プログラムのページ

担当　一　松　　信

6504. Wolfe の非線形計画法

木下常雄，藤村堅二，吉田友昭（早稲田大学理工学部数学科）

1. 基本理論

Wolfeの方法による問題は，次の形のものを対象とする．

問題：$\min\{Q(X)=P'X+X'CX \mid AX=b,\ X\geqq 0\}$

$$\begin{cases} P,X,b;\ \text{ベクトル} \\ C,A;\ \text{行列（マトリックス）} \\ C:\ \text{正値} \end{cases}$$

行列，ベクトルを用いない，一般的な表現は，

$$\min\{Q(x)\mid x_i\geqq 0,\ f_j(x)\leqq 0 \quad (i=1,2,\cdots\cdots n,\ j=1,2,\cdots\cdots,m)\} \quad (1)$$

$$\begin{cases} Q(x);\ \text{二次形式} \\ f_j(x)\ (j=1,2,\cdots\cdots,m);\ \text{一次式} \end{cases}$$

$X'=(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)$ とするとして，Lagrange 関数 $\Phi(X,u)$ を次のように定義する．

$$\Phi(X,u)=Q(X)+\sum_{j=1}^{m}u_jf_j(X) \quad (2)$$

〔Kuhn-Tucker の定理〕

（1）式の最適解 $\hat{X}$ が存在する必要十分条件は

$$\begin{cases} \exists\hat{u}\ (\text{最適解});\ \hat{X}\geqq 0,\ \hat{u}\geqq 0 & (3) \\ \forall X\geqq 0,\ \forall U\geqq 0; & \\ \Phi(\hat{X},u)\leqq\Phi(\hat{X},\hat{u})\leqq\Phi(X,\hat{u}) & (4) \end{cases}$$

ここで，$Q(X)$, $f(X)$は微分可能関数とすると（3），（4）式は

$$\simeq\begin{cases} \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)_{\hat{X}\hat{u}}\geqq 0 & (5) \\ \hat{x}_i\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)_{\hat{X}\hat{u}}=0 & (6) \\ \hat{X}_i\geqq 0 & (7) \\ \quad i=1,2,\cdots\cdots,n & \end{cases}$$

$$\simeq\begin{cases} \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial u_j}\right)_{\hat{X}\hat{u}}\leqq 0 & (8) \\ \hat{u}_j\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial u_j}\right)_{\hat{X}\hat{u}}=0 & (9) \\ \hat{u}_j\geqq 0 & (10) \\ \quad j=1,2,\cdots\cdots,n & \end{cases}$$

次に $f_j(X)$ は線形で $f_j(X)=0$ で最適値を持ち，u_j は非有界とすると，

$$(5),(6),(7) \Rightarrow \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)_{\hat{X}\hat{u}}=0 \quad (11)$$

$$(8),(9),(10) \Rightarrow \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u_j}\right)_{\hat{X}\hat{u}}=0 \quad (12)$$

したがって

$$\left.\begin{array}{ll} \exists\hat{X} & (1)\ \text{式をみたす} \\ \Longleftrightarrow\exists\hat{u} & (3),(4)\ \text{式をみたす} \\ \Longleftrightarrow\exists\hat{u} & (5),(6),(7),(8),(9),(10)\ \text{式をみたす} \\ \Rightarrow\exists\hat{u} & (5),(6),(7),(12)\ \text{式をみたす} \end{array}\right\} \quad (13)$$

いま $f_j(X)=a_j'X-b_j\leqq 0$ を行列表示すると，

$AX\leqq b,\ X\geqq 0$

したがって，スラック変数を入れて，$AX=b$, $X\geqq 0$ とすれば，（1）式は次のように表わされる．

$$\min\{Q(X)=p'X+X'CX \mid AX=b,\ X\geqq 0\} \quad (1)^*$$

また
$$\Phi(X,u)=Q(X)+\sum_{j=1}^{m}u_j(a_j'X-b_j) =p'X+X'CX+u'(AX-b)$$

$\partial\Phi/\partial x_j=V$, $-(\partial\Phi/\partial u_j)=Y$ とおくと

$$V=P+2CX+A'u \quad (14)$$

$$Y=-AX-b \quad (15)$$

（13），（14），（15）式より

$$\left.\begin{array}{l} \text{a)}\ AX=b \\ \text{b)}\ 2CX-V+A'u=-P \\ \text{c)}\ X\geqq 0,\ V\geqq 0 \end{array}\right\} \quad (16)$$

$$\text{d)}\ X'V=0 \quad (17)$$

したがって，二次形式の最小値問題は，（16），（17）式の連立方程式の解，$\hat{X}$, $\hat{V}$, $\hat{u}$ を求めればよい．ここで次のスラック変数を，付け加える．

$$W=(w_1,w_2,\cdots\cdots,w_m)'$$

$$Z^1=(z_1^1,z_2^1,\cdots\cdots,z_n^1)'$$

$$Z^2=(z_1^2,z_2^2,\cdots\cdots,z_n^2)'$$

$$z_i^1\cdot z_i^2=0 \quad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

（16）式は次のようになる．

$$\left.\begin{array}{l} \text{a)}\ AX+W=b \\ \text{b)}\ 2CX-V+A'u+Z^1-Z^2=-\mu P \\ \text{c)}\ X\geqq 0,\ V\geqq 0,\ Z^1\geqq 0,\ Z^2\geqq 0, \\ \quad W\geqq 0,\ \mu\geqq 0 \end{array}\right\} \quad (18)$$

（18）式を Dantzig の Simplex 法*（次葉脚注参照）

を用いて，次の step を追って変形する．

〔I〕 $W \to 0$

〔II〕 $Z^1, Z^2 \to 0$

〔III〕 $\mu \to -1$

これにより得られる解は (16) 式の解である．ただし (17) 式の条件を常に満足するように考える．

2. 計 算 法

〔I〕 $b \geqq 0$ とし，(18) 式により

$$\begin{cases} W = b - AX \\ Z^1 = 0 - 2CX + V - A'u + Z^2 - P\mu \end{cases}$$

これを表にすると，目的の simplex 表が得られる．

第 1 表

独立変数 / Basis	1	X'	V'	U'	$Z^{2'}$	μ
W	b	$-A$				
Z^1	0	$-2C$	E	$-A'$	E	$-P$
ΣW_i						

$\overset{*}{V}\omega_i \geqq 0$ であるから，$\overset{*}{\min}\sum\omega_i \overset{*}{=} 0$ となれば $\overset{*}{V}\omega_i = 0$，ゆえに $W=0$ となる．ただし＊印をつけた列は (17) 式の条件を満足するために，Pivot 列に選ばれないことを示している．以下の Step についても皆同様とする．いまの場合は，V', U', μ の各列である．

基底変数の中から ω_i が消えたら，ω_i と z_i^1, z_i^2 の列を simplex 表から削除する．このことは z_i^1, z_i^2 を合わせて，$Z \geqq 0$ なる変ベクトルを考え，符号の調節に行列 D (対角線要素のみ 1 または -1，他は 0) を用いると (18) 式は，

$$\left.\begin{aligned} &AX = b \\ &2CX - V + A'u + DZ = -\mu P \\ &X \geqq 0,\ V \geqq 0,\ Z \geqq 0 \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

〔II〕〔I〕と同様に，Z の成分 $z_i \geqq 0$ だから $\min\sum z_i = 0$ となるように simplex 法を用いる．ただし〔II〕の段階では＊印をつける列は，μ の列と次の規則を満たす v_i と x_j の列とする．

〔規則〕

「x_i が基底の中にあれば，simplex 法を行なう上に，v_i が基底の中にこないように v_i の列に＊印をつける．逆に v_i が基底の中にあれば x_i が基底の中にこないよう，x_i の列に＊印をつける．(20)」

〔II〕 の最終段階では次のようになる．

$$\left.\begin{aligned} &AX = b \\ &2CX - V + A'u = -\mu P \\ &X \geqq 0,\ V \geqq 0,\ \mu \geqq 0 \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

〔III〕 $\mu=1$ になるように simplex 法を用いる．このとき (20) の規則が守られるよう＊印をつける．

第 j 回目の simplex 計算により得られる解を

$$(X^j,\ V^j,\ u^j,\ \mu^j)\ (j=1, 2, \cdots\cdots, g+1) \qquad (22)$$

と表わすと，

$$V^{j\prime}X^j = 0 \qquad (23)$$

$$V^{j\prime}X^{j+1} = 0,\ V^{j+1\prime}X^j = 0$$
$$(j=1, 2, \cdots\cdots, g) \qquad (24)$$

いま $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$, $\alpha+\beta=1$, $j=1, 2, \cdots\cdots, g-1$ とすれば

$$\begin{aligned} \bar{V}'\bar{X} &= (\alpha V^j + \beta V^{j+1\prime})(\alpha X^j + \beta X^{j+1}) \\ &= \alpha^2 V^{j\prime}X^j + \beta^2 V^{j+1\prime}X^{j+1} + \alpha\beta(V^{j\prime}X^{j+1} \\ &\quad + V^{j+1\prime}X^j) = 0 \end{aligned}$$

条件 (17) 式により $X'V=0$ を満足している．よって

$$\begin{aligned} (\bar{X}, \bar{V}, \bar{u}, \bar{\mu}) &= \alpha(X^j, V^j, u^j, \mu^j) \\ &\quad + \beta(X^{j+1}, V^{j+1}, u^{j+1}, \mu^{j+1}) \end{aligned}$$

もまた解となる．

〔1〕 $\mu^g \geqq 1$ のとき

$\mu^j < 1 \leqq \mu^{j+1} (1 \leqq j \leqq g-1)$ となる μ^j, μ^{j+1} を選び，

$$\begin{aligned} (\hat{X}, \hat{V}, \hat{u}, \hat{\mu}) &= \frac{\mu^{j+1}-1}{\mu^{j+1}-\mu^j}(X^j, V^j, u^j, \mu^j) \\ &\quad + \frac{1-\mu^j}{\mu^{j+1}-\mu^j}(X^{j+1}, V^{j+1}, u^{j+1}, \mu^{j+1}) \end{aligned} \qquad (25)$$

これは (21) 式の解であると同時に，求める (16) 式の解である．

〔2〕 $\mu^g < 1$ のとき

最後の μ^{g+1} とその前の μ^g で

$$\begin{aligned} (\hat{X}, \hat{V}, \hat{u}, \hat{\mu}) &= (X^g, V^g, u^g, \mu^g) \\ &\quad + \frac{1-\mu^g}{\mu^{g+1}}(X^{g+1}, V^{g+1}, u^{g+1}, \mu^{g+1}) \end{aligned} \qquad (26)$$

3. プログラム

早大電子計算室において，Tosbac 3124 の Compiler WALT** を用いて計算を行なった．ALGOL 表現で，このプログラム作成に不向の点は規則 (20) を守ることで，このために，変数の個数は 1,000 より小として，基底および独立変数の行と列に次のように対応つけた番号をおくことにした．

$x_i \to 1000+i\ (i=1, 2, \cdots\cdots)$

$v_i \to 2000+i\ (i=1, 2, \cdots\cdots)$

$u_i \to 3000+i\ (i=1, 2, \cdots\cdots)$

* Dantzig の Simplex 法: Computational algorithm of the revised simplex method, Santa Monica/Cal.: The Rand Corporation, RM-1266 (1953).

** WALT: Waseda ALGOL Translator

$z_i^2 \to 4000+i\ (i=1, 2, \cdots\cdots)$

$\mu \to 5000$

$\omega_i \to 6000+i\ (i=1, 2, \cdots\cdots)$

$z_i^1 \to 7000+i\ (i=1, 2, \cdots\cdots)$

また Pivot 列に選ばない列につけた＊印の代わりに 1 を，simplex 法の対象から除かれた列に 2 を，その他の列に 0 をそれぞれ対応させる．

〔例 1〕

$$\min\left\{Q(x)=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-x_1-x_2 \mid 2x_1+3x_2\leqq 6\right.$$
$$\left. x_1+4x_2\leqq 5,\ x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0\right\}$$

$$P=\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}\quad 2C=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad A=\begin{pmatrix}2&3&1&0\\1&4&0&1\end{pmatrix}$$

$$b=\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}$$

これを$\begin{cases}W=b-AX\\Z^1=0-2CX+V-A'u+Z^2-P\mu\end{cases}$

の形にして表（**第 2 表**）を作る．

〔例 1 の解〕

$\hat{X}=(x_1, x_2, x_3, x_4)'=(13/17, 18/17, 22/17, 0)'$

〔例 2〕

$Q=-6x_1+2x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2$

$$条件\begin{cases}x_1+x_2\leqq 2\\x_1\qquad\ \geqq 0\\\qquad x_2\geqq 0\end{cases}$$

$\min\{Q(x)\}$ を求めよ

〔例 2 の解〕

1 : $x=$151499999999

2 : $x=$504999999994

3 : $x=$　　　　0

これは計算機の内部表示（指数部にげたをはかせた浮動小数点数）のままで，

$x_1=0.1499999999_{10}1$, $x_2=0.4999999994_{10}0$

を示す．正解は $x_1=1.5$, $x_2=0.5$.

```
begin
  comment to get the minimal optimal solutions
  for the given non linear function by Wolfe's
  method;
  real A, B, ALPH, BETA, TEMPO;
  integer I, J, M, N, IO, JO, K;
  array T(0 : 8, −3 : 16);
  label L 1, L 2, L 3, L 4, L 5, L 6, L 7, LG;
  procedure SIMPLEX; comment simplex trans-
          formation;
   begin
    integer I, J;
     I:=M+N+2;
     A:=0.0;
     for J:=2 step 1 until 3*N+M+2 do
      if T(I, J)=0.0∧A>T(I−1, J)
        then begin
           A:=T(I−1, J);
           JO:=J
          end; comment JO is the pivotal
             row;
     if A≧0.0 then go to LG;
     A:=1.0₁₀+15; comment very large
        number;
     for I:=1 step 1 until M+N do
      if T(I, JO)<0.0
        then begin
          B:=T(I, 1)/ABS (T(I, JO));
          if A>B then begin
            A:=B;
```

第 2 表

	独立変数	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Basis							x_1	x_2	x_3	x_4	v_1	v_2	v_3	v_4	u_1	u_2	z_1^2	z_2^2	z_3^2	z_4^2	μ
0	I	0	0	0	0	1	1001	1002	1003	1004	2001	2002	2003	2004	3001	3002	4001	4002	4003	4004	500
1	w_1	0	0	0	6001	6	−2	−3	−1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	w_2	0	0	0	6002	5	−1	−4	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	z_1^1	0	0	0	7001	0	−1	0	0	0	1	0	0	0	−2	−1	1	0	0	0	1
4	z_2^1	0	0	0	7002	0	0	−1	0	0	0	1	0	0	−3	−4	0	1	0	0	2
5	z_3^1	0	0	0	7003	0	0	0	0	0	0	0	1	0	−1	0	0	0	1	0	0
6	z_4^1	0	0	0	7004	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	−1	0	1	0	1	0
7	Σ	0	0	0	9000	11	−3	−7	−1	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	C	2	2	2	2	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1

```
            IO:=I
            end
          else begin
if A=B∧((4000.0<T(I, 0)∧T(I, 0)<5000.0)∨
          (6000.0<T(I, 0)∧T(I, 0)<8000.0))
              then IO:=I
              end
          end; comment IO is the pivotal
              column;
      TEMPO:=T(0, JO);
      T(0, JO):=T(IO, 0);
      T(IO, 0):=TEMPO;
      T(IO, -1):=JO;
      for J:=1 step 1 until 3*N+M+2 do
        if J≠JO∧T (M+N+2, J)≠2.0 then
          begin
            for I:=1 step 1 until M+N+1 do
              if I≠IO then
T(I, J):=T(I, J)-T(IO, J)*T(I, JO)/
          T(IO, JO)
        end;
      for J:=1 step 1 until 3*N+M+2 do
        if J≠JO∧T(M+N+2, J)≠2.0
          then T(IO, J):=-T(IO, J)/
              T(IO, JO);
      for I:=1 step 1 until M+N+1 do
        if I≠IO then
          T(I, JO):=T(I, JO)/T(IO, JO);
      T(IO, JO):=1.0/T(IO, JO)
  end;
procedure ERASE; comment change base and
determine excluded rows;
  begin integer I, J;
    for I:=1 step 1 until M+N do
      if T(I, -1)≠0.0 then
      begin
        J:=entier (T(I, -1));
        T(M+N+2, J):=2.0;
        T(I, -1):=0.0
      end
  end;
procedure STORE; comment at elimination of
          MU store previous result;
  begin integer I, J;
```

```
    for I:=1 step 1 until M+N+2 do
      begin T(I, -2):=T(I, 1);
            T(I, -3):=T(I, 0)
      end
    end;
proceduer EXCHANGE; commen T insert 1 in
          corresponding C-columns;
  begin integer I, J;
    for I:=1 step 1 until M+N+1 do
    for J:=2 step 1 until 3*N+M+2 do
      if 1000.0<T(I, 0)∧T(I, 0)<2000.0
      ∧(T(I, 0)+1000.0)=T(0, J)
      ∧T(M+N+2, J)≠2.0 then
        T(M+N+2, J):=1.0;
      for I:=1 step 1 until M+N+1 do
      for J:=2 step 1 until 3*N+M+2 do
        if 2000.0<T(I, 0)∧T(I, 0)<3000.0
        ∧(T(I, 0)-1000.0)=T(I, 0)
        ∧T(M+N+2, J)≠2.0
        then T(M+N+2, J):=1.0
  end;
procedure CLEAR; comment clear C-column
          except MU-row;
  begin integer J;
    for J:=1 step 1 until 3*N+M+1 do
      if T(M+N+2, J)=1.0
      then T(M+N+2, J):=0.0
  end;
procedure LAYOUT 1;
  format 1 ('X(4Z, DD)', K);
procedure LIST 1 (ITEM 1);
  for I:=0 step 1 until M+N+2
  for J:=-3 step 1 until 3*N+M+2 do
    item 1 (T(I, J));
procedure LAYOUT 2;
  format 1 ('↑, X(/, 'X', -DD, '=', -4Z·
          8D)', N);
procedure LIST 2 (ITEM 2);
  for J:=2 step 1 until N+1 do
      item 2 (T(1, J));
INPUT 2 (1, '2(ZZD)', M, N);
K:=M*N;
INLIST (1, LAYOUT 1, LIST 1);
L1: SIMPLEX; comment erase W(I) from base;
```

```
  for I:=1 step 1 until M+N+1 do
    if 6000.0<T(I, 0)∧T(I, 0)<7000.0 then go
      to L1;
  for J:=N+2 step 1 until 2*N+M+1 do
    T(M+N+2, J):=0.0;
  ERASE;
  for J:=2 step 1 until 3*N+M+1 do
    if (4000.0<T(0, J)∧T(0, J)<5000.0)
    ∨(7000.0<T(0, J)>T(0, J)<8000.0)
    then T(M+N+2, J):=2.0;
  EXCHANGE;
  for J:=1 step 1 until 3*N+M+2 do
    if T(M+N+2, J)≠2.0;
    then T(M+N+1, J):=0.0;
  comment clear S-columns;
  for I:=1 step 1 until M+N+1 do
    if (7000.0<T(I, 0)∧T(I, 0)<8000.0)
    ∨(4000.0<T(I, 0)∧T(I, 0)<5000.0)
    then begin
        for J:=1 step 1 until 3*N+M+2 do
          if T(M+N+2, J)≠2.0 then
            T(M+N+1, J):=T(M+N+1, J)
                         +T(I, J)
      end;
L2: SIMPLEX; comment erase Z(I);
  for I:=1 step 1 until M+N+1 do
    if (7000.0<T(I, 0)∧T(I, 0)<8000.0)
    ∨(4000.0<T(I, 0)∧T(I, 0)<5000.0)
    then begin CLEAR;
            EXCHANGE;
            go to L2
      end;
  CLEAR;
  ERASE;
  EXCHANGE; comment Erase MU=T(M+N+
              1, 3*N+M+2);
  T(M+N+2, 3*N+M+2):=0.0;
  T(M+N+1, 3*N+M+2):=-1.0;
  for J:=1 step 1 until 3*N+M+1 do
    if T(M+N+2, J)≠2.0
      then T(M+N+1, J):=0.0;
  comment clear S-column;
L3: STORE;
  SIMPLEX;
  if ABS (T(M+N+1, 1))≦1.0
    then begin CLEAR;
               EXCHANGE;
               go to L3
      end;
  for J:=2 step 1 until N+1 do
    T(1, J):=0.0;
  ALPH:=(T(M+N+1, 1)+1.0)/(T(M+N
          +1, 1)-T(M+N+1, -2));
  BETA:=(T(M+N+1, -2)+1.0)/(T(M+N
          +1, -2)-T(M+N+1, 1));
L4:=for I:=1 step 1 until M+N+1 do
  if 1000.0<T(I, -3)∧T(I, -3)<2000.0 then
    begin
      J:=T(I, -3)-999.0;
      T(1, J):=ALPH*T(I, -2)
    end;
  for I:=1 siep 1 until M+N+1 do
    if 1000.0<T(I, 0)∧T(I, 0)<2000.0 then
      begin
        J:=T(I, 0)-999.0;
        T(1, J):=T(1, J)+BETA*T(I, 1)
      end;
  OUTLIST (2, LAYOUT 2, LIST 2);
  go to L7;
LG: if T(M+N+2, 3*N+M+2)≠0.0
    then begin
        for I:=1 step 1 until M+N+1 do
          if 5000.0=T(I, 0) then go to L5;
          go to L6
        end;
L5: ALPH:=1.0;
    BETA:=-(T(M+N+1, -2)+1.0)/T(M+N
           +1, 1);
    go to L4;
L6: output 0(2, '↑ 'sorry to I say, I cannot
          solve this problem ");
L7: end
```

参考文献

1) P. Wolfe: Hans Paul Künzi unt Wilhelm Krelle-Nicht Lineare Programmierung Springer Verlag Berlin-Göttingen Heidelbelg 1962, pp. 113～131.
2) P. Wolfe: The simplex method for quadratic programming. Econ. 27 (1959)
3) 杉山昌平，高橋磐郎：精解演習数値解析，広川書店．

(昭和40年3月26日受付)