定期乗車券の自動改札における通用径路の符号化問題*

（グラフにおける道の符号化問題）

白川　功** 嵩　忠雄*** 尾崎　弘***
小田博基**** 井上和夫****

1. まえがき

乗車券の自動改札は，現在ロンドンならびにニューヨークの地下鉄で試験的に行なわれていて，今後次第に実用化が広がっていくように思われる．わが国のように人口が過密で，しかも鉄道を主たる輸送機関としている国状からいって，自動改札は最も切実なものの一つである，しかし乗車券といっても，普通乗車券，回数券，定期乗車券，優待券などがあり，これらのいずれをも自動改札することは，かなり困難な問題である．

本文は自動改札全般について述べるものではなく，定期乗車券の自動改札に関連する表題の問題を取り扱うものである，ここでわが国の定期乗車券の制度に関する次の事項を確認しておこう，

（1） 通用期間中は1日に何回でも乗車できる．

（2） 通用径路（区間）上の任意の駅で下車できる．

これら二つの事項は英米の場合と異なっているようで，本文は（2）の事項に関連して，（イ）通用径路をなるべく容易にしかも少数のビットで符号化できて，かつ（ロ）復号機構の簡単な符号化法を見いだすという問題を取り扱う．（イ）は定期券への書き込みを容易にするためであり，（ロ）は各駅に設置する自動改札機の機構を簡単にするためである．

鉄道網における一つの径路を考えることは，線形グラフにおける一つの道を考えることに対応する．したがって，上記の問題は，与えられたグラフの同一節点を2度通らないすべての道の符号化を，与えられた節点または枝が指定された道の上にあるか否かの判定を機構的に行ないやすくするという条件の下で考察する問題に帰着する．

グラフ中の同一節点を2度通らない道を数えあげてそれを符号化する場合，道の指定に要するビット数は小ですむが，与えられた任意の節点または枝が指定された道の上にあるか否かの判定機構はきわめて複雑となる．道の指定に要するビット数が少々増しても，その判定機構が簡単化される方が望ましい．

本文では，この道の指定に要するビット数をあまりふやさずに判定機構を簡単化しようという観点にたって，道の符号化および復号化問題を考察する．

2. 道の表示法

連結した線形グラフ（linear graph）における n_1, n_2 を両端の節点（vertex）とする一つの指定された道（path）$P(n_1, n_2)$ は，その道の上の節点を n_1 から順に $n_\alpha, n_\beta, \cdots\cdots, n_\delta, n_2$ とおけば，

$$P(n_1, n_2)=[n_1, n_\alpha, n_\beta, \cdots\cdots, n_\delta, n_2] \quad (1)$$

で表わされる[1]．しかし，グラフの同一節点を2度通らないすべての道の符号化，復号化を考慮する場合，もっと有効な方法で道の表示をしなければならない．そこでわれわれはその目的のために，道 $P(n_1, n_2)$* を，一つの木（tree）上の n_1, n_2 間の道を用いて表示することを考える．

いま，n 個の節点と m 個の枝とから成る連結グラフ G において，一つの木 T を選んでその補木（co-tree）を C_T として，C_T に含まれる枝の組を $\{c_i\}(i=1, 2, \cdots\cdots, \mu)$ とする．ただし，μ は G の退化次数（nullity）$m-n+1$ である．補木の枝 $c_i(i=1, 2, \cdots\cdots, \mu)$ と T 上の枝により決定される閉路（circuit）を E_i とすれば，$\{E_i\}(i=1, 2, \cdots\cdots, \mu)$ は閉路の基本系（fundamental system of circuits）をなす[2]．G の指定された道 $P(n_1, n_2)$ が通る補木 C_T の枝の組を $\{c_{i_k}\}(k=1, 2, \cdots\cdots; i_k \subset \{1, 2, \cdots\cdots, \mu\})$ とし，c_{i_k} により決定される基本閉路（fundamental circuit）E_{i_k} に対

* On the Coding of the Paths in a Graph, by I. Shirakawa, T. Kasami, H. Ozaki (Faculty of Engineering, University of Osaka), ahd H. Oda, K. Inoue (Kinki-Sharyo Co., Ltd.)

** 大阪大学大学院　*** 大阪大学工学部　**** 近畿車輌技術研究所

* 以下，道といえば特にことわらない限り同一節点を2度通らないものとする．

して，

$$E=E_{i_1}\oplus E_{i_2}\oplus\cdots\cdots\equiv\sum_k\oplus E_{i_k}{}^{*} \qquad (2)$$

で定義されるGの部分グラフEを考えると，Eは一つの閉路であるかまたは同一の枝を共有しないいくつかの閉路から成るグラフであるが，以下単に指定された閉路Eと呼ぶことにする．また，n_1, n_2 間のT上の道を，n_1, n_2 につながるその道の両端の枝をそれぞれe_1, e_2 として，$P^T(e_1, e_2)$ で表わせば，$P(n_1, n_2)$ は

$$P(n_1, n_2)=P^T(e_1, e_2)\oplus E \qquad (3)$$

と書ける．したがって，与えられた任意の枝eに対して，$e\epsilon P(n_1, n_2)$ であるかどうかの判定の問題は，結局，eが $P^T(e_1, e_2)$ に属するか否か，および e が指定された閉路Eに属するか否かの判定の問題に帰せられる．

ところで，自動改札の問題などではグラフGは平面的（planar）であると一応仮定してよいから，補木を適当に選らぶことにより，どの枝eもごく少数の基本閉路にしか属さないようにできる．それゆえ，$e\epsilon E$ の判定の機構化は容易である．一方，$e\epsilon P(n_1, n_2)$ の判定に対しては，その機構化が容易になるように適当な符号化を行なわなければならない．

3. $e\epsilon E$ の判定法

指定された道 $P(n_1, n_2)$ が補木の枝の組 $\{c_i\}(i=1, 2, \cdots\cdots, \mu)$ のどれを通るかを示す情報源として μ 個のビット $\{A_i\}(i=1, 2, \cdots\cdots, \mu)$ を設け，$P(n_1, n_2)$ が通る補木の組 $\{c_{i_k}\}$ に対して，それに対応するビットの組 $\{A_{i_k}\}$ の各々に1を与え，他のビットには0を与える．いま，G上の任意の枝eに対して，その枝の属する基本閉路の組を $\{E_{j_h}\}(h=1, 2, \cdots\cdots;\ j_h\subset\{1, 2, \cdots\cdots, \mu\})$ とするとき，$e\epsilon E=\sum_k\oplus E_{i_k}$ であるのは，$\{A_{j_h}\}$ のおのおののビットを調べて，

$$\sum_h\oplus Aj_h=1^{**} \qquad (4)$$

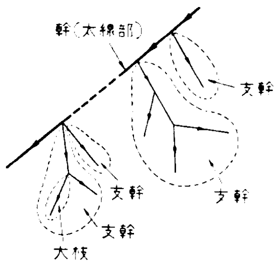
が成立するとき，かつそのときに限る．前述のように $\{A_{j_h}\}$ のビット数は多くの場合ごく少数であるから，この判定は容易である．

4. $e\epsilon P^T(e_1, e_2)$ の判定法

T上の与えられた任意の枝 e が $P^T(e_1, e_2)$ に属するか否かの判定を能率良く行なえるように，次の手順に従って木T上の各枝に番号を与える．

（1） グラフGの，同じ接点を2度通らない，できるだけ長い道***を見出し，その道を含むTを求める．その際，補木 C_T の枝をGの分岐点（線度**** が3以上の節点）につながる枝の中から選らぶ．このようなTやC_Tを選らぶ理由は，後の判定操作の手数を軽減するためである．

（2） 上でTを求める際に見いだした道をTの幹と呼ぶこととして，最も左へ移して**第1図**のように樹枝状グラフにする．



第1図 Tの樹枝状グラフ

（3） Tにおける分岐点と分岐点の間，またはTにおける分岐点と端点***** の間のT上の道で，途中にTの分岐点をもたないもののおのおのを大枝と呼ぶことにする．各枝に，幹上においては上から下に，幹以外においては幹から出る向きにそれぞれ矢印を付す．ある節点 v，枝 e，または大枝 b から出発して矢印の方向にたどって達し得る部分にある各要素をそれぞれ v, e, またはbより下位にあるということにして，v, e, またはb, およびそれらより下位にある各要素から成るTの部分グラフをそれぞれ Γv, Γe, またはΓb で表わす．一方，下位の逆の関係にある場合上位にあるといい，v, e, またはb, およびそれらより上位にある各要素から成るTの部分グラフをそれぞれ $\Gamma^{-1}v$, $\Gamma^{-1}e$, または $\Gamma^{-1}b$ で表わす．いま，幹からでる枝 e_i に対して Γe_i なるTの部分グラフを支幹と定義する（第1図）．

（4） 各大枝に次の手順で名前を与える．

（i） 幹上の最下位の大枝を b_1 とする．

（ii） すでに名前が与えられた大枝の組を $\{b_k\}(k=1,2, \cdots\cdots, M)$ として，Tからこの $\{b_k\}$ を除い

* $\oplus$ は，$A\oplus B=A\cup B-A\cap B$ で定義される集合論的排他和を表わす．

** ここでの $\oplus$ は，（2）式と異なって，$A\oplus B=A\vee B-A\wedge B$ の論理的排他和を表わす．どの意味で $\oplus$ が用いられているかは，式をみて明白であるから，以下どの意味で用いられているかは断らずに用いる．

*** 道の長さは，その道の上にある枝の数で表わす．

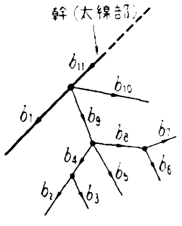
**** ある接点の線度（degree）とは，その節点につながる枝の数をいう．

***** T における端点とは，T 上の節点でその節点の T における線度が1なるものをいう．

た部分グラフを $T-\{b_k\}$ とする．b_M と同じ分岐点から出る道が部分グラフ $T-\{b_k\}$ にある場合，その道のうちで矢印の方向に向かって最も右側にある道を矢印に沿ってたどり，その道の最下位の大枝に b_{M+1} なる名前を与える．そのような道がないとき (iii) へ移る．

(iii)　大枝 b_M と同一の分岐点を共有し，かつ b_M より上位にある大枝に b_{M+1} なる名前を与える．

この操作を繰り返してすべての大枝に名前を与える．**第2図**はその一例を示す．



第2図　大枝の名前

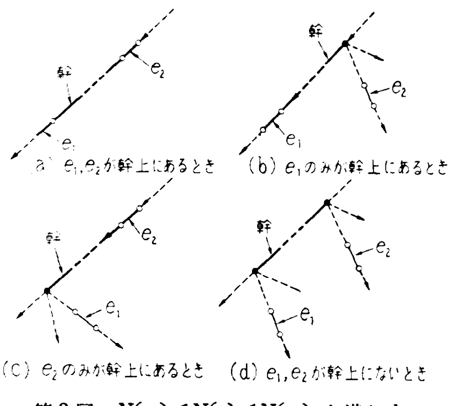
(5)　各枝に次の手順で番号を与える．

(i)　大枝 b_1 の最下位の枝には番号0を与える．

(ii)　ある大枝 b_k において，b_k 上の枝 e_{k_i} に番号 $N(e_{k_i})$ が与えられたとき，その e_{k_i} のすぐ上位にある b_k 上の枝 e_{k_j} に番号 $N(e_{k_j})>N(e_{k_i})$ を与える．

(iii)　b_k 上の最上位の枝 e_p に $N(e_p)$ が与えられたとき b_{k+1} 上の最下位の枝 e_q には番号 $N(e_q)>N(e_p)$ を与える．

このとき，任意の枝 e に対して $e\epsilon P^T(e_1, e_2)$ の判定法は次のように表わされる．ただし，$N(e_1)\leq N(e_2)$ とする．



第3図　$N(e_1)\leq N(e)\leq N(e_2)$ を満たす幹上の枝（太線部）

(1)　与えられた枝 e が幹上にあるとき；

$$N(e_1)\leq N(e)\leq N(e_2) \rightleftarrows e\epsilon P^T(e_1, e_2) \quad (5)$$

〔証明〕　e が幹上にあり，かつ $N(e_1)\leq N(e)\leq N(e_2)$ ならば，e は**第3図**の各場合において太線部上にある．逆に，幹上の e が，$e\epsilon P^T(e_1, e_2)$ を満たすとき，第3図のいずれの場合でも e は太線部上にある．このような e に対して明らかに $N(e_1)\leq N(e)\leq N(e_2)$ が成立する．(証終り)

(2)　与えられた枝 e が支幹上にあるとき；

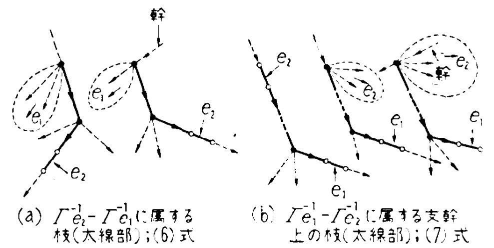
支幹上の任意の枝 e に対して，その e の属する大枝を b として，Γb で定義される T の部分グラフ $\mathcal{T}(e)$ を部分支幹（支幹をも含む）ということにする．部分支幹 $\mathcal{T}(e)$ 上の最小の枝の番号を $\varphi(e)$ とすれば，この場合の $e\epsilon P^T(e_1, e_2)$ の判定法は次のようである．

$$\left\{\begin{array}{ll} N(e_1)<\varphi(e),\ \text{かつ}\ \varphi(e)\leq N(e_2)\leq N(e), & (6) \\ \text{または} & \\ \varphi(e)\leq N(e_1)\leq N(e),\ \text{かつ}\ N(e)\leq N(e_2), & (7) \end{array}\right\}$$

$$\rightleftarrows e\epsilon P^T(e_1, e_2)$$

〔証明〕　支幹上の枝の e に対にして (6) 式が成立するとき，(6) 式の第2式は，Γe, $\varphi(e)$ の定義により，e_2 が T の部分グラフ $\Gamma e(\subset\mathcal{T}(e))$ の上にあることを示し，しかも第1式により，e_1 は部分支幹 $\mathcal{T}(e)$ にないから，$P^T(e_1, e_2)$ は必らず e を通る．(7) 式が成立するときも同様にして $P^T(e_1, e_2)$ が e を通ることがいえる．

逆に，$e\epsilon P^T(e_1, e_2)$ であれば，e は $\Gamma^{-1}e_2$ から $\Gamma^{-1}e_1$ に含まれる部分を取り除いた T の部分グラフ $\Gamma^{-1}e_2-\Gamma^{-1}e_1$ に属するか，または $\Gamma^{-1}e_1$ から $\Gamma^{-1}e_2$ に含まれる部分を取り除いた T の部分グラフ $\Gamma^{-1}e_1-\Gamma^{-1}e_2$ に属する．支幹上にある枝 e に対して，$e\epsilon\Gamma^{-1}e_2-\Gamma^{-1}e_1$ であれば (6) 式が成立し，$e\epsilon\Gamma^{-1}e_1-\Gamma^{-1}e_2$ であれば (7) 式が成立する (**第4図**)．(証終り)



第4図　(6)，(7) 式を満たす枝（太線部）

この判定法から明らかなように，(1) の場合の判定が (2) のそれより簡単である．前に，幹として G のできるだけ長い道を選んだのは上の理由による．

5. 判定機構の簡単化

支幹上にある枝 e に対する $e\epsilon P^T(e_1, e_2)$ の判定手続きにおいて，$N(e)$, $N(e_1)$, $N(e_2)$, $\varphi(e)$ の間でシリアル（serial）に比較を行なう場合，その比較操作の手数を軽減するために，次の手順で各枝に番号を割り当てる．

（1） 各大枝 b_k に次のように重み $w(b_k)$ を割り当てる．

（i） 大枝 b_k が支幹上の一つの T の端点を含むとき，その b_k に重み $w(b_k)=2^{q_k}$ を与える．ただし，q_k は $2^{q_k}\geq m(b_k)$ （$m(b_k)$：大枝 b_k 上の枝の数）を満たす最小の整数である．

（ii） 大枝 b_k が支幹上にあり，その b_k より下位にあるすべての大枝に重みが与えられたとき，それらの和を $W(\Gamma b_k-b_k)$ として，$w(b_k)=2^{q_k}-W(\Gamma b_k-b_k)$ とする．ここで q_k は $2^{q_k}\geq m(b_k)+W(\Gamma b_k-b_k)$ を満たす最小の整数である．したがって，$W(\Gamma b_k)\equiv W(\Gamma b_k-b_k)+w(b_k)=2^{q_k}$ となる．

（iii） T の各分岐点において，その分岐点から出る支幹または部分支幹のうちで，重みの大なるものほど左へ移す．

（iv） 前節の（4）の操作と同じ手順で各大枝に名前をつけ直す．

（v） 幹上の大枝を下位のものから順に $b_{t_1}(=b_1)$, b_{t_2}, ……, b_{t_u} とおいて，それらに次の手順で重みを与える．

（イ） b_{t_1} と同じ分岐点から出る最も左にある支幹 τ_1 の重みを $W(\tau_1)=\sum_{b_i\epsilon\tau_1}w(b_i)$ とするとき，$W(\tau_1)$ で割り切れかつ $m(b_{t_1})$ より小でない最小の整数を $w(b_{t_1})$ とする．

（ロ） $b_{t_{i-1}}(2\leq i\leq u-1)$ に重みが与えられたとき，次の条件を満たす $w(b_{t_i})$ を b_{t_i} の重みとする．すなわち，b_{t_i} と同じ分岐点から出る最も左にある支幹 τ_i の重み $W(\tau_i)$ で $w(b_{t_i})+W(\Gamma b_{t_i}-b_{t_i})$ が割り切れ，かつ $w(b_{t_i})$ は $w(b_{t_i})\geq m(b_{t_i})$ を満たす最小の整数であること．

（ハ） b_{t_u} には重み $w(b_{t_u})=m(b_{t_u})$ を与える．

（2） 各枝 e_i に番号 $N(e_i)$ を次の手順で与える．

（i） 大枝 b_1 の最下位の枝には 0 なる番号を与える．

（ii） 大枝 b_k （$k\geq 2$）の最下位の枝 e_{k_1} には番号 $N(e_{k_1})=\sum_{i=1}^{k-1}w(b_i)$ を与える．

（iii） 大枝 b_k に属する枝 e_{k_i} に番号 $N(e_{k_i})$ が与えられたとき，e_{k_i} のすぐ上位にある b_k 上の枝 e_{k_j} には番号 $N(e_{k_i})=N(e_{k_j})+1$ を与える．

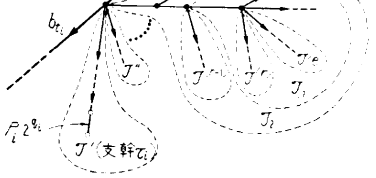
このように T の各枝に番号を割り当てると，支幹上の任意の枝 e に対して，部分支幹 $\mathcal{T}(e)$ の重み $W(\mathcal{T}(e))=\sum_{b_i\epsilon\mathcal{T}(e).}w(b_i)$ は，q を適当は整数として，$W(\mathcal{T}(e))=2^q$ で表わされる．また，$\bar{\varphi}(e)$ を $\bar{\varphi}(e)=\varphi(e)+W(\mathcal{T}(e))-1=\varphi(e)+2^q-1$ で定義すると，$\bar{\varphi}(e)+1$ は大枝 b_{k+1}（ただし，e は b_k に属するものとする）上の最下位の枝の番号となる．

この $\varphi(e)$ と $\bar{\varphi}(e)$ の間には次の関係がある．

〔1〕 $\varphi(e)$ と $\bar{\varphi}(e)$ の 2 進表示（s けた）において，上位から最初の $s-q(\geq 2)$ ビットの内容は同一であり，かつ $\mathcal{T}(e)$ 以外のどの枝の番号にもその 2 進表示の上位の $s-q$ ビットには，$\varphi(e)$ と $\bar{\varphi}(e)$ の同一部分（上位の $s-q$ ビット）が割り当てられない．ただし，s は $2^s\geq\sum_{b_i\epsilon T}w(b_i)$ を満たす最小の整数である．

〔証明〕 まず，$\varphi(e)$ は p を適当な整数として $\varphi(e)=p2^q$ で表わされることを証明する．

幹上の大枝 $b_{t_i}(1\leq i\leq u-1)$ と同じ分岐点から出る最も左の支幹 τ_i に対して，もし $\varphi(e)$ がその支幹 τ_i 上の最小の枝の番号であれば，割り当ての方法から明らかなように，$\varphi(e)=p_iW(\tau_i)=p_i2^{q_i}$ で表わされる．ただし，$W(\tau_i)=2^{q_i}$ とおき，p_i は適当な整数とする．$\mathcal{T}(e)\subset\tau_i$ であるから $q\leq q_i$．したがって，$\varphi(e)=p_i2^{q_i-q}\cdot 2^q\equiv p\cdot 2^q$ で表わされる．もし $\varphi(e)$ が支幹 τ_i 上の最小の枝の番号でない場合，$\mathcal{T}(e)$ を含む部分支幹（支幹も含む）を $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, ……（$\mathcal{T}(e)\subset\mathcal{T}_1\subset\mathcal{T}_2\subset$……）とし，$\mathcal{T}(e)$, $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, …… のおのおのと同じ分岐点から出て $\mathcal{T}(e)$, $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, …… のそれぞれ左にある互いに包含し合わない部分支幹（支幹を含む）を左から順に $\mathcal{T}'$ $\mathcal{T}''$, ……, $\mathcal{T}^{(r)}$ とおけば（**第 5 図**），



第 5 図　部分支幹 $\mathcal{T}(e)$, $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, ……; $\mathcal{T}'$, $\mathcal{T}''$, ……, $\mathcal{T}^{(r)}$.

$\mathcal{T}'\ \mathcal{T}''$, ……, $\mathcal{T}^{(r)}$ の重みはそれぞれ $2^{q'}, 2^{q''}$, ……, $2^{q^{(r)}}(q\leq q^{(r)}\leq\cdots\cdots\leq q''\leq q')$ で表わされる．$\mathcal{T}'$ 上の最小の枝の番号は $p_i2^{q_i}(=p_i2^{q'})$ で表わされるから $\varphi(e)=p_i2^{q_i}+2^{q'}+2^{q''}+\cdots\cdots+2^{q^{(r)}}=(p_i2^{q_i-q}+2^{q'-q}+2^{q''-q}+\cdots\cdots+2^{q^{(r)}-q})\cdot 2^q\equiv p\cdot 2^q$ と書ける．

ゆえに，$\bar{\varphi}(e)=\varphi(e)+W(\mathcal{T}(e))-1=p2^q+2^q-1=(p+1)2^q-1$ となり，$\varphi(e)$ と $\bar{\varphi}(e)$ の2進表示において上位から最初の $s-q$ ビットは一致する．また，$p2^q+2^q<2^s$ から $q+1<s$, すなわち $s-q\geq 2$.

一方，$\varphi(e)\leq X\leq\bar{\varphi}(e)$ を満たすXについてのみ上位の $s-q$ ビットの内容が $\varphi(e)$ または $\bar{\varphi}(e)$ のそれと同一であるから，$\mathcal{T}(e)$ 以外の枝でその番号の上位の $s-q$ ビットが $\varphi(e)$ または $\varphi(e)$ のそれと一致するものはない．(証終り)

このように，支幹上の任意の枝 e に対して，$\varphi(e)$ の上位の最初の $s-q\equiv l$ ビットの内容を $l\{\varphi(e)\}$ で表わせば，$p(e)=l\{\varphi(e)\}=l\{\bar{\varphi}(e)\}$ で定義される $p(e)$ を $N(e)$ のプレフィクス (prefix) ということにする．

プレフィクスの間には次の関係がある．

〔2〕 幹上にない任意の一対の枝 e_α, e_β に対して，$\mathcal{T}(e_\alpha)\supset\mathcal{T}(e_\beta)$ であるとき，かつそのときに限り，$p(e_\alpha)$ は $p(e_\beta)$ に含まれる．すなわち，$p(e_\alpha)$ のビット長を l_α とおけば，$p(e_\alpha)=l_\alpha\{p(e_\beta)\}$ である．

〔証明〕 $\mathcal{T}(e_\alpha)\supset\mathcal{T}(e_\beta)$ であるとき，$\varphi(e_\alpha)\leq\varphi(e_\beta)<\bar{\varphi}(e_\beta)\leq\bar{\varphi}(e_\alpha)$ であるから，明らかに $p(e_\alpha)=l_\alpha\{p(e_\beta)\}$ である．一方，$p(e_\alpha)=l_\alpha\{p(e_\beta)\}$ であれば，$p(e_\beta)$ のビット長 l_β は $l_\beta\geq l_\alpha$ で，しかも上の〔1〕の性質により，上位から最初の l_α ビットの内容が $p(e_\alpha)$ である番号の枝は $\mathcal{T}(e_\alpha)$ 上にのみ割り当てられているから $\mathcal{T}(e_\alpha)\supset\mathcal{T}(e_\beta)$ である．(証終り)

この〔1〕,〔2〕の性質を利用すれば，支幹上の各枝 e に対する $e\epsilon P^T(e_1\ e_2)$ の判定法はより簡単になる．

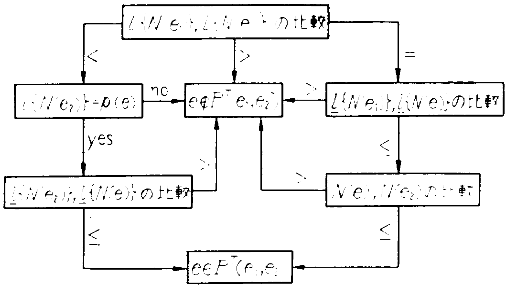
いま，支幹上の与えられた枝 e に対して，$N(e)$ のプレフィクス $p(e)$ のビット長を l とすれば，$e\epsilon P^T(e_1, e_2)$ の判定の手続きは次のようになる．

〔操作1〕 $N(e_1), N(e)$ の上位の最初の l ビットをシリアルに比較する．もし $l\{N(e_1)\}<l\{N(e)\}$ と判定すれば〔操作2〕へ，$l\{N(e_1)\}=l\{N(e)\}$ であれば〔操作3〕へそれぞれ移る．一方，もし $l\{N(e_1)\}>l\{N(e)\}$ ならば $e\notin P^T(e_1, e_2)$.

〔操作2〕 $N(e_2)$ と $p(e)$ とを最初の l ビットを比較して $l\{N(e_2)\}=p(e)$ ならば，$N(e_2)$, $N(e)$ の上位から l ビット目より下位の内容を $\underline{l}\{N(e_2)\}$, $\underline{l}\{N(e_2)\}$ として，$\underline{l}\{N(e_2)\}$, $\underline{l}\{N(e)\}$ をシリアルに比較する．$\underline{l}\{N(e_2)\}\leq\underline{l}\{N(e)\}$ であれば $e\epsilon P^T(e_1, e_2)$ である．それ以外の場合 $e\notin P^T(e_1, e_2)$.

〔操作3〕 $N(e_1)$, $N(e)$ の上位から $l+1$ ビット目以下をシリアルに比較する．$\underline{l}\{N(e_1)\}\leq\underline{l}\{N(e)\}$ であれば，つぎに $N(e)$, $N(e_2)$ を比較して $N(e)\leq N(e_2)$ であると判定すれば $e\epsilon P^T(e_1, e_2)$ で，それ以外の場合，$e\notin P^T(e_1\ e_2)$.

この判定手順を図示すると**第6図**のようである．

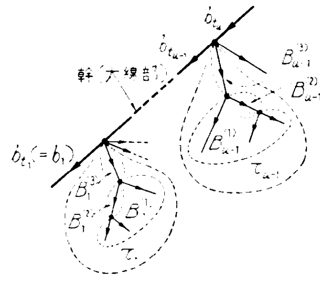


第6図　支幹上の枝 e に対する $e\epsilon P^T(e_1, e_2)$ の判定手順

このように判定を行なえば，前節のプレフィクスの性質を利用しない場合に比べてかなり手数が軽減される．

ところで，上のようにプレフィクスの性質を用いて復号できるように符号化した場合，その符号化に要するビット数がそうでない場合に比して高々何ビット増すか検討してみる．

前に定義した支幹 $\tau_i(i=1, 2, \cdots\cdots, u-1)$ において Tの端点を含む大枝の集合を $B_i^{(1)}$, τ_i から $B_i^{(1)}$ を除いた部分グラフ $\tau_i-B_i^{(1)}$ 上の $T-B_i^{(1)}$ の端点を含む大枝の集合を $B_i^{(2)}$ とし，順次 $B_i^{(3)}, B_i^{(4)}$, ……, $B_i^{(r_i)}$ とおく (**第7図**)．このとき，



第7図　Tにおける $\{\tau_i\}$, $\{b_{t_i}\}$ および $\{B_i^{(k)}\}$ $(k=1, 2, \cdots\cdots, r_i)$

$$W(\tau_i) > \sum_{b_k \in B_i^{(1)}} 2^{r_i} m(b_k) + \sum_{b_k \in B_i^{(2)}} 2^{r_i-1} m(b_k) + \cdots\cdots$$
$$\cdots + \sum_{b_k \in B_i^{(r_i)}} 2m(b_k) \equiv X_i \qquad (8)$$

一方， $w(b_{t_i}) < m(b_{t_i}) + X_i$,

$$(i=1, 2, \cdots\cdots, n-1) \qquad (9)$$

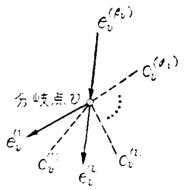
であるから

$$\sum_{b_k \in T} w(b_k) = \sum_{i=1}^{u-1} \{W(\tau_i) + w(bt_i)\} + w(b_{t_u})$$
$$< \sum_{i=1}^{u-1} \{m(b_{t_i}) + 2X_i\} + w(b_{t_u}) = \sum_{i=1}^{u-1} \{m(b_{t_i})$$
$$+ 2^{r_i+1} \sum_{b_k \in B_i^{(1)}} m(b_k) + 2^{r_i} \sum_{b_k \in B_i^{(2)}} m(b_k) + \cdots\cdots$$
$$+ 2^2 \sum_{b_k \in B_i^{(r_i)}} m(b_k)\} + m(bt_u) \qquad (10)$$

したがって，$\sum_{b_k \in T} w(b_k)$ は $\sum_{b_k \in T} m(b_k)$ に対して，高々 $\max_i(r_i)+1$ ビット増加する．

6. 節点 v に対する $v \in P(n_1, n_2)$ の判定法

グラフ G の任意の節点 v につながる補木 C_T の枝の組を $\{c_v^{(i)}\}$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, \alpha_v)$ とし，v につながる木 T の枝の組を $\{e_v^{(k)}\}$ $(k=1, 2, \cdots\cdots, \beta_v)$ とおく．ただし $N(e_v^{(1)}) < N(e_v^{(2)}) < \cdots\cdots < N(e_v^{(\beta_v)})$ とする **(第8図)**.



第8図 分岐点 v につながる $\{c_v^{(i)}\}$, $\{e_v^{(k)}\}$

$v \in P(n_1, n_2)$ であるのは，$\{c_v^{(i)}\}$ の少なくとも1個が $P(n_1, n_2)$ 上にあるか，あるいは $\{e_v^{(k)}\}$ の少なくとも1個が $P(n_1, n_2)$ 上にある場合である．したがって，v につながる各枝について前節にまで述べた方法で指定された道の上にあるかどうか判定すればよい．しかし v の線度が3以上の場合，すなわち v が G の分岐点であるとき，次の操作により $v \in P(n_1, n_2)$ の判定を行なえばより能率的である．

〔操作1〕 指定された $P(n_1, n_2)$ が $\{c_v^{(i)}\}$ のうちのどれかを通るかどうか調べる．$P(n_1, n_2)$ が $\{c_v^{(i)}\}$ の少なくとも1個を通るように指定されておれば $v \in P(n_1, n_2)$ であり，それ以外の場合〔操作2〕へ移る．

〔操作2〕 $N(e_1)$, $N(e_2)$ が $\{N(e_v^{(k)})\}$ $(k=1, 2, \cdots, \beta_v)$ のうちのどれかと一致するか否かを調べる．$\{N(e_v^{(k)})\}$ のうち少なくとも1個が $N(e_1)$ または $N(e_2)$ と一致すれば $v \in P(n_1, n_2)$ である．それ以外のとき〔操作3〕へ移る．

〔操作3〕 $e_v^{(k)} \in P^T(e_1, e_2)$ の判定：

(i) $N(e_1) > N(e_v^{(\beta_v)})$, $N(e_2) > N(e_v^{(\beta_v)})$ か否か調べる．いずれか一方のみが成立するとき，すなわち，$[N(e_1) > (e_v^{(\beta_v)})] \oplus [N(e_2) > N(e_v^{(\beta_v)})] = 1$ のとき，$e_v^{(\beta_v)} \in P^T(e_1, e_2)$ である．それ以外のとき $e_v^{(\beta_v)} \notin P^T(e_1, e_2)$ である．

(ii) (イ) $e_v^{(1)}$ が幹上の枝のとき；

各 $k(2 \leq k \leq \beta_v - 1)$ に対して，$l\{N(e_1)\} = p(e_v^{(k)})$, $l\{N(e_2)\} = p(e_v^{(k)})$ か否か調べる．ただし，l は $p(e_v^{(k)})$ のビット長である．いずれか一方のみ成立するとき，すなわち，$[l\{N(e_1)\} = p(e_v^{(k)})] \oplus [l\{N(e_2)\} = p(e_v^{(k)})] = 1$ であるとき，$e_v^{(k)} \in P^T(e_1, e_2)$ である．それ以外のとき $e_v^{(k)} \notin P^T(e_1, e_2)$.

さらに，$N(e_1) < N(e_v^{(1)})$, $N(e_2) < N(e_v^{(1)})$ か否か調べ，$[N(e_1) < N(e_v^{(1)})] \oplus [N(e_2) < N(e_v^{(1)})] = 1$ であれば $e_v^{(1)} \in P^T(e_1\ e_2)$．それ以外のとき，$e_v^{(1)} \notin P^T(e_1, e_2)$.

(ロ) $e_v^{(1)}$ が支幹上にあるとき；

各 $k(1 \leq k \leq \beta_v - 1)$ に対して，$[l\{N(e_1)\} = p(e_v^{(k)})] \oplus [l\{N(e_2)\} = p(e_v^{(k)})] = 1$ であれば，$e_v^{(k)} \in P^T(e_1, e_2)$ であり，それ以外のとき $e_v^{(k)} \notin P^T(e_1, e_2)$.

〔操作4〕 $e_v^{(k)} \in E$ の判定：

第3節に述べた方法で各 $e_v^{(k)}$ $(1 \leq k \leq \beta_v)$ に対して，$e_v^{(k)} \in E$ であるかどうか判定する．

〔操作5〕 上の二つの操作結果から各 $e_v^{(k)}$ $(1 \leq k \leq \beta_v)$ に対して，$[e_v^{(k)} \in P^T(e_1, e_2)] \oplus [e_v^{(k)} \in E] = 1$ か否か調べる．少なくとも一つの $k(1 \leq k \leq \beta_v)$ に対して上式が成立すれば，$v \in P(n_1, n_2)$ であり，そうでなければ $v \notin P(n_1\ n_2)$ である．

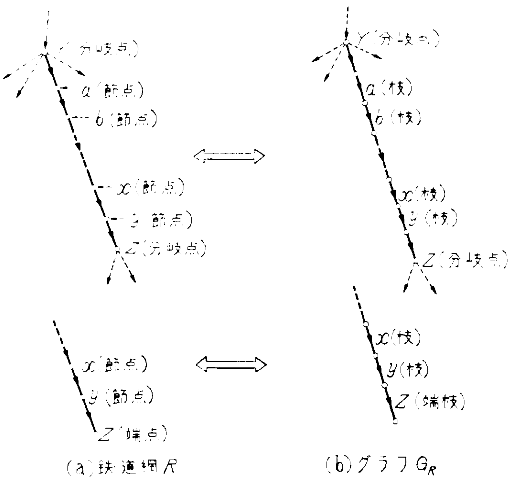
以上の諸操作から明らかなように，指定された任意の道 $P(n_1, n_2)$ を $N(e_1)$, $N(e_2)$, $\{A_i\}$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, \mu)$ で表示すれば，与えられた任意の枝または節点がその道の上にあるかどうかを能率良く判定することができる．しかも，この道の符号化に要するビット数は，$N(e_1)$, $N(e_2)$ の2進表示のための s ビットずつ $\{A_i\}$ のための μ ビット，合計 $2s+\mu$ ビットである．

7. 定期券の自動改札への応用

前節までは，与えられたグラフ G の枝または節点が

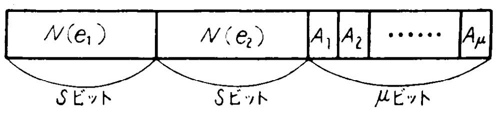
指定されたG上の道 $P(n_1, n_2)$ の上にあるか否かの判定法およびそのための道の符号化について考察したが，この問題を実際の鉄道網に応用することを考える．

鉄道網Rとは各駅を節点とし，駅と駅を直接結ぶ路線を各枝とする線形グラフであるが，このR上の与えられた節点が指定されたRの道の上にあるか否かを判定する場合，上で述べた手続きをそのままRに用いるとすれば，その節点につながるすべての枝について，その各枝が指定された道にあるかどうか調らべなければならなくなる．そこでこの手数を軽減するためにRに対応するグラフ G_R をつくり，R の線度が 2 以下の節点を G_R の枝に対応づける．すなわち，R の分岐点につながる各枝に 1 個ずつ節点を加えてできたグラフを G_R とし，Rの各節点に対して G_R の枝または節点を**第 9 図**のように対応させる．このように，R 上での問題を G_R 上で考えれば，R の線度が 2 である節点に対する，ある指定された道上にあるか否かの判定において，その節点につながる 2 個の枝について調べる必要がなく，単にその節点に対応する G_R の枝について調べればよい．しかし，Rの分岐点はG_Rでも分岐点であるから，判定法は前節の操作手続を踏み，またRの端点は G_R では端枝*であるからその枝のみについて判定すればよい．



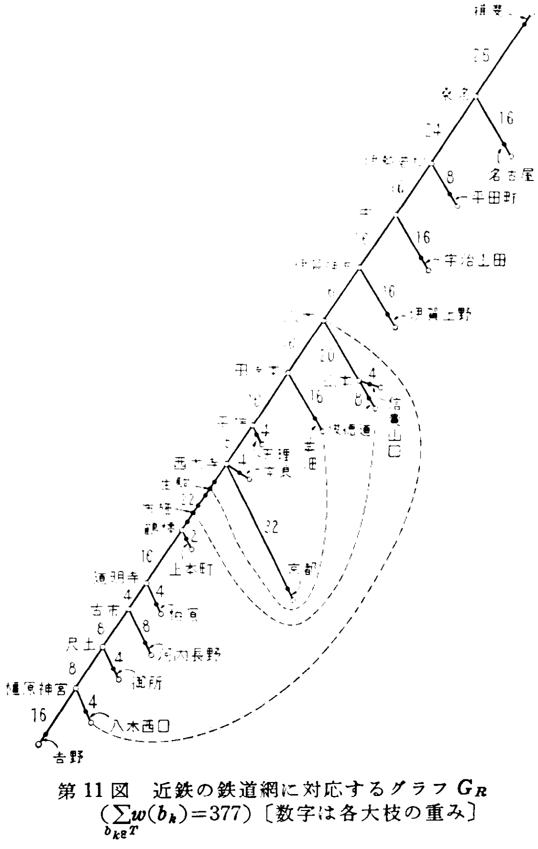
第 9 図　R と G_R との対応関係

さて，グラフ G_R に対して，前述の方法で各道の符号化を行なう．Rにおける定期券の任意の通用径路に対応する G_R の道を $P(n_1, n_2)=P^T(e_1\ e_2)\oplus E$ と



第 10 図　通用径路の符号化

するとき，その定期券の通用径路の指定を**第 10 図**のようにすればよい．G_R の分岐点につながらない$\mathbf{T}$の枝 e に対応するRの節点（駅）における自動改札機には，第 3 節で述べた $e\epsilon E$ の判定機構と第 4，5 節で述べた $e\epsilon P^T(e_1, e_2)$ の判定機構をもたせ，$[e\epsilon P^T(e_1, e_2)]\oplus[e\epsilon E]=1$ か否かチェックさせる．G_R の分岐点 v に対応するRの節点（駅）における自動改札機には第 6 節で述べた $v\epsilon P(n_1, n_2)$ の判定機構をもたせる．



第 11 図　近鉄の鉄道網に対応するグラフ G_R $(\sum_{b_k \epsilon T} w(b_k)=377)$〔数字は各大枝の重み〕

近畿日本鉄道の場合について，実際に G_R をつくり，第 4，5 節の手順に従って操作を行なった結果**第 11 図**のようになった．図中の実線で示した部分は木であり，破線で示した部分はその木に対する補木であ

* 線度が 1 である接点を一つの端点とする枝．

る．また図中の各大枝に付した数字はその大枝の重みである．この大枝の重みの総和は377であるが，与えられたRの節点の数が270個余りであるから，枝の符号化に要するビット数は同じ9ビットですむ．一方，基本閉路は3個であるから通用径路の符号化に要するビット数は 9×2+3=21 である．

9. あとがき

近鉄の鉄道網について，可能な道を数えあげると17万個余りで，したがってこれらの道を符号化するには少なくとも 18 ビット必要である．ところが，ここで考察した方法で符号化を行なえば，前述のように 21 ビット要し，ふえたビット数3個に対し判定機構は非常に能率良い．しかも，定期券の改札を自動化する場合，通用径路以外の通用期間などのチェックをも合わせて行なわなければならないことを考慮に入れれば，比較回路を用いるが能率的であり，その点でも上で述べた道の符号化，復号化の方法は効果的である．

また，この道の符号化，復号化のテクニックの一部を輸送網における区分けの問題に応用できる．輸送網Nは各ステーションを節点とし，ステーションとステーションを結ぶ輸送路を各枝とする線形グラフであるが，輸送物をこのN上のあるステーション間の指定された輸送路をたどって送る場合，途中の各分岐点ではその分岐点に通じている幾つかのルートのうち，輸送物が指定された輸送路を通るように，ルートの選択を行なわなければならない．この輸送網における区分けの問題に，前に述べた分岐点につながる木の枝または補木の枝の指定された道上にあるか否かの判定法を活用すればよい．ただしその際，区分けを行なう分岐点が指定されたルートの上にあるのが初めからわかっているということを利用する．また，実用性を考慮に入れて，輸送物がどのルートから入ったかという情報を用いない区分け法が重要であり，そのためにはルートの向きを指示するための情報が新たに必要である[3]．

最後に，本研究に関し格別の御配慮を賜わった近畿車輛技術研究所中井部長，ならびに御討論戴いた本学尾崎研究室の方々に深謝する．

参考文献

1) C. Berge: The Theory of Graphs and Its Applications, John Wiley and Sons, Inc., New York, N.Y.; 1962 (A. Doig, Trans.), p. 7.
2) S. Seshu and M.B. Reed: Linear Graphs and Electrical Networks, Addison-Wesley Pub. Co., Inc., Reading, Mass.; 1961.
3) 白川，尾崎：輸送網の区分け問題に関する一考察，昭和40年電気4学会連合大会予稿.

(昭和39年11月21日受付)