関数  $f(x)$  が次のように Taylor 展開されているとする。

$$f(x) = f_0 + f_1(x-p) + f_2(x-p)^2 + f_3(x-p)^3 + \dots \quad (3)$$

関数  $f(x)$  の逆関数を  $g(x)$  とすると、 $f(p) = f_0$  すなわち  $p = g(f_0)$  となるから、逆関数  $g(x)$  は次のように Taylor 展開できると仮定できる。

$$f^{-1}(x) = g(x) = p + g_1(x-f_0) + g_2(x-f_0)^2 + g_3(x-f_0)^3 + \dots \quad (4)$$

$g(x)$  は  $f(x)$  の逆関数だから  $f(g(x)) = x$  である。この関係式に (3) と (4) を代入すると次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} x = f(g(x)) &= f_0 + (x-f_0) \\ &= f_0 + f_1(g_1(x-f_0) + g_2(x-f_0)^2 + g_3(x-f_0)^3 + \dots) \\ &\quad + f_2(g_1(x-f_0) + g_2(x-f_0)^2 + g_3(x-f_0)^3 + \dots)^2 \\ &\quad + f_3(g_1(x-f_0) + g_2(x-f_0)^2 + g_3(x-f_0)^3 + \dots)^3 \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

(5) の最上段の式と 2 段以降の式の  $(x-f_0)$  の各次数の係数が等しいと置き、逆関数の係数  $g_k$  ( $k=1, \dots$ ) を求め、逆関数を得る。定数項は  $f_0$  で等しくなる。1 次の係数から、次のような関係式が得られる。その関係式から  $g_1$  が計算できる。

$$1 = f_1 g_1 \quad \text{したがって} \quad g_1 = \frac{1}{f_1} \quad (6)$$

最上段の式の  $x-f_0$  の 2 次の係数は 0 である。これから  $g_2$  を求めると次のようになる。

$$0 = f_1 g_2 + f_2 (g_1)^2 \quad g_2 = -\frac{f_2 (g_1)^2}{f_1} = -\frac{f_2}{(f_1)^3} \quad (7)$$

最上段の式の  $x - f_0$  の 3 次の係数も 0 である。これから  $g_3$  を求めると次のようになる。

$$0 = f_1 g_3 + 2f_2 g_1 g_2 + f_3 (g_1)^3 \quad g_3 = -\frac{2f_2 g_1 g_2 + f_3 (g_1)^3}{f_1} = \frac{2(f_2)^2 - f_1 f_3}{(f_1)^5} \quad (8)$$

この操作を繰り返せば、逆関数の Taylor 展開が次のように得られる。

$$g(x) = f^{-1}(x) = p + \frac{1}{f_1}(x - f_0) - \frac{f_2}{(f_1)^3}(x - f_0)^2 + \frac{2(f_2)^2 - f_1 f_3}{(f_1)^5}(x - f_0)^3 + \dots \quad (9)$$

この時、元の Taylor 展開の展開位置は  $x = p$  であるが、逆関数の展開位置は  $x = f_0$  となり一般に展開位置が異なることに注意する必要がある。

関数  $f(x)$  の逆関数  $y$  は、 $f(y) = x$  を満たす。この式を微分すると、逆関数が満たす微分方程式が得られる。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)} \quad (10)$$

この微分方程式の解を Taylor 展開すること<sup>3)</sup>によっても、逆関数を Taylor 展開することができる。これを使えば、逆関数に 0 を代入すれば、解が得られることになる。逆関数の Taylor 展開式の収束範囲が非常に広くかつ十分速く収束ならば、この方法で解を計算することができる。この Taylor 展開式を Padé に展開を行い、計算を効率化をはかることもできる。2 次の逆関数を分子 1 次、分母 1 次の Padé 展開した式が 3 次の Hally 法として知られている。

1 変数の関数を Taylor 展開することができるので、方程式を有限項で打ち切った Taylor 展開式で近似できる。1 変数の非線形方程式を Taylor 展開して、代数方程式で近似することになる。方程式  $f(x) = 0$  の関数  $f(x)$  を  $x = a$  における 1 次の Taylor 展開で近似すると

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 0 \quad (11)$$

となる。これを解くと次のようになる。

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \quad (12)$$

すなわち Newton 法となる。2 次の Taylor 級数で近似すると次のようになる。

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2 = 0 \quad (13)$$

この 2 次方程式を解くと、次のようになる。

$$x = a + \frac{-f'(a) \pm \sqrt{(f'(a))^2 - 2f(a)f''(a)}}{f''(a)} \quad (14)$$

この展開式は 2 次方程式なので解は 2 つある。この中の一つを選ばなければならない場合は、絶対値の小さい数値の方がより精度良く満たすので、通常この解を選ぶ。さらに、3 次の Taylor 展開式、4 次の Taylor 展開式と近似を上げ、解の公式によって解を計算する方法が考えられる。3 次、4 次の方程式の解の公式が複雑であるためか、これらの方法はほとんど使われていない。1 次式で近似する方法は Newton 法であるからよく使われるが、2 次式で近似する方法もこれまでほとんど使われてない。

方程式を Taylor 展開し、方程式を代数方程式で近似する。この場合、代数方程式の解法を利用することができる。代数方程式には定評がある DKA 法<sup>12)</sup>がある。この方法は、 $n$  次の方程式の  $n$  個の根を同時に求める方法である。本論文で扱う問題は一般に無限個の解がある問題を扱うので、この方法では使えない。

1 根だけを計算する方法として、櫻井等<sup>9)</sup>で扱っている Padé 展開を使う Nouredin 法<sup>6)</sup>がある。効率的と思われたので、この方法を利用することにした。

本論文では、代数方程式でない非線形方程式を、Taylor 展開を行い、代数方程式で近似し解く方法を論じる。Taylor 展開操作で得られた代数方程式で近似された方程式を、分子の次数が 2 次の Nouredin 法を適用することによって複数の根を容易に求めることができた。一般にこれらの方程式は解を無限こあるので、すべての解を求めることはできない。適当な数値を与え、その近くに何個かの根を計算することになる。複数の根を求めるために、減次に相当する計算法も提案した。

## 2. Taylor 展開法

関数を Taylor 展開するための基本的な考え方<sup>3)</sup>を説明する。また、その計算ライブラリも公表<sup>4)</sup>し、登録してある。この計算法を簡単に説明する。

有限項で打ち切った Taylor 級数を係数の配列と展開位置の数値の組み合わせ (構造体) で表す。この Taylor 級数の加減算や Taylor 級数の積や定数倍など容易に定義できる。

### 2.1 逆 数

Taylor 展開式の逆数も容易に計算できる。 $g(x) = \frac{1}{f(x)}$  とし、 $f(x)$ 、 $g(x)$  を次のように展開できるものとする。Taylor 級数の演算は、平行移動によって展開位置を任意の位置へ移すことができるので、一般性を失うことなしに、任意点を中心とした Taylor 級数を扱うことができる。ここでは原点を中心とした Taylor 級数を考える。

$$f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + f_4x^4 \dots \quad (15)$$

$$g(x) = g_0 + g_1x + g_2x^2 + g_3x^3 + g_4x^4 \dots \quad (16)$$

$g(x)$  は  $f(x)$  の逆数であるから、 $f(x)g(x) = 1$  である。この式に、上で与えた  $g(x)$  と  $f(x)$  の Taylor 展開を代入し、 $x$  の各次数を等しいと置くと、次の式が得られる。

$$\begin{aligned} 1 &= f_0g_0 \\ 0 &= f_1g_0 + f_0g_1 \\ 0 &= f_2g_0 + f_1g_1 + f_0g_2 \\ &\dots \end{aligned}$$

この式から

$$\begin{aligned} g_0 &= \frac{1}{f_0} \\ g_1 &= \frac{1}{f_0}(-f_1g_0) \\ g_2 &= \frac{1}{f_0}(-f_2g_0 - f_1g_1) \\ &\dots \\ g_n &= -\frac{1}{f_0} \left( \sum_{k=0}^{n-1} f_{n-k}g_k \right) \\ &\dots \end{aligned}$$

が得られる。このように逆数が得られるので、この逆数を掛けることによって除算を行うことができる。

## 2.2 微積分演算

$n$  次までの Taylor 級数において  $g(x)$  が  $f(x)$  の微積分であるとき、 $f(x)$  および  $g(x)$  の係数は、それぞれ次のような関係になる。積分定数を 0 としている。

$$g(x) = \frac{df(x)}{dx} \quad g_n = 0, \quad g_i = (i+1)f_{i+1} \quad (i = 0, \dots, n-1) \quad (17)$$

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt \quad g_0 = 0, \quad g_i = \frac{1}{i}f_{i-1} \quad (i = 1, \dots, n)$$

## 2.3 指数関数

関数の計算例として指数関数の計算をあげる。指数関数

$$g(x) = e^{f(x)} \quad (18)$$

は、次の微分方程式を満たす。

$$\frac{dg(x)}{dx} = g \frac{df(x)}{dx} \quad (19)$$

両辺に Taylor 級数を代入し、係数を比較することによって、次のような関係が得られる。

$$g_0 = e^{f_0}, \quad g_i = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i j g_{i-j} f_j \quad (20)$$

Taylor 級数の指数関数計算の中には、指数関数の計算は一回しか入らないので、数値微分して Taylor 展開するより非常に少なく計算量で計算できることになる。計算量だけでなく、数値微分と異なり打ち切り誤差を含まないので、精度良く計算できる。この計算法は、対数関数や三角関数などでも同様に計算することができる。

## 2.4 微分方程式

微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad y(0) = a_0 \quad (21)$$

これは、Picard の逐次計算法<sup>10)</sup> を使って、次のように求められる。

$$y_0 = a_0 \quad (22)$$

$$y_n = a_0 + \int_0^x f(t, y_{n-1})dt \quad (23)$$

(23) の反復計算は、通常 1 回の反復計算で解の精度が 1 次上がるので、この計算を  $n$  回繰り返せば通常  $n$  次の Taylor 展開が得られる。この計算には例外があり、次のような方程式の場合、1 回の計算で 2 次の精度が上がる。

$$\frac{dy}{dx} = xy \quad y(0) = a_0 \quad (24)$$

通常、 $n$  回目の反復計算で  $n$  次まで正しい結果が得られるので、Taylor 展開の計算次数を  $n$  次にして計算する。また、 $n$  回目の反復計算には、 $n-1$  回目の反復計算と同じ計算が含まれているのでそれを利用すると約 2 倍速さで計算出来る。この場合前回の計算の途中経過を保存しておく必要があるため、記憶容量を多く必要とする。逆関数の微分方程式を、この方法で計算すれば、逆関数の Taylor 展開も容易にできる。

### 3. 方程式の解法

非線形方程式は、Taylor 展開することによって、代数方程式で近似できる。この近似された代数方程式を解くことによって、元の方程式を解くことができる。

#### 3.1 Taylor 展開式による近似

非線形方程式 (1) を考える。この方程式を次のように  $x = a$  で展開された 1 次の Taylor 展開式で近似する。この場合、 $(x - a)^2$  およびその高次項は十分小さいと仮定することになる。

$$f(a) + f'(a)(x - a) = 0 \quad (25)$$

この方程式を解くと、次のように Newton 法の式が得られる。

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \quad (26)$$

この式から分かるように、 $f'(a) = 0$  ならば計算が出来なくなる。 $f'(a)$  が 0 にならなくても、0 に近い場合、元の方程式 (25) が近似式である条件が成り立たなくなる。このような状態は、(1) の  $f(x)$  が極大や極小状態であるとき起こる。重根の場合、零点が極大または極小状態であるから、方程式が重根を持っている場合にも起こる。

この場合、方程式を 2 次式で近似する。

$$f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 = 0 \quad (27)$$

$f'(a) = 0$  または 0 に近い場合、上の方程式は

$$f(a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 = 0 \quad (28)$$

と近似できる。このとき、この方程式を解くと

$$x = a \pm \sqrt{\frac{2f(a)}{f''(a)}} \quad (29)$$

となる。解は 2 個得られるが、絶対値の小さい方を解とする。その方が元の方程式をより良い精度で満たすからである。根号の中の値が負の場合、計算は実数から外れ複素数の計算となる。この場合、この付近には、実数解がないことになる。式 (29) で、 $f''(a) = 0$  ならば計算を行うことが出来なくなる。この場合、 $f'(a) = f''(a) = 0$  であるから、3 次の Taylor 展開で近似すると

$$f(a) + \frac{f'''(a)}{6}(x - a)^3 = 0 \quad (30)$$

となり、これを解くと

$$x = a + \sqrt[3]{\frac{6f(a)}{f'''(a)}} \quad (31)$$

となる。また分母が 0 になるなら、方程式をさらに高次の Taylor 展開で近似して解くことになる。

2 次式を使って、計算する場合、2 重根を持つ方程式も通常の Newton 法と同程度の反復回数で解くことができる。3 次式を使うならば、3 重根まで高速に計算できる。

#### 3.2 逆関数

逆関数の Taylor 展開は、直接 Taylor 展開する方法や逆関数が満たす微分方程式の解を Taylor 展開する方法がある。その他に、Lagrange inversion formula<sup>2)</sup> がある。この方法によると関数  $f(x)$  の逆関数は

$$g(x) = f(x) - f(0) \quad (32)$$

$$w(x) = \frac{x}{g(x)} \quad (33)$$

$$c_n = \frac{1}{n!} \left\{ \left( \frac{d}{dx} \right)^{n-1} (w(x))^n \right\} \Big|_{x=0} \quad (34)$$

$$f^{-1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x - f(0))^n \quad (35)$$

として、逆関数を求めることができる。この計算は何次まででも計算できるので、任意次数の数値解法になる。逆関数に 0 を代入すれば、解を得ることができる。逆関数を利用する方法は、重根がある場合、式 (9) から分かるように、 $f_1 = f'(p) = 0$  の場合、逆関数の Taylor 展開が不可能である。極値でも  $f'(p) = 0$  となり、逆関数の Taylor 展開が不可能である。重根や極値の近くでは逆関数の Taylor 展開は可能ではあるが、収束領域も小さく有効ではない。重根や極値をあまり持たない方程式に対しては逆関数を利用した解法が有効と思われる。

#### 3.3 Padé 展開法

方程式  $f(x) = 0$  を Padé 展開して解く方法に Nourein 法と呼ぶ方法がある。この方法は方程式を次のように有理関数に展開する方法である。

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{p_0 + p_1(x-a) + \dots + p_m(x-a)^m}{1 + q_1(x-a) + \dots + q_n(x-a)^n} = 0 \quad (36)$$

この式の変形には分母の係数を求めるために  $n$  元連立一次方程式を解かなければならない。このとき現れる連立一次方程式は Toeplitz 行列<sup>7)</sup> と呼ばれ、高速に計算する方法が知られている。このようにして得られた次の方程式を解くことになる。

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = 0 \quad (37)$$

分子の零点を求めれば、上の方程式の解であるから、計算を簡単にするため分子の次数を 1 次か 2 次式にする。このようにすれば、方程式 (37) の解は 1 次方程式か 2 次方程式を解くことによって容易に求められる。元の式  $f(x)$  と Padé 展開の式のあいだには、次の関係式が成り立つ。

$$f(x) = \frac{p_0 + p_1(x-a) + \dots + p_m(x-a)^m}{1 + q_1(x-a) + \dots + q_n(x-a)^n} + O(x^{m+n+1}) \quad (38)$$

この方程式の解は  $(m+n+1)$  次の精度を持つ解となるので、この式から得られた解はかなり良い精度であると期待できる。

### 3.4 減次の方法

代数方程式の根を 1 個ずつ求める場合、同じ根に再度収束しないように、得られた根を  $r$  としたとき、 $x-r$  で割り次数の低い方程式に変換し、より計算しやすい問題に変形することができる。この割り算の計算は、 $r$  が小さい場合を除いて精度良く計算できないことが知られている。

このような操作は、一般の非線形方程式ではできないので、次のような問題に変更する。

$$\frac{f(x)}{x-r} = 0 \quad (39)$$

このようにすれば、解が重根でない限り  $x=r$  は解ではないので、他の解が得られる。もし、 $n$  個の解が得られている場合には、根を  $r_i (i=1, n)$  とすると

$$\frac{f(x)}{\prod_{i=1}^n (x-r_i)} = 0 \quad (40)$$

と変形する。もし重根があれば、その多重回数だけ割った式になる。この計算は、減次と同じ働きをするが、計算に悪条件がないので非常に使い易い方法である。

## 4. 数値例

### 4.1 Newton 法による実根の計算

次のような簡単な方程式を解く。

$$\cos x - x = 0 \quad (41)$$

この方程式を Newton 法で解く場合、この式を手計算で微分して、微分係数を計算する式を容易に求めることができる。 $f(x) = \cos x - x$  であるから、 $f'(x) = -\sin x - 1$  となる。したがって、Newton 法の計算は次の反復式になる。

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\cos x_n - x_n}{\sin x_n + 1} \quad (42)$$

このような単純ならば、このように手作業で微分し、Newton の公式を作成することができる。もし、もう少し複雑な方程式ならば、手作業で行うことは、作業が面倒であるばかりか誤りが発生する可能性がある。数式処理を使う手段もあるが、一般的には通常の数値計算と数式処理との間のやり取りには途中手作業が入り、煩雑で誤りが入る可能性がある。

Taylor 展開をする場合、与える関数は、次のような関数で宣言部分を除いて通常の数値計算のプログラムと同じである。

```
taylor func( const taylor & x )
{
    return cos(x)-x ;
}
```

初期値  $x_0 = 0$  として、計算すると、以下のような結果となる。

1	1.0000000000000000
2	0.750363867840244
3	0.739112890911362
4	0.739085133385284
5	0.739085133215161
6	0.739085133215161

このように 6 回の反復で倍精度の結果が得られる。この問題について、2 次の逆関数を利用して解いてみたところ、極値が多数あるためか非常に収束が遅く 32 回の反復回数を必要とした。

4.2 重根のある問題

次のような重根を持つ方程式を解く。

$$1 - \sin(x) = 0 \tag{43}$$

この問題を Newton 法で解くと、以下のようになる。

- 1 1.0000000000000000
- 2 1.293407993026023
- 3 1.432998366665079
- 途中省略
- 27 1.570796319312208
- 28 1.570796319312208

28 回の反復で解が得られたが、得られた解は 8 桁程度であった。1 次式の Newton 法ではなく、2 次式を利用すると反復回数は 6 回と前例題の Newton 法と同じ程度の反復回数で収束するが、得られた解の精度は 8 桁程度で前例題と同じ程度の精度だった。2 重根については 2 次式を解く方法は、収束を速くするが、計算結果は他の方法と同じ程度である。

ここで利用した 2 次式は、2 次方程式を解くという陰的な計算法であり、数値計算でよく現れる 2 次の計算法とは全く異なるものであることに注意する必要がある。

4.3 Padé 展開を使った解法

方程式を 6 次の Taylor 展開し、それを分子 2 次、分母 4 次の Padé 展開し、その分子の零点を求め、解を計算する。このような計算法を使うと、3、4 回の反復で解が得られる。初期値と解がかなり離れていても、10 回程度で収束した。分子に 2 次式を利用しているので、2 重根を持つ方程式も通常の Newton 法程度の反復計算で解を得ることができる。

4.3.1 複数の実数解の計算

方程式  $1.0 - \sin(x) = 0$  を解いてみた。原点付近の 20 個の解を計算した。1 個の解  $x_1$  が得られたら方程式を

$$\frac{1 - \sin x}{x - x_1} = 0 \tag{44}$$

として、計算を続けた。一般に  $n$  個目の解  $x_n$  が求まったならば

$$\frac{1 - \sin x}{\prod_{k=1}^n (x - x_k)} = 0 \tag{45}$$

として、次の解を求めた。初期値を  $x_0 = 0$  とした計算結果を表 1 に示す。この方程式の解

表 1 重根を持つ問題 ( $x - \sin x = 0$ ) の計算

No.	解 (x)	f(x)	反復回数
1	1.57079632679489656	0.0000000e+00	4
2	1.57079632702028138	0.0000000e+00	3
3	-4.71238898038468967	0.0000000e+00	4
4	-4.71238898036741549	0.0000000e+00	3
5	7.85398163393341431	0.0000000e+00	4
6	7.85398163397448368	0.0000000e+00	4
7	-10.99557428477343457	3.9031278e-18	5
8	-10.99557429570383782	3.3122376e-17	5
9	14.13716694115406902	0.0000000e+00	5
10	14.13716694116048700	0.0000000e+00	4
11	-17.27875959422593866	1.0842022e-19	5
12	-17.27875959526179983	1.0842022e-19	4
13	20.42035224362276224	1.1113072e-17	6
14	20.42035225802992926	4.7000164e-17	5
15	-23.56194490192345015	0.0000000e+00	6
16	-23.56194490192342528	0.0000000e+00	5
17	26.70353755517476912	5.4210109e-20	6
18	26.70353755511324326	0.0000000e+00	6
19	-29.84513020910303638	0.0000000e+00	7
20	-29.84513021814573008	4.0874422e-17	6

は、全て重根なので同じ零点が繰り返されている。2 次式を使った解法を使っているため、重根を持つ方程式であるが通常の Newton 法程度の回数で収束している。ただし、解の精度は重根であるため、あまりよくない。方程式  $f(x) = 0$  の解の重複を避けるための手法として、次の方程式解く方法がある。

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = 0 \tag{46}$$

この方法をここで挙げた例題に適用してみたが、本来の問題にはない極が発生するためか、途中で計算が破綻するが多かった。

4.3.2 複数の複素数解の計算

以下の方程式の複素数解を含めて複数の解を求める。

$$e^x - \sin x - 3x = 0 \tag{47}$$

この方程式の解を原点付近にある 20 個の解を計算する。この方程式を前の例題と同じく分子 2 次、分母 4 次の Padé 展開式で近似して解く。その計算結果を表 2 に示す。計算の初期値は常に原点から出発させて、原点付近の解を求めている。複素数でも容易に解が得られ

表 2 問題 ( $e^x - \sin x - 3x = 0$ ) の複素数解の計算

	解の実部 real(z)	解の虚部 imag(z)	f(z)	反復回数
1	( 0.36042170296032444,	0.0000000000000000 )	0.0000000e+00	3
2	( 1.89002972925198542,	0.0000000000000000 )	0.0000000e+00	4
3	( -3.99758313961312028,	3.45574208334429178 )	3.9720546e-15	4
4	( -3.99758313961312073,	-3.45574208334429223 )	7.1054274e-15	4
5	( 3.46591945156436365,	4.56052804805221879 )	3.5527137e-15	8
6	( 3.46591945156436365,	-4.56052804805221879 )	3.5527137e-15	3
7	(-10.61646303912137057,	-4.22760533725209164 )	2.0715703e-14	4
8	(-10.61646303912137057,	4.22760533725209164 )	2.0715703e-14	4
9	(-17.01124043871458014,	4.66176289222496365 )	7.9441093e-15	5
10	(-17.01124043871458014,	-4.66176289222496365 )	7.9441093e-15	5
11	(-23.35245272233886382,	-4.96451864796556297 )	6.7243964e-14	7
12	( 6.73438159952738324,	-7.39266290560755746 )	5.6804548e-13	4
13	( 6.73438159952738413,	7.39266290560755657 )	7.4104532e-13	3
14	(-23.35245272233886382,	4.96451864796556297 )	6.7243964e-14	5
15	(-29.67172759751493416,	-5.19703370108058404 )	1.5987212e-13	6
16	(-29.67172759751493416,	5.19703370108058404 )	1.5987212e-13	6
17	( 9.86287797193035054,	10.55816982154839501 )	2.2887776e-11	4
18	( 9.86287797193035054,	-10.55816982154839501 )	2.2887776e-11	4
19	(-35.97972343355669267,	5.38577469314626089 )	3.2329694e-13	6
20	(-35.97972343355669267,	-5.38577469314626089 )	3.2329694e-13	6

ることがわかる。

この計算で得られた解が前例題と比較して方程式を精度良く満たしていないが、こちらの例題が普通で、前例題は重根なので、根の精度が悪くても方程式を精度良く満たしている。収束条件が根の収束状況から判断しているためこのような現象が起きる。

5. ま と め

Taylor 展開を使うと、これまで知られた多くの代数方程式の解法を代数方程式だけでなく、一般の非線形方程式の解法に容易に適用できる。ここで挙げた例題は主に倍精度の計算を提示したが、Taylor 展開の計算は 4 倍精度、多倍長精度の計算も容易にできるので、それを使って計算することもできる。

Taylor 展開プログラムには、Taylor 級数の割り算だけでなく、Taylor 展開式を多項式とみなして割り算することも可能なので、いろいろな代数方程式の解法を容易に試すことができる。

代数方程式には多数の解法が知られているが、その全てを調べたわけでないが、1 個の根

を求める計算法としては、分子 2 次、分母 6 次の Nourein 法は安定的にいて使い易い解法と思われる。

参 考 文 献

- 1) Aberth O. Iteration Methods for Finding all Zeros of a Polynomials Simultaneously Math. Comp. 27(1973), 339-344
- 2) Bruijn, N.D.: Asymptotic Methods in Analysis, Dover Pubns (1981).
- 3) 平山, 小宮, 佐藤, Taylor 級数法による常微分方程式の解法, 日本応用数学会論文誌, 12(2002), 1-8
- 4) 平山, 館野, 浅野, 川口, Taylor 級数演算ライブラリの使用法, 東北大学情報シナジーセンター大規模科学計算システム広報 SENAC, 40(2007) 29-68
- 5) 久保田光一, 伊理正夫, アルゴリズムの自動微分と応用, コロナ社, (1998)
- 6) Nourein, A.W., Root determination by use of Padé approximants, BIT, 16(1976), 191-297
- 7) Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Numerical Recipes in C, Cambridge University Press, (1988)
- 8) Rall, L. B. , Automatic Differentiation-Technique and Applications, Lecture Notes in Computer Science, Vol.120, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York(1981)
- 9) 櫻井, 鳥居, 杉浦, Padé 近似による代数方程式の反復解法, 情報処理学会誌, 31(1990) 517-522
- 10) 佐野理, キーポイント微分方程式, 岩波書店, 東京, (1993)
- 11) 須之内治男, 石渡美恵子改訂, 数値計算, サイエンス社, (2002)
- 12) 山本哲郎, 数値解析入門, サイエンス社, (2003)