

## 並列処理システムについての一研究\*

大須賀節雄\*\*

## 1. まえがき

最近の情報処理システムの一つの特徴として、並列処理によりシステムの効率を増していることがあげられる。これは改たてて述べるまでもなく、主制御装置のもとで複数台の付属処理装置が並列処理を行なうことであり、これら付属装置としては磁気テープ制御装置や入出力制御装置である場合が多いが、その他ドラムやディスクなどを用いた外部記憶装置、衛星計算機、AD 変換器などの特殊な装置および外部論理演算装置などのようなものであっても形の上では同様である。以後これらを一括して外部処理装置と呼ぶこととする。並列処理を行なうことによって、主制御装置の使用効率は増加するが、反面各外部処理装置については効率が低下する。したがってシステム全体として考えた時には、外部処理装置の台数を増加することにより必ずしも良い結果が得られるとは限らない。このようなことを検討するためには、主制御装置および各外部処理装置の効率を定量的に求めることが必要である。筆者は国鉄座席予約装置 MARS 101 について、これを待ち行列問題として扱ひ、各装置の使用効率を解析的に求めた。待ち行列の立場からは、この問題は有限入力源からの入力に対する単一窓口の行列問題におきかえられる。主制御装置および各外部処理装置内で、処理に要する時間がともにランダムで指数分布に従うような場合には、これは単純マルコフ過程であり、よく知られている機械修理の問題と同じである。しかし MARS 101 のような実時間処理システムでは、主制御装置内で各情報ごとに一定のプログラム・スラップを要し、処理時間もほぼ一定のものとなるため、その解析が必要となる。他方、各外部処理装置内での処理時間はランダムで、指数分布で近似されるものとする。したがって、本稿では

1. 主制御装置内で行なわれる論理演算などに必要な時間は、各外部処理装置からの割り込みに対して一定である。

2. 各外部処理装置での処理時間はランダムで指数分布にしたがう。

という条件のもとで解析を行なっている。MARS 101 の場合に限らず、各外部処理装置から主制御装置への割り込み機能を有し、かつ上記条件を満足するものについては全て同様に取り扱かえるであろう。

本稿ではこの待ち行列問題を解くことにより、主制御装置および各外部処理装置の効率を求め、さらに並列処理システムに生ずるいくつかの問題をこの立場から検討している。

## 2. システムの数学モデルおよび使用効率

以後の記述において、便宜上、主制御装置を MCP、外部処理装置を EPU と呼ぶことにする。

これから解析しようとするモデルは、 $n$  台の EPU が 1 台の MCP に接続されているようなもので、MCP の内部にはこのシステムによって処理される情報が途切れることなく存在するものとする。MCP はこれら未処理の情報の一つを空いている EPU の一つに与え処理を行なわせる。各 EPU は与えられた情報の処理が済むと、割り込みによってそれを MCP に知らせる。MCP は処理の済んだ情報をそれら EPU から受けとり、再び新しい未処理情報を EPU に与える。この間 MCP 内で一連のプログラムが実行されるため、EPU は一定の時間待たされる。また EPU の一つが MCP に割り込んだ時、MCP が他の EPU のためのプログラム実行中であつたり、すでにいくつかの EPU が割り込んでいたりした場合、新しく入った EPU はそれが済むまで待たねばならない。ここに EPU の待ち行列ができる。このモデルでは EPU は有限の入力発生源であり、MCP はサービス時間一定の窓口に対応する。以後 EPU に新しい情報を与えるために、MCP がプログラムを実行することを、EPU に対する MCP のサービスと称し、この時間をサービス時間と呼ぶことにする。システムをこのようなモデルでおきかえ、この行列の長さの分布が求められれば、MCP および EPU の使用効率を得ることができる。ここで使用効率は、定常状態において MCP および EPU が動作中である確率と定義する。行列に

\* A Study on the Concurrent Processing System. by Setso Osuga (Institute of Space and Aeronautical Science, University of Tokyo)

\*\* 東京大学宇宙航空研究所

$\nu$  個の EPU が待っている確率 (MCP によりサービス中のものも含める) を  $p_\nu$  とし、行列中の平均長さを  $\bar{\nu}$  とする。MCP および EPU の使用効率をそれぞれ  $q_p, q_E$  と表わすと、 $q_p$  については MCP が遊休である確率  $p_0$  を 1 より差し引いたもの

$$q_p = 1 - p_0 \tag{1}$$

であり、 $q_E$  については、任意の時間で動作中である EPU の数  $n - \bar{\nu}$  の 1 台あたりの平均値

$$q_E = 1 - \bar{\nu}/n \tag{2}$$

とする。ここで

$$\bar{\nu} = \sum_{\nu=1}^n \nu p_\nu \tag{3}$$

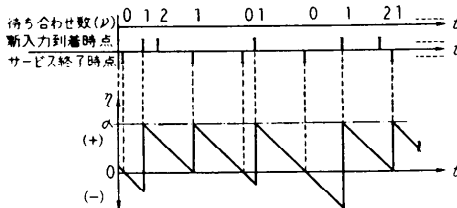
であるから、 $p_\nu$  を得ることにより  $q_p$  および  $q_E$  を得ることができる。

### 3. 待ち行列

モデル化されたシステムの待ち行列の問題は定常マルコフ過程である。この問題を解くために、まず次のような定義を行なっておく。

- $p_\nu(\eta, t)h$ : 時刻  $t$  において行列の長さが  $\nu$  であり、先頭の EPU のサービスが終了するまでの残り時間が  $\eta$  と  $\eta+h$  内にある確率。
- $\lambda$ : EPU の平均処理率。
- $\alpha$ : MCP のプログラム実行時間。

$p_\nu(\eta, t)$  は確率密度関数で、 $t$  に関し連続微分可能、 $\eta$  に関し  $0 < \eta < \alpha$  で連続微分可能とする。 $\eta$  はこの範囲内で時間とともに一様に減少する。 $\eta=h$  は、次の微小時間  $h$  内で行列の先頭の EPU に対するサービスが終了することを示す。したがって先頭の EPU は行列をはなれ、行列の長さは一つ減少し、かつ MCP は新しくサービスに入るから、 $\eta=\alpha$  となる。すなわち  $p_\nu(h, t) \rightarrow p_{\nu-1}(\alpha, t+h)$  なる遷移が行なわれる。ただし  $\nu=1$  であった場合、次に MCP のサービスは停止してしまうが、その際は  $\eta=h$  から  $\eta=\alpha$  への不連続遷移は行なわれず、 $\eta$  は負領域に入り、そ



第1図 サービス残り時間 ( $\eta$ ) および待ち合わせ数 ( $\nu$ ) の時間的变化

のまま減少し続けるものとする。このようにして、 $\eta, \nu$  および  $t$  の関係は第1図のようになる。このような系について遷移方程式をたてることができる。

$$\partial/\partial t = D_t, \quad \partial/\partial \eta = D_\eta$$

と表わし、これを  $t$  および  $\eta$  に関する微分演算子とする。付録 A に示されているように、 $0 < \eta < \alpha$  にたいして、

$$\left. \begin{aligned} (D_t - D_\eta)p_0(\eta, t) &= -n\lambda p_0(\eta, t), \\ (D_t - D_\eta)p_1(\eta, t) &= -(n-1)\lambda p_1(\eta, t), \\ (D_t - D_\eta)p_\nu(\eta, t) &= -(n-\nu)\lambda p_\nu(\eta, t) \\ &\quad + (n-\nu+1)\lambda p_{\nu-1}(\eta, t), \quad (1 < \nu < n) \\ (D_t - D_\eta)p_n(\eta, t) &= \lambda p_{n-1}(\eta, t), \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

および、 $\eta=0$  から  $\eta=\alpha$  への遷移に関して

$$\left. \begin{aligned} p_0(0_-, t) &= p_1(0_+, t), \\ p_1(\alpha, t) &= p_2(0_+, t) + n\lambda \int_{-\infty}^0 p_0(\eta, t) d\eta, \\ p_\nu(\alpha, t) &= p_{\nu+1}(0_+, t), \quad (1 < \nu < n), \\ p_n(\alpha, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

が得られる。これが基本方程式となる。次に  $\nu \neq 0$  の場合、 $p_\nu(\eta, t)$  を  $\eta$  について  $(0, \alpha)$  で、 $\nu=0$  の場合、 $(-\infty, 0)$  で積分し、

$$\int_0^\alpha p_\nu(\eta, t) d\eta = p_\nu(t), \quad \int_{-\infty}^0 p_0(\eta, t) d\eta = p_0(t) \tag{6}$$

と表わす。 $p_\nu(t)$  は  $\eta$  に無関係に時刻  $t$  で  $\nu$  個の待ちが存在する確率を示す。

次に、 $\eta \rightarrow -\infty$  で  $p_0(\eta, t) \rightarrow 0$  であるから、

$$\int_{0_+}^\alpha D_\eta p_\nu(\eta, t) d\eta = [p_\nu(\eta, t)]_{0_+}^\alpha = p_\nu(\alpha, t) - p_\nu(0_+, t),$$

$$\int_{-\infty}^{0_-} D_\eta p_0(\eta, t) d\eta = [p_0(\eta, t)]_{-\infty}^{0_-} = p_0(0_-, t)$$

である。(4) 式を  $\eta$  について上述の範囲で積分し、(5) 式を用いると

$$\left. \begin{aligned} D_t p_0(t) &= -n\lambda p_0(t) + p_1(0_+, t), \\ D_t p_1(t) &= -(n-1)\lambda p_1(t) + n\lambda p_0(t) \\ &\quad - p_1(0_+, t) + p_2(0_+, t), \\ D_t p_\nu(t) &= -(n-\nu)\lambda p_\nu(t) \\ &\quad + (n-\nu+1)\lambda p_{\nu-1}(t) - p_\nu(0_+, t) \\ &\quad + p_{\nu+1}(0_+, t), \quad (1 < \nu < n) \\ D_t p_n(t) &= \lambda p_{n-1}(t) - p_n(0_+, t) \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

が得られる。(7) 式で  $p_\nu(0_+, t)$  などが求めれば解を得ることができる。これは時刻  $t$  において行列の長さが  $\nu$  でサービスが終了する確率であるから、 $t-\alpha$  の状態によって表わすことができ、付録 A で示されるように

$$\left. \begin{aligned} p_1(0_+, t) &= n\lambda r_a(0, n-1)p_0(t-\alpha) \\ &\quad + r_a(0, n-1)p_2(0_+, t-\alpha), \\ p_\nu(0_+, t) &= n\lambda r_a(\nu-1, n-1)p_0(t-\alpha) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\nu} r_a(\nu-k, n-k)p_{k+1} \\ &\quad (0_+, t-\alpha), \quad (1 < \nu < n) \\ p_n(0_+, t) &= n\lambda r_a(n-1, n-1)p_0(t-\alpha) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} r_a(n-k, n-k)p_{k+1} \\ &\quad (0_+, t-\alpha). \end{aligned} \right\} (8)$$

である。ここで  $r_a(s, m)$  は、任意の時刻で  $n$  台のうち  $m$  台の EPU が動作しており（したがって  $n-m$  台が行列中にある）、 $\alpha$  時間の間にそれらのうちの  $s$  台が処理を終了して MCP に割り込んでくる確率で

$$r_a(s, m) = \binom{m}{s} (1-e^{-\lambda\alpha})^s e^{-(m-s)\lambda\alpha} \quad (9)$$

と表わされる。

我々は定常状態のみを問題にすれば良いのであるから、 $p_\nu(t)$  などの定常状態に達した時の値を単に  $p_\nu$  と表わすなら、付録 A で導かれているように、(7) および (8) 式から

$$\left. \begin{aligned} np_0 &= nr_a(0, n-1)p_0 + (n-1)r_a(0, n-1)p_1, \\ (n-1)p_1 &= nr_a(1, n-1)p_0 \\ &\quad + (n-1)r_a(1, n-1)p_1 + (n-2)r_a(0, n-2)p_2, \\ (n-\nu+1)p_{\nu-1} &= nr_a(\nu-1, n-1)p_0 \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\nu} (n-k)r_a(\nu-k, n-k)p_k, \quad (1 < \nu < n) \\ p_{n-1} &= nr_a(n-1, n-1)p_0 \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)r_a(n-k, n-k)p_k \end{aligned} \right\} (10)$$

が得られる。 $r_a(s, m)$  は既知関数であるから、この  $n$  個の斉次方程式より、 $p_1$  から  $p_{n-1}$  までの解が

$$p_\nu = K_\nu p_0 \quad (\nu=1, 2, \dots, n-1) \quad (11)$$

の形で  $p_0$  によって表わされる。

$p_n$  については付録 B で導かれているように、(4) 式を定常状態において解き、得られた  $p_\nu(\gamma)$  を  $\gamma$  について積分することにより

$$p_n = -\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu + \lambda\alpha \sum_{\nu=0}^{n-1} (n-\nu)p_\nu \quad (12)$$

が得られる。上式右辺の  $p_\nu$  はすべて  $p_0$  で表わされているから、 $p_n$  もまた  $p_0$  で表わされる。 $p_0$  はこれら確率の和が 1 に等しいことから

$$\sum_{\nu=0}^n p_\nu = 1 \quad (13)$$

より得られる。(12) 式を用いれば、

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\nu=0}^n p_\nu &= p_0 + \lambda\alpha \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)p_k \\ &= p_0 [1 + \lambda\alpha \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)K_k] = 1 \\ \therefore p_0 &= 1 / [1 + \lambda\alpha \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)K_k] \end{aligned} \right\} (14)$$

と得られる。このようにして (10) 式を解いて  $p_\nu$  を求めればすべての確率が求められ、(1)、(2) および (3) 式より MCP および EPU の効率を求めることができる。

例 (1)  $n=1$  の場合

これは concurrency のない場合であり

$$p_0 = 1/(1+\lambda\alpha), \quad p_1 = \lambda\alpha/(1+\lambda\alpha),$$

$$q_p = \lambda\alpha/(1+\lambda\alpha), \quad q_E = 1/(1+\lambda\alpha)$$

が得られる (第 3 図参照)。

例 (2)  $n=2, 3$  および 5 の場合。

$n=2, 3$  および 5 について、 $p_\nu, q_p$  および  $q_E$  を求めると、第 2 図から第 4 図に示したような結果が得られる。第 3 図にみられるように、 $\lambda\alpha$  または  $n$  が増加すると  $q_p$  は増加し、 $q_E$  は減少する。 $\lambda\alpha$  または  $n$  の増加は MCP にたいする割り込みの頻度が増加することであるから当然の結果である。これに対し、第 4 図のように  $n\lambda\alpha$  に対して plot すると、 $n$  とともに  $q_p, q_E$  とも増加している。 $n\lambda\alpha$  を一定とすることは、MCP の平均能力と、全 EPU の平均能力の比を一定とすることになるから、この結果は concurrency の効果を示している。

例 (3)  $n \rightarrow \infty, \lambda \rightarrow 0, n\lambda = \lambda' = \text{const}$  の場合。

これは Concurrency を極限まで実行した場合である。この極限操作を (9) 式に行なうと

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} r_a(\nu, n-k) &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \binom{n-k}{\nu} (1-e^{-\lambda\alpha})^\nu e^{-(n-k-\nu)\lambda\alpha} \\ &= e^{-\lambda'\alpha} (\lambda'\alpha)^\nu / \nu! \end{aligned}$$

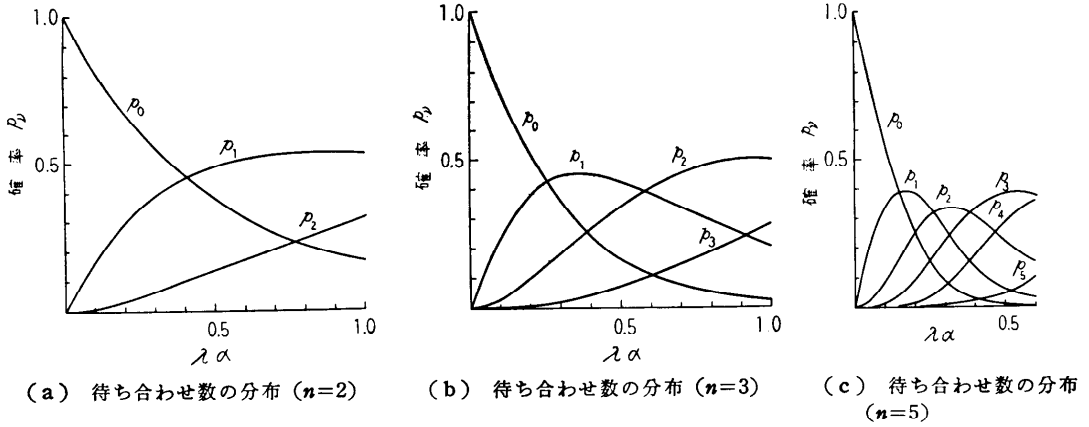
が得られ、これを (10) 式に代入して

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= e^{-\lambda'\alpha} (p_0 + p_1), \\ p_1 &= \lambda'\alpha e^{-\lambda'\alpha} (p_0 + p_1) + e^{-\lambda'\alpha} p_2, \\ p_{\nu-1} &= (\lambda'\alpha)^{\nu-1} e^{-\lambda'\alpha} (p_0 + p_1) / (\nu-1)! \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\nu} (\lambda'\alpha)^{\nu-k} e^{-\lambda'\alpha} p_k / (\nu-k)! \\ &\quad (z < \nu) \end{aligned} \right\} (15)$$

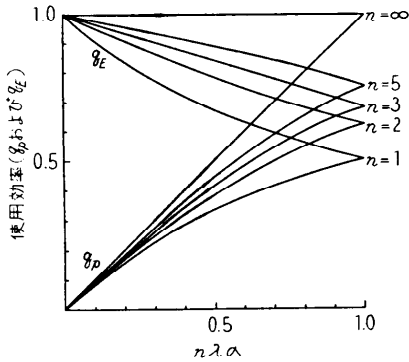
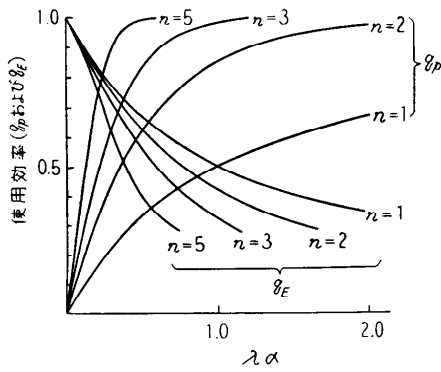
が得られ、この解として、

$$\left. \begin{aligned} p_\nu &= p_0 [e^{-\lambda'\alpha} \cdot (-1)^{\nu-1} / (\nu-1)! \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\nu-2} e^{-(\nu-1-k)\lambda'\alpha} (-1)^k (\lambda'\alpha)^k \\ &\quad \{(\nu-k) e^{\lambda'\alpha} - (\nu-k-1) e^k\} / k! ] \end{aligned} \right\} (16)$$

が得られる。ここで



第 2 図



$$p_0 = 1 - \lambda'\alpha \tag{17}$$

である。これはポアソン入力、サービス時間一定の単一回線系の解と一致する。

$\lambda \rightarrow 0$  のかわりに  $\alpha \rightarrow 0$  で、 $n\lambda\alpha = \alpha' = \text{const}$  であ

っても解の形は同じである。この場合上式で  $\lambda'\alpha$  のかわりに  $\lambda\alpha'$  とおけば良い。

#### 4. 並列処理にともなう諸問題

これまでの結果にもとずいて、単にシステムの効率のみでなく、並列処理にともなって生ずるいくつかの問題について考察してみる。

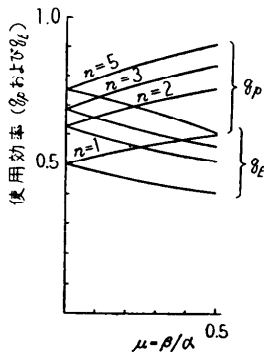
##### 4.1. 主制御プログラムの長さの影響

並列処理システムでは、割り込みが生じた時にまず主制御プログラムが働らき、これが次に行なうプログラムを決定したり、割り込みに付随する一連の処理を行なう場合が多い。このプログラム実行時間を  $\beta$  とし、どの割り込みに対しても一定であるとする、すでに述べたプログラム実行時間  $\alpha$  にこの分が加えられねばならない。  $\beta$  が  $\alpha$  に比して十分小さければ問題はないが、この比が大きくなるとその影響が現われてくる。  $\beta \neq 0$  の場合には、  $\lambda\alpha$  のかわりに  $\lambda(\alpha + \beta)$  が用いられる。仮りに  $n\lambda$  が一定であるとする、  $\beta$  が増すにつれ  $q_E$  が減少し、逆に  $q_E$  を一定に保つためには結合し得る EPU の台数  $n$  を減少せねばならなくなる。一例として  $\mu = \beta/\alpha$  と表わし、  $n\lambda\alpha = 1$  なる関係がある時に  $\beta$  が 0 から増加した場合の  $q_p$  および  $q_E$  の変化を示すと第 5 図のようになる。またのちに実例としてあげているシステムのように、情報の平均処理速度を早めるために、処理手順をいくつかに分割し、その各部分を異なった装置で処理するような場合には、  $\beta$  の影響はもっと顕著である。MCP での処理時間  $\alpha$ 、EPU 1 台を用いて処理を行なう時の EPU での平均処理時間  $m$  を必要とする情報があるとする。この処理時間は、それぞれ独立な  $n$  個の部分に等分割す

ることができるとし、その各々を別の EPU で処理するように変えた場合、各 EPU での平均処理時間  $m_n = m/n$ 、プログラム実行時間も  $\alpha_n = \alpha/n$  である。これにたいして主制御プログラムの長さ  $\beta$  は変化しないから、1情報あたりの平均処理時間は  $m/n + (\alpha/n + \beta)n = m/n + \alpha + n\beta$  であり、これを最小にする  $n$  が存在する。この  $n$  は  $n = 1/\sqrt{\lambda\alpha\mu}$  である。また  $\lambda_n = 1/m_n$  とすると、

$$\lambda_n(\alpha_n + \beta) = \lambda\alpha(1 + n\mu)$$

であるから、プログラム実行時間  $\alpha$  が、 $1 + n\mu$  倍になった場合と等価であり、第3図より  $q_p$  および  $q_E$  が容易に得られる。



第5図 主制御プログラムの長さが使用効率に及ぼす影響 ( $n\lambda\alpha=1$ )

#### 4.2. 優先順位が与えられている場合

MCP にたいする各 EPU からの割り込みに、一定の優先順位のある場合、各 EPU の効率を求めるためには優先順位のある待ち行列問題を解かねばならない。MCP の効率に関しては、各 EPU が同一の処理時間分布にしたがい、かつ各 EPU に対応するプログラム実行時間が等しい場合にはこれまでの方法で得ることができる。また後に実例としてあげている MARS 101 のように、最も高い優先順位を有する EPU の効率が特に重要な場合がある。この場合最高位の優先順位を持つ EPU の効率は

$$q_E = m/(m + \bar{\tau}), \quad \bar{\tau}; \text{平均待ち時間} \quad (18)$$

として得ることができる。 $\bar{\tau}$  は、EPU が MCP に割り込んだのち再び処理に入るまでの平均待ち時間であり、割り込みの抜け方により異なる。すなわち

i) 最高位の割り込みが生じた場合、MCP は処理中のものを一時中止して、直ちにその EPU の処理を行なう。

ii) MCP は処理中のものを終了したのち、その EPU の処理に入る。

という2種の場合があり、i) の場合には  $\bar{\tau} = \alpha$  であるから

$$q_E = m/(m + \alpha) = 1/(1 + \lambda\alpha) \quad (19)$$

である。

ii) の場合、割り込みが生じた時 MCP は処理中であり、その処理の残り時間が  $\eta$  である確率密度を仮りに  $f(\eta)$  とすると

$$\bar{\tau} = \int_0^{\infty} \eta f(\eta) d\eta + \alpha$$

であるが、割り込みの生ずる時点は任意に選べるから、この第1項を近似的に待ち行列が0でない確率  $1 - p_0$  と、平均残り時間  $\alpha/2$  の積で表わす。すなわち

$$\bar{\tau} \doteq (1 - p_0)\alpha/2 + \alpha = \alpha(1 + q_p/2) \quad (20)$$

これより

$$q_E \doteq m/[m + \alpha(1 + q_p/2)] = 1/[1 + \lambda\alpha(1 + q_p/2)] \quad (21)$$

である。いずれの場合も  $\alpha$  には主制御プログラムの長さを含んでいるものとする。このように最高位の優先順位を持つ EPU に関しては、これまでの方法で効率を得ることができる。

つぎに、優先順位がつけられ、かつ上記 i) の割り込み方式を用いるとすると、MCP は処理中のものより高位の割り込みが生じそれを先行させる前に、それまで使用していた各種レジスタ（アキュムレータ、インデックス・レジスタその他）の内容を一時退避させる必要がある。このために記憶装置の一部を退避専用メモリとして準備することになるが、このような専用メモリをできるだけ少なくするために、この数を退避の生ずる数の確率によってきめねばならない。1回の退避に使用される語数はレジスタをすべてストアし得る語数であるが、これを1単位とし、 $k$  単位を準備しておくものとする。 $k$  の数は、 $k+1$  種以上の退避が生ずる確率を一定値  $r$  以下にするようにきめるものとする。 $n, \lambda, \alpha$  がきまると、第2図 (a)~(c) 図のような行列の数の分布から、 $\nu$  個の行列のできる確率  $p_\nu$  が求められる。これら  $\nu$  個は各々異なった優先順位を有している。割り込みの生ずる順序はランダムであるとするなら、この  $\nu$  個のうちレジスタ退避のおこる数は、これら割り込みの生ずる順序に依存する。 $\nu$  個のものを優先順位の低いものから高いものの順に 1, 2, ...,  $\nu$  と番号をつける。MCP が  $j$  番目のものの処理中に  $j$  より小さい番号のもの（順位の低いもの）

が割り込んでも退避はおこらない。ν個のうちi個の退避のおこる確率を  $f_{\nu i}$  と表わすと、これはν個の順列のうち、あとから高い番号の現われる数がi個であるような並べ方の数の割合であり、

$$\left. \begin{aligned} f_{\nu 0} &= 1/\nu, \\ f_{\nu i} &= \sum_{k=i}^{\nu-1} f_{k i-1}/\nu, \quad (1 \leq i \leq \nu-1) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

と表わされる。この値を  $\nu=1 \sim 5$  について示すと、

$$\begin{aligned} f_{10} &= 1, & f_{20} &= 1/2, & f_{21} &= 1/2, & f_{30} &= 1/3, \\ f_{31} &= 1/2, & f_{32} &= 1/6, & f_{40} &= 1/4, & f_{41} &= 11/24, \\ f_{42} &= 1/4, & f_{43} &= 1/24, & f_{50} &= 1/5, & f_{51} &= 5/12, \\ f_{52} &= 7/24, & f_{53} &= 1/12, & f_{54} &= 1/120, \end{aligned}$$

である。これより一般にi個の退避の生ずる確率  $g_i$  は

$$\left. \begin{aligned} g_i &= \sum_{\nu=i+1}^n p_{\nu} \cdot f_{\nu i} \quad (i \neq 0) \\ g_0 &= \sum_{\nu=1}^n p_{\nu} \cdot f_{\nu 0} + p_0 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

したがってである

$$\sum_{i=0}^k g_i \geq 1-r \quad (24)$$

より  $k$  を求めれば良い。

例  $n=5, \lambda\alpha=0.2, r=0.02$

第3図より、 $p_0=0.255, p_1=0.385, p_2=0.255, p_3=0.095, p_4=0.01, p_5 \doteq 0$  であるから

$g_0=0.802, g_1=0.180, g_2=0.018, g_3 \doteq 0, g_4 \doteq 0$  が得られる。

$$g_0 + g_1 = 0.982 > 1 - 0.02 = 0.98$$

であるから、 $k=1$  と選ぶ。すなわち実際に生ずる場合の98%は1単位の退避用メモリで済むことになる。

### 5. 実 例

これまで述べた方法を用いて、実在の実時間処理システムである国鉄の座席予約システム MARS 101 の評価を行なった。このシステムは実時間処理関係の諸装置のほか、通常は実時間以外で用いられる磁気テープ装置、入出力装置その他からの総計 20 種の割り込み機能を備えているが、特に重要なのは常時動作している実時間処理関係の5種である。その他のものは、実時間処理関係のものに比し、使用される回数、時間ともに小であるから、システム効率の面からは省略して考える。したがって、このシステムを前述のようなモデルでおきかえることができれば、 $n=5$  の場合に相当するが、このためには一定の条件が必要である。このシステムでは処理される情報ごとに必要な処理の手順を分割し、その各部をこれら5種の EPU が

受け持っている。したがって各情報はこれら5種の EPU を一定の順序で1度ずつ通ることにより処理される。このようなシステムの並列処理を行なわせるために、各 EPU の前に情報の待ち行列がつくれられ、これら EPU 相互の関連を少なくしている。この待ち行列に並び得る数を十分長くしておけば、各 EPU は並列に動作するから、処理時間分布が同じ指数分布で表わされるなら、モデル化の条件を満足している。

実際には各 EPU の平均処理時間が多少異なるので厳密にはモデルと異なったものとなる。しかし行列の長さは十分に大であるといっても、有限であるから、各 EPU は次の列が一杯になっていたり、前段の EPU の処理が遅れて行列内に情報がなくなったりすると停止して次に処理に入り得るようになるまで待機せねばならず、平均的な意味で全 EPU は同じ割合で動作することになる。これは平均処理時間が最大の EPU によってきめられる。このように各 EPU は待機時間を含めて平均処理時間が等しくなるが、相互に独立なものではなくなってくる。この極端な場合として、一つの EPU の平均処理時間が他に比して著しく大で、かつ分散が小さいとすると、他の EPU はすべてこれに同期し、EPU が一つしかない場合と同じようになる。これに対し各 EPU の平均処理時間に大きな差がなく、処理時間の分散が大であると、各 EPU を独立として扱った方がより実際に近いものとなる。

MARS 101 の場合は、厳密にはこの中間の場合であるが、むしろ後者に近いものとして、各 EPU を独立に扱っている。各 EPU の処理時間分布は、比較的平均値に対する偏差の比が大きい分布であるので、これを待機時間を含めて指数分布で近似している。

このシステムでは平均処理時間が最も大きな FC と呼ばれる EPU に最高位の優先順位が与えられている。また MCP 内で各 EPU に対応するプログラム実行時間は、FC に関するものが他の4種よりやや長いので FC に関する  $q_E$  を求めるために (21) 式を一部修正して

$$q_E = m / (m + \alpha_1 + q_p \alpha_2 / 2)$$

$\alpha_1$ : FC に対応するプログラム実行時間

$\alpha_2$ : 他4種に対応するプログラム実行時間

として用いている。

このシステムについては、理論計算とは別に、計算機を用いたシミュレーションが行なわれた。シミュレーションの主目的が本稿の意図するところとは異なっていたため理論値と比較し得るデータの数が少ないが

参考結果として理論値とともに示すと下表のようである。ここでシステム処理率は単位時間あたりの情報処理数であり理論的には  $\lambda q_E$  である。

シミュレーション結果との比較

理 論 値					シミュレーション結果			
$\lambda$ [1/ms]	$\alpha_1$ [ms]	$\alpha_2$ [ms]	$q_p$	$q_E$	システム 処理率 [1/ms]	$q_p$	$q_E$	システム 処理率 [1/ms]
0.0288	4.0	2.25	0.345	0.892	0.0257	0.330	0.898	0.0254
0.0292	4.0	2.50	0.370	0.885	0.0258	0.357	0.886	0.0256
0.0458	4.0	2.50	0.550	0.823	0.0377	0.530	0.826	0.0378

6. む す び

並列処理システムでは、主制御装置および外部処理装置の使用効率を高くするように努力するのは当然であるが、特に実時間処理の場合には使用効率が直接システムの処理能力に影響するから十分な検討が必要である。本稿ではそのために、すべての外部処理装置が同等であるとみなされる場合についてシステム・アナリシスを行ない、使用効率を求めた。また同時に並列処理にもなって生ずる幾つかの問題について検討を行なった。この結果は少数例ではあるが実在のシステムについて行なわれたシミュレーションの結果と比較的よく一致している。各外部処理装置が同等とみなされないような場合には、さらに一般化した解析が必要となるであろう。ただし、実例としてあげた場合のように、各外部処理装置は異なっているも同等とみなして良好な結果が得られる場合もあるから、モデルの選定には注意を要する。

最後に本稿の作成にあたって数々の御指導、御助言をいただいた東京大学航空研究所穂坂衛教授に感謝の意を表する。

付録 A: 基本遷移方程式の導入

本文中で定義した  $p_v(\eta, t)$  を用い、次のように基本遷移方程式を得ることができる。以後“残り時間が  $\eta$  である”とは、MCP により処理中のものの処理終了までの残り時間が  $\eta$  と  $\eta+h$  の間にあることを意味する。 $h$  は任意の微小量である。時刻  $t+h$  において  $\nu$  個の EPU が待っており (MCP によりサービス中のものを含める)、その時の残り時間が  $\eta$  である確率は、よく知られているように時刻  $t$  の状態により表わすことができる。これは  $\eta \neq 0$  または  $\eta \neq \alpha$  について、

$$\left. \begin{aligned} p_0(\eta, t+h) &= p_0(\eta+h, t)(1-n\lambda h) + 0(h^2), \\ p_1(\eta, t+h) &= p_1(\eta+h, t)[1-(n-1)\lambda h] + 0(h^2), \\ &\vdots \\ p_\nu(\eta, t+h) &= p_\nu(\eta+h, t)[1-(n-\nu)\lambda h] \\ &\quad + p_{\nu-1}(\eta+h, t)(n-\nu+1)\lambda h \\ &\quad + 0(h^2), \\ &\vdots \\ p_n(\eta, t+h) &= p_n(\eta+h, t) \\ &\quad + p_{n-1}(\eta+h, t)\lambda h + 0(h^2) \end{aligned} \right\} \quad (A-1)$$

であり、 $\eta=0$  または  $\eta=\alpha$  については

$$\left. \begin{aligned} p_0(0, t+h) &= p_1(0+, t)[1-(n-1)\lambda h] + 0(h), \\ p_1(\alpha, t+h) &= p_2(0+, t)[1-(n-2)\lambda h] \\ &\quad + \int_{-\infty}^{0-} p_0(\eta, t)n\lambda d\eta + 0(h), \\ &\vdots \\ p_\nu(\alpha, t+h) &= p_{\nu+1}(0+, t)[1-(n-\nu)\lambda h] + 0(h) \\ &\vdots \\ p_n(\alpha, t+h) &= 0(h), \end{aligned} \right\} \quad (A-2)$$

である。 $\eta$  の連続な範囲内で、

$$p_v(\eta+h, t) = p_v(\eta, t) + (\partial/\partial\eta)p_v(\eta, t)h + 0(h^2),$$

と展開して (A-1) 式に代入すると、一般に  $\nu$  個の待ちがある場合について

$$\begin{aligned} p_v(\eta, t+h) &= p_v(\eta, t) + h(\partial/\partial\eta)p_v(\eta, t) \\ &\quad - (n-\nu)\lambda h p_v(\eta, t) + (n-\nu+1) \\ &\quad \lambda h p_{\nu-1}(\eta, t) + 0(h^2), \end{aligned}$$

が得られ、 $h \rightarrow 0$  とすると、

$$\begin{aligned} (\partial/\partial t)p_v(\eta, t) &= (\partial/\partial\eta)p_v(\eta, t) - (n-\nu)\lambda p_v(\eta, t) \\ &\quad + (n-\nu+1)\lambda p_{\nu-1}(\eta, t), \end{aligned}$$

が得られる。 $\partial/\partial t = D_t$ 、 $\partial/\partial\eta = D_\eta$  とすると本文中の (4) 式が得られ、また (A-2) 式において  $h \rightarrow 0$  とすると本文 (5) 式が得られる。

つぎに  $p_\nu(0+, t)$  は時刻  $t-\alpha$  の状態および  $t-\alpha$  から  $t$  に到る  $\alpha$  時間間の遷移状態によってきまるもので、次のような場合の確率の和である。

i) 時刻  $t-\alpha$  で行列は 0 であり、次の  $h$  の間に

EPU の一つが行列に入ってくる。さらに続く  $\alpha$  の間に、 $\nu-1$  個の EPU が行列に入ってくる。

ii) 時刻  $t-\alpha$  で行列中に  $k$  個 ( $2 \leq k < \nu+1$ ) 並んでおり、そのうちの一つ (先頭のもの) が次の  $h$  の間にサービスが終了して出ていく。さらに続く  $\alpha$  の間に  $\nu-k+1$  個の EPU が行列に入ってくる。

これを式で表わすと本文 (8) 式が得られる。(8) 式をすべて加え合わせると、

$$\sum_{s=0}^m r_s(s, m) = 1$$

であるから、

$$\sum_{\nu=1}^n p_\nu(0_+, t) = p_0(t-\alpha)n\lambda + \sum_{\nu=2}^n p_\nu(0_+, t-\alpha),$$

あるいは

$$\sum_{\nu=1}^n [p_\nu(0_+, t) - p_\nu(0_+, t-\alpha)] = p_0(t-\alpha)n\lambda - p_1(0_+, t-\alpha) = -D_t p_0(t-\alpha),$$

が得られる。 $\sum_{\nu=1}^n p_\nu(0_+, t)$  は時刻  $t$  で一つの EPU が MCP でのサービスを終って再び処理に入る確率を示すから、定常状態ではこの式の左辺は 0 である。したがって

$$p_0(t-\alpha) = \text{const} = p_0(t) = p_0$$

となる。同様にして  $D_t p_\nu(t) = 0$  を本文 (7) 式に代入すると、

$$\left. \begin{aligned} n\lambda p_0 &= p_1(0_+, t) \\ (n-1)\lambda p_1 &= p_2(0_+, t) \\ \vdots \\ (n-\nu+1)\lambda p_{\nu-1} &= p_\nu(0_+, t) \\ \vdots \\ \lambda p_{n-1} &= p_n(0_+, t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-3})$$

が得られ、これより本文 (10) 式が得られる。

付録 B:  $p_n$  の誘導

本文 (4) 式において、定常性から  $p_\nu(\eta, t)$  等を単に  $p_\nu(\eta)$  と表わすと、

$$\left. \begin{aligned} D_\eta p_0(\eta) &= n\lambda p_0(\eta), \\ D_\eta p_1(\eta) &= (n-1)\lambda p_1(\eta), \\ \vdots \\ D_\eta p_\nu(\eta) &= (n-\nu)\lambda p_\nu(\eta) \\ &\quad - (n-\nu+1)\lambda p_{\nu-1}(\eta), \\ \vdots \\ D_\eta p_n(\eta) &= -\lambda p_{n-1}(\eta), \end{aligned} \right\} \quad (\text{B-1})$$

となり、これを未定常数  $c_0 \dots c_n$  を含んだ形で解くと、

$$\left. \begin{aligned} p_0(\eta) &= c_0 e^{n\lambda\eta}, \\ p_1(\eta) &= c_1 e^{(n-1)\lambda\eta}, \\ \vdots \\ p_\nu(\eta) &= \sum_{k=1}^{\nu} (-1)^{\nu-k} e^{(n-k)\lambda\eta} (n-k)! \end{aligned} \right\} \quad (\text{B-2})$$

$$\left. \begin{aligned} &C_k / (\nu-k)! \cdot (n-\nu)!, \\ &\vdots \\ p_n(\eta) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} C_k e^{(n-k)\lambda\eta}, \end{aligned} \right\}$$

が得られる。 $C_k$  の値は本文 (5) 式および (A-3) 式の関係を用いて順次  $p_\nu$  の関数として得ることができる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= C_1 = n\lambda p_0, \\ C_2 &= (n-1)\lambda(p_1 + n p_0), \\ \vdots \\ C_\nu &= (n-\nu+1)\lambda \sum_{k=0}^{\nu-1} p_k (n-k)! \\ &\quad / (\nu-1-k)! \cdot (n-\nu+1)! \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{\nu-1} p_k (n-k)! / (\nu-1-k)! (n-\nu)!, \\ \dots \\ C_n &= \lambda \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) p_k, \end{aligned} \right\} \quad (\text{B-3})$$

である。ところで

$$p_n = \int_0^\alpha p_n(\eta) d\eta,$$

であるから、(B-2) 式より

$$p_n = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k} C_k [e^{(n-k)\lambda\alpha} - 1] / (n-k)\lambda + C_n \alpha \quad (\text{B-4})$$

が得られる。(B-3) 式において  $p_k$  に (10) 式の関係を用いて式の変形を行なったのち (B-4) 式に代入して整理すると、

$$p_n = -\sum_{k=1}^{n-1} p_k + \lambda \alpha \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) p_k \quad (\text{B-5})$$

が得られる。

参考文献

- 1) W. Feller: An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. 1. John Wiley and Sons, 1957.
- 2) ア・ヤ・ヒンチン, 森村訳: 待ち合わせ理論入門, 広川書店.
- 3) 宮脇一男, 長岡崇雄, 毛利悦造: 待ち合わせ理論とその応用, 日刊工業新聞社.
- 4) A.B. Shafritz, A.E. Miller, K. Rose: Multi-level Programming for a Real-Time System, Proc. Eastern Joint Computer Conf, December 1957, pp. 1-16.
- 5) P.E. Boudreau, M. Kac: Analysis of a Basic Queuing Problem Arising in Computer Systems, IBM Journal, Vol. 5, No. 2, April 1961.
- 6) P.E. Boudreau, J.S. Griffin, Jr, M.Kac: A Discrete Queuing Problem with Variable Service Times, IBM Journal, Vol. 6, No. 4, October 1962.

(昭和 39 年 3 月 30 日受付)