漸化式を用いる $J_\nu(x)$ の近似計算*

牧 之 内 三 郎**

まえがき

Miller は漸化式を用いて変形ベッセル関数 $I_n(x)$ の近似計算を行なった[1]．その後，この計算法はその他のベッセル関数 $J_\nu(x)$ などの近似計算にも応用されている（たとえば文献 2)～5)）．また，一般に Miller の計算法によって近似計算される関数値の誤差評価について Olver[6] は述べている（4 節参照）．

本論文は，漸化式を用いて，$J_\nu(x)$ の近似値を所要の精度でなるべく速く計算する方法について述べるのが目的である．

いま，$x>0$ とし，次数 ν を以下あらためて $(\nu+n)$ で表わし，n は正整数，$0\leqq\nu<1$ とすれば，漸化式を用いる $J_{\nu+n}(x)$ の近似計算法はつぎのとおりである．

x および n より十分大きな正整数 M を適当に選び，

$$\left.\begin{array}{l} F_{\nu+M+1}(x)=0 \\ F_{\nu+M}(x)=a,\ a\text{ は任意定数} \end{array}\right\} \qquad (1)$$

とおき，$m=M,\ M-1,\ \cdots\cdots,\ 1$ に対して漸化式

$$F_{\nu+m-1}(x)=\frac{2(\nu+m)}{x}F_{\nu+m}(x)-F_{\nu+m+1}(x) \qquad (2)$$

を用い，$F_{\nu+M-1}(x),\ \cdots\cdots,\ F_{\nu+n}(x),\ \cdots\cdots,\ F_\nu(x)$ を計算する．そして，正の偶数 $L\leqq M$ を用い，次式によって α_0 を計算する注)．

$$\left(\frac{2}{x}\right)^\nu\sum_{m=0}^{L/2}\frac{(\nu+2m)}{m!}\Gamma(\nu+m)F_{\nu+2m}(x)=\alpha_0 \qquad (3\cdot1)$$

とくに $\nu=0$ のとき，上式は簡単になる．

$$F_0(x)+2\sum_{m=1}^{L/2}F_{2m}(x)=2\sum_{m=0}^{L/2}{}'F_{2m}(x)=\alpha_0 \quad (3\cdot2)$$

α_0 が求められると，$F_{\nu+n}(x)\approx\alpha_0 J_{\nu+n}(x)$ であるから

$$J_{\nu+n}(x)\approx F_{\nu+n}(x)/\alpha_0 \qquad (4)$$

である．

さて，この計算法では M をどのようにして定めるかが問題である．M が大きいほど，えられる近似値の精度はよくなるが計算時間を浪費し，場合によっては計算機がオーバフロー (overflow) する．

x が与えられたとき，$J_n(x)$ の近似値の絶対誤差の絶対値が 10^{-10} 程度であるためのできるだけ小さな M の実験値は求められている[8,9]．しかし，この M より大きい次数の $J_n(x)$ を計算する場合，あるいは一般に任意の精度で $J_n(x)$ を計算する場合に，あらためて M をどのようにして定めるべきかについては明らかにされていない．

M を与えて $J_{\nu+n}(x)$ の近似値をえたとき，その絶対誤差を Olver の評価式で評価することができる．しかしこの評価式は誤差を過大評価する場合がある（第 9 表および第 10 表参照）．また，所要の精度で $J_{\nu+n}(x)$ を計算するための M を定める式として，この評価式を用いることは非常に不便である（(29) 式参照）．

本論文では $J_{\nu+n}(x)$ の近似値を p 桁正しく計算するために必要な，なるべく小さな M および L の値をできるだけ簡単に求める方法について述べる．そして $p\leqq30$, $0.01\leqq x\leqq100$ に対する M および L の数値例を示す．ただし，(1)～(4) 式を用いる $J_{\nu+n}(x)$ の近似計算法では丸め誤差が大きくならないので[6,10]，ここでは丸め誤差を省略して考える．

1. M の最小値の近似値 M_E

正規化定数 α_0 が p 桁正しくえられるような M の最小値 $M_{\min}$ について述べ，つぎにその近似値 $M_E\geqq M_{\min}$ を求める方法を述べる（M_E: $M_{\mathrm{Economical}}$ の意）．M_E が求められると，(3・1), (3・2) における L は

$$L=2[M_E/2] \qquad (5)$$

とする．$[M_E/2]$ は $M_E/2$ をこえない最大の整数である．

---

* Note on the Recurrence Techniques for the Calculation of Bessel Functions $J_\nu(x)$, by SABURO MAKINOUCHI (University of Osaka)

** 大阪大学工学部

注) 数表あるいは別の計算法（たとえば Phase-Amplitude 法[7]）によって $J_\nu(x)$ の近似値を求めることができ，$J_\nu(x)\neq0$ の場合には

$$F_\nu(x)/J_\nu(x)=\alpha_0$$

としてもよい．しかし“漸化式を用いる方法”以外の計算法で，ν, x の任意の値に対する $J_\nu(x)$ の高精度計算を行なうことは困難である．

本論文では (3・1) または (3・2) によって正規化定数 (normalizing factor) α_0 を計算する場合について述べる．

$F_{\nu+M+1}(x)$ は第 1 種ベッセル関数と第 2 種ベッセル関数の線形結合として表わされる．

$$F_{\nu+M+1}(x)=\alpha J_{\nu+M+1}(x)+\beta Y_{\nu+M+1}(x) \quad (6)$$

とすれば，一般に

$$F_{\nu+n}(x)=\alpha J_{\nu+n}(x)+\beta Y_{\nu+n}(x) \quad (7)$$

いま，$J_{\nu+n}(x)\neq 0$ として

$$\frac{J_{\nu+M+1}(x)}{J_{\nu+n}(x)}\frac{Y_{\nu+n}(x)}{Y_{\nu+M+1}(x)}=\varepsilon_{\nu+M,\nu+n} \quad (8)$$

とすれば，(1)，(6) および (7) から

$$\left[J_{\nu+n}(x)-\frac{F_{\nu+n}(x)}{\alpha}\right]\Big/J_{\nu+n}(x)=\varepsilon_{\nu+M,\nu+n} \quad (9)$$

(8) から明らかなように，$M\to\infty$ のとき $\varepsilon_{\nu+M,\nu+n}\to 0$ であり，このときは次式が成り立つ．

$$F_{\nu+n}(x)=\alpha J_{\nu+n}(x) \quad (10)$$

さて，加法定理

$$\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\nu+2m)}{m!}\Gamma(\nu+m)J_{\nu+2m}(x)=1$$

を用いると

$$\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\nu+2m)}{m!}\Gamma(\nu+m)(\alpha J_{\nu+2m}(x))=\alpha \quad (11)$$

α の近似値 α_0 の絶対誤差を

$$\Delta\alpha=\alpha-\alpha_0$$

とすれば，(3・1)，(11) を用いて

$$\Delta\alpha=\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu}\sum_{m=0}^{[\frac{M}{2}]}\frac{(\nu+2m)}{m!}\Gamma(\nu+m)(\alpha J_{\nu+2m}(x)-F_{\nu+2m}(x))+\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu}\sum_{m=[\frac{M}{2}]+1}^{\infty}\frac{(\nu+2m)}{m!}\Gamma(\nu+m)(\alpha J_{\nu+2m}(x))$$

(8)，(9) および上式から，α_0 の相対誤差は

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha}=\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu}\sum_{m=0}^{[\frac{M}{2}]}\frac{(\nu+2m)}{m!}\Gamma(\nu+m)\frac{J_{\nu+M+1}(x)}{Y_{\nu+M+1}(x)}Y_{\nu+2m}(x)+\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu}\sum_{m=[\frac{M}{2}]+1}^{\infty}\frac{(\nu+2m)}{m!}\Gamma(\nu+m)J_{\nu+2m}(x) \quad (12\cdot 1)$$

とくに $\nu=0$ のときの $\dfrac{\Delta\alpha}{\alpha}$ を $\left(\dfrac{\Delta\alpha}{\alpha}\right)_{\nu=0}$ とすれば，(12・1) から

$$\left(\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right)_{\nu=0}=2\sum_{m=0}^{[\frac{M}{2}]}{}'\frac{J_{M+1}(x)}{Y_{M+1}(x)}Y_{2m}(x)+2\sum_{m=[\frac{M}{2}]+1}^{\infty}J_{2m}(x) \quad (12\cdot 2)$$

$\mu\gg x$ のとき

$$\left.\begin{aligned}J_\mu(x)&\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}}\left(\frac{ex}{2\mu}\right)^{\mu}\\ Y_\mu(x)&\approx-\frac{1}{\sqrt{\pi\mu}}\left(\frac{ex}{2\mu}\right)^{-\mu}\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

また，正整数 m が十分大きく，$0<\nu<1$ のとき

$$\Gamma(\nu+m)\approx m^{\nu}\Gamma(m) \quad (14)$$

$M\gg x$ であるから，(13)，(14) を用いると (12・1) から

$$\Delta\alpha/\alpha>0$$

で，$\Delta\alpha/\alpha$ は ν に関する単調減少関数であることがわかる．すなわち，x，M を一定とすれば，整数次 ($\nu=0$) の第 1 種ベッセル関数を計算するときの $\Delta\alpha/\alpha=(\Delta\alpha/\alpha)_{\nu=0}$ は，非整数次 ($\nu\neq 0$) の第 1 種ベッセル関数を計算する場合の $\Delta\alpha/\alpha$ より大きい（例3参照）．

したがって，ν の値いかんにかかわらず

$$\Delta\alpha/\alpha<0.5\times 10^{-p} \quad (15)$$

であるような M の最小値 $M_{\min}$ は

$$(\Delta\alpha/\alpha)_{\nu=0}<0.5\times 10^{-p} \quad (16)$$

を満足する M の最小値である．

(12・2) から

$$\left(\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right)_{\nu=0}=2J_{M+1}(x)\left(\sum_{m=0}^{[\frac{M}{2}]}{}'\frac{Y_{2m}(x)}{Y_{M+1}(x)}+\sum_{m=[\frac{M}{2}]+1}^{\infty}\frac{J_{2m}(x)}{J_{M+1}(x)}\right) \quad (17)$$

と書ける．$M\gg x$ であるから，(17) の右辺第 1 項はその末項から，第 2 項はその初項から順次計算し，それぞれの項数を適当にとれば $(\Delta\alpha/\alpha)_{\nu=0}$ は 3 桁程度正しく求められる．このように考えると，$0.01\leqq x\leqq 100$ のとき，(17) の右辺第 1 項，第 2 項ともにそれぞれ多くとも数項ずつ計算すれば，(16) を満足する M の最小値 $M_{\min}$ は求められる．このとき計算されるべき (17) の右辺の各項はすべて正である．

しかし，このようにして $M_{\min}$ を求めることは煩雑である．つぎに第 1 種ベッセル関数 $J_{M+1}(x)$ の関数値のみを用い，その他の第 1 種ベッセル関数および第 2 種ベッセル関数 $Y_{M+1}(x)$ 等の関数値を用いることなく $M_{\min}$ の近似値 $M_E\geqq M_{\min}$ を求める方法を述べる．

いま

$$x/2=u,\ M-u=v$$

とすれば，$M\gg x$ であるから不等式

$$\frac{Y_M(x)}{Y_{M+1}(x)}<\frac{u}{v},\ \frac{Y_{M-1}(x)}{Y_M(x)}<\frac{u}{v-1},\cdots\cdots$$

$$\frac{J_{M+1}(x)}{J_M(x)}<\frac{u}{v+1},\ \frac{J_{M+2}(x)}{J_{M+1}(x)}<\frac{u}{v+2},\cdots\cdots$$

が成り立つ．これらの不等式と（17）から

（i）Mが偶数のとき

$$\left(\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right)_{\nu=0}<2J_{M+1}(x)\left[\frac{u}{v}+\frac{u}{v+2}+\frac{u^3}{v(v-1)(v-2)}\right.$$

$$\left.+\frac{u^3}{(v+2)(v+3)(v+4)}+\cdots\cdots\right] \qquad (18\cdot1)$$

（ii）Mが奇数のとき

$$\left(\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right)_{\nu=0}<2J_{M+1}(x)\left[1+\frac{u^2}{v(v+1)}\right.$$

$$\left.+\frac{u^2}{(v+2)(v+3)}+\cdots\cdots\right] \qquad (18\cdot2)$$

がえられる．

そこで，数表あるいは近似公式等によって必要な関数値（$J_{M+1}(x)$）を3桁程度正しく求め，(18・1)あるいは(18・2)の右辺の数項を計算した値が 0.5×10^{-p} 以下となるようなMの最小値を求める．この M の値を M_E とすれば $M_E\geqq M_{\min}$ であるが，M_E は $M_{\min}$ に十分近い値であるから $M_{\min}$ の近似値が簡単にえられたことになる．$p=9, 10, 18, 20$ および 30 の場合について，$0.01\leqq x\leqq100$ に対して求められた M_E の例が**第1表**に示されている．

第1表　M_E と N_E の例（N_E については2節参照）

p \ x	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
9	2 (1)	4 (3)	4 (3)	4 (2)	4 (2)	4 (2)	4 (2)	4 (2)	4 (2)
10	4 (3)	4 (3)	4 (2)	4 (2)	4 (2)	4 (2)	4 (2)	4 (2)	5 (3)
18	6 (3)	6 (3)	6 (3)	8 (5)	8 (5)	8 (5)	8 (5)	8 (4)	8 (4)
20	6 (3)	7 (4)	8 (5)	8 (4)	8 (4)	8 (4)	8 (4)	10 (6)	10 (6)
30	10 (6)	10 (5)	12 (7)	12 (7)	12 (7)	12 (6)	12 (6)	14 (8)	14 (8)

p \ x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
9	4 (2)	6 (4)	6 (4)	6 (3)	8 (5)	8 (5)	8 (5)	8 (5)	9 (6)
10	5 (3)	6 (4)	6 (3)	8 (5)	8 (5)	8 (5)	8 (5)	10 (7)	10 (7)
18	8 (4)	10 (6)	12 (8)	12 (7)	12 (7)	14 (9)	14 (9)	14 (8)	15 (9)
20	10 (6)	11 (6)	12 (7)	13 (8)	14 (8)	14 (8)	15 (9)	16 (10)	16 (10)
30	14 (8)	16 (9)	17 (10)	18 (10)	20 (12)	20 (12)	20 (11)	22 (13)	22 (13)

〔例〕 $p=10$，$x=0.3$ のとき $M_E=6$，$N_E=3$

p \ x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	10 (7)	12 (8)	14 (9)	16 (11)	18 (13)	20 (14)	22 (16)	24 (18)	25 (19)
10	10 (6)	13 (9)	16 (11)	18 (13)	20 (14)	21 (15)	23 (17)	24 (17)	26 (19)
18	16 (10)	20 (13)	22 (14)	25 (17)	28 (19)	30 (21)	32 (22)	34 (24)	36 (26)
20	16 (9)	20 (12)	24 (16)	26 (17)	30 (20)	32 (22)	34 (23)	36 (25)	38 (27)
30	22 (13)	28 (17)	32 (20)	35 (22)	38 (25)	40 (26)	44 (30)	46 (31)	48 (33)

p \ x	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
9	26 (19)	40 (32)	53 (43)	66 (56)	78 (67)	90 (78)	101 (89)	112 (99)	124 (111)	135 (121)
10	28 (21)	42 (33)	55 (45)	68 (57)	80 (68)	92 (79)	103 (90)	115 (101)	126 (111)	138 (123)
18	38 (27)	54 (41)	68 (53)	82 (65)	95 (77)	108 (89)	120 (100)	133 (112)	145 (124)	157 (135)
20	40 (28)	56 (41)	72 (56)	86 (68)	99 (80)	112 (92)	124 (103)	137 (115)	149 (126)	161 (137)
30	50 (34)	69 (50)	86 (64)	101 (77)	115 (90)	129 (102)	142 (114)	156 (127)	168 (137)	181 (150)

〔例〕 $p=10$，$x=30$ のとき $M_E=55$，$N_E=45$

2．$J_{\nu+n}(x)$ の近似値 $F_{\nu+n}(x)/\alpha_0$ の誤差

$M\geqq M_E$ とすれば $\Delta\alpha/\alpha<0.5\times10^{-p}$ であるから，$\Delta\alpha/\alpha$ の2乗以上の項を省略して考え，（9）を用いると

$$\frac{F_{\nu+n}(x)}{\alpha_0}=\frac{F_{\nu+n}(x)}{\alpha-\Delta\alpha}$$

$$\approx J_{\nu+n}(x)(1-\varepsilon_{\nu+M,\nu+n})\left(1+\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right) \qquad (19)$$

である．

さて，与えられた x，M に対して

$$|\varepsilon_{\nu+M,\nu+n}|<0.5\times10^{-p} \qquad (20)$$

を満足する最大の次数nをN（$M>N>x$）とする．$n\leqq N$ のとき（$\Delta\alpha/\alpha$）$\varepsilon_{\nu+M,\nu+n}$ を省略することができるので，（19）を用いると，$J_{\nu+n}(x)$ の近似値 $F_{\nu+n}(x)/\alpha_0$ の絶対誤差 $\Delta_{\nu+n}$ は

$$\Delta_{\nu+n}=J_{\nu+n}(x)-\frac{F_{\nu+n}(x)}{\alpha_0}$$

$$\approx J_{\nu+n}(x)\left(\varepsilon_{\nu+M,\nu+n}-\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right) \qquad (21)$$

となる．

（i）$J_{\nu+n}(x)\neq0$ の場合

近似値 $F_{\nu+n}(x)/\alpha_0$ の相対誤差を $\delta_{\nu+n}$ とすれば注)，

注）漸化式を用いて，球ベッセル関数 $j_n(x)$ を近似計算することができる．この方法でえられる $j_n(x)$ の近似値の相対誤差については Corbató 等が述べている[5]．

(21) より

$$\delta_{\nu+n}=\Delta_{\nu+n}/J_{\nu+n}(x)$$
$$\approx\varepsilon_{\nu+M,\nu+n}-\frac{\Delta\alpha}{\alpha} \qquad (22)$$

である．もし，

$x\leqq n\leqq N$ であれば $0<\varepsilon_{\nu+M,\nu+n}<0.5\times10^{-p}$

$n<x$　　であれば $|\varepsilon_{\nu+M,\nu+n}|\ll\left|\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right|$

であるから，$M\geqq M_{\mathrm{E}}(\geqq M_{\min})$ のとき

$n\leqq N$ に対して $|\delta_{\nu+n}|<0.5\times10^{-p}$

となり，$J_{\nu+n}(x)$ の近似値 $F_{\nu+n}(x)/\alpha_0$ は p 桁正しい．

ところで，$n\gg x$ のとき，(13) を用いると

$$\frac{J_{\nu+M+1}(x)}{J_{\nu+n}(x)}\frac{Y_{\nu+n}(x)}{Y_{\nu+M+1}(x)}\leqq\frac{J_{M+1}(x)}{J_n(x)}\frac{Y_n(x)}{Y_{M+1}(x)} \qquad (23)$$

すなわち

$$\varepsilon_{\nu+M,\nu+n}\leqq\varepsilon_{M,n}$$

であって，$\varepsilon_{\nu+M,\nu+n}$ は ν に関する単調減少関数であることがわかるから，$\nu\neq0$ の場合の N が $\nu=0$ の場合の N より小さくなることはない．

したがって，与えられた x, M に対する N は，あらためて

$$\frac{J_{M+1}(x)}{J_n(x)}\frac{Y_n(x)}{Y_{M+1}(x)}<0.5\times10^{-p} \qquad (24)$$

を満足する n の最大値として定めることにする．$M=M_{\mathrm{E}}$ のときの N を N_{E} として，前出の第1表にその例をも示しておく．

$J_n(x)$ を計算したとき，$|\Delta_n|<10^{-10}$ となるような M の最小値を魚木氏は実験的に求めている[9]．$p=10$ のときの M_{E}（第1表参照）はこの実験値とよく一致している．

第2表　$J_n(30)$ の近似計算例（$M=55$, $L=54$）

n	$F_n(30)/\alpha_0$	Δ_n	δ_n	$\varepsilon_{M,n}$
55	5.3605 54054 32144 (−11)	5.08 (−12)	8.62 (− 2)	8.62 (− 2)
54	1.9655 36486 58453 (−10)	1.54 (−12)	7.76 (− 3)	7.76 (− 3)
53	6.5398 75946 27216 (−10)	4.78 (−13)	7.31 (− 4)	7.31 (− 4)
52	2.1142 02519 02438 (− 9)	1.52 (−13)	7.20 (− 5)	7.20 (− 5)
51	6.6752 47804 65729 (− 9)	4.97 (−14)	7.44 (− 6)	7.44 (− 6)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
47	5.1958 57547 84784 (− 7)	7.06 (−16)	1.36 (− 9)	1.40 (− 9)
46	1.4463 11623 21019 (− 6)	2.13 (−16)	1.47 (−10)	1.88 (−10)
45	3.9157 69889 72646 (− 6)	−5.37 (−17)	−1.37 (−11)	2.66 (−11)
44	1.0300 99804 59692 (− 5)	−3.74 (−16)	−3.63 (−11)	4.00 (−12)
43	2.6300 49104 51165 (− 5)	−1.04 (−15)	−3.97 (−11)	6.42 (−13)
42	6.5093 74295 00315 (− 5)	−2.62 (−15)	−4.02 (−11)	1.10 (−13)
41	1.5596 19892 14972 (− 4)	−6.29 (−15)	−4.03 (−11)	2.02 (−14)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4	−5.2609 00032 34420 (− 2)	2.12 (−12)	−4.03 (−11)	−1.11 (−19)
3	1.2921 12287 64936 (− 1)	−5.21 (−12)	−4.03 (−11)	2.26 (−20)
2	7.8451 24607 64292 (− 2)	−3.16 (−12)	−4.03 (−11)	−6.73 (−20)
1	−1.1875 10626 21412 (− 1)	4.79 (−12)	−4.03 (−11)	3.05 (−20)
0	−8.6367 98358 45234 (− 2)	3.48 (−12)	−4.03 (−11)	−5.83 (−20)

例 1　$M=55$, $L=54$ として $J_n(30)$ の近似計算を行なった数値例が**第2表**に示されている．$F_n(30)/\alpha_0$ は $J_n(30)$ の計算値であって，これらが真値と異なる桁には下線がつけられている．$0\leqq n\leqq45$ のとき，$J_n(30)$ の計算値は10桁正しくなっており，$p=10$, $x=30$ のとき $M_{\mathrm{E}}=55$, $N_{\mathrm{E}}=45$（第1表参照）の正しいことがはっきりわかる．えられた近似値の相対誤差 δ_n および $\varepsilon_{M,n}$ も第2表に示されているが，$n\leqq41$ のとき $|\varepsilon_{M,n}|$ が十分小さいので，δ_n は一定値 -4.03×10^{-11} となっている．すなわち，(22) から明らかなように，この例では

$$\Delta\alpha/\alpha\approx4.03\times10^{-11}$$

である．

例 2　$M=L=54$ として $J_n(30)$ の近似計算を行なった例が**第3表**に示されている．$p=10$, $x=30$ のときの $M_{\mathrm{E}}=55$ より M が1だけ小さいため，絶対誤差で考えても10桁正しくない次数 n（ここでは0と2）があること，およびこの場合 $\Delta\alpha/\alpha\approx7.66\times10^{-11}$ であることがこの表からわかる．また，例1とくらべると，$p=10$, $x=30$ のとき $M_{\mathrm{E}}=M_{\min}(=55)$ であることもわかる．

第3表　$J_n(30)$ の近似計算例（$M=L=54$）

n	$F_n(30)/\alpha_0$	$\|\Delta_n\|$	$\|\delta_n\|$
4	−5.2609 00032 53479 (− 2)	4.03 (−12)	7.66 (−11)
3	1.2921 12287 69617 (− 1)	9.89 (−12)	7.66 (−11)
2	7.8451 24607 92713 (− 2)	6.01 (−12)	7.66 (−11)
1	−1.1875 10626 25714 (− 1)	9.09 (−12)	7.66 (−11)
0	−8.6367 98358 76523 (− 2)	6.61 (−12)	7.66 (−11)

例 3　$M=55$, $L=54$ として，$\nu=0$, 1/4, 1/2, 3/4 および 39/40 に対する $J_\nu(30)$ の近似計算例が**第4表**に示されている．ν が大きくなると $\Delta\alpha/\alpha(\approx|\delta_\nu|)$ は小さくなることがはっきりわかる．もちろん10桁正しい $J_\nu(30)$ の近似値がえられている．

第4表　$J_\nu(30)$ の近似計算例（$M=55$, $L=54$）

ν	$F_\nu(30)/\alpha_0$	$\|\Delta_\nu\|$	$\|\delta_\nu\|$
0.000	−8.6367 98358 45234 (− 2)	3.48 (−12)	4.03 (−11)
0.250	−1.[illegible]460 44403 13096 (− 1)	4.79 (−12)	3.44 (−11)
0.500	−1.4342 [illegible] [illegible] (− 1)	4.74 (−12)	2.95 (−11)
0.750	[illegible] (− 1)	3.57 (−12)	2.52 (−11)
0.975	[illegible] (− 1)	2.57 (−12)	2.19 (−11)

(ii)　$J_{\nu+n}(x)\approx0$ の場合

x が $J_{\nu+n}(x)$ の零点に十分近い場合には，$J_{\nu+n}(x)$ の近似値 $F_{\nu+n}(x)/\alpha_0$ の誤差を絶対誤差で論じなければならない．(21) より，$F_{\nu+n}(x)/\alpha_0$ の絶対誤差は

$$\Delta_{\nu+n}\approx\frac{J_{\nu+M+1}(x)}{Y_{\nu+M+1}(x)}Y_{\nu+n}(x)-J_{\nu+n}(x)\frac{\Delta\alpha}{\alpha} \qquad (25)$$

である．いま，x は p 桁正しい $J_{\nu+n}(x)$ の零点であるとすれば

$$|J_{\nu+n}(x)|\approx10^{-p}$$

であり，$M\geqq M_{\mathrm{E}}$ のとき $\Delta\alpha/\alpha<0.5\times10^{-p}$ で

あって，$\left|\dfrac{J_{\nu+M+1}(x)}{Y_{\nu+M+1}(x)}Y_{\nu+n}(x)\right|$ はほぼ 10^{-2p} 程度以下となっている．したがって $|\varDelta_{\nu+n}|$ はほぼ 10^{-2p} 程度である．

例 4　$x=7.5883\ 42435$ のとき $M=L=24$（第1表参照）としてえられる $J_n(x)$ の近似値が**第5表**に示されている．

第5表　$J_n(7.5883\ 42435)$ の近似計算例
$(M=L=24)$

n	$F_n(7.5883\ 42435)/\alpha_0$	$\lvert\varDelta_n\rvert$
5	2.6636 35524 79825 (− 1)	1.90 (−12)
4	−1.3316 08179 83940 (−10)	1.93 (−21)
3	−2.6836 35526 20210 (− 1)	1.90 (−12)

$J_5(x)$ および $J_3(x)$ は少なくとも10桁正しく計算されているが，$J_5(x)\approx -J_3(x)$ であるから，この x は $J_4(x)$ の一つの零点に近いことがわかる．実は，この x は $J_4(x)$ の零点

　7.5883　42434　50380　43850　69630　007…

を10桁正しく表わしているので，この計算例では $J_4(x)$ の近似値の絶対誤差の絶対値は 10^{-20} 以下となっている．

以上のことから明らかなように，関数値を p 桁正しく計算するための $M=M_{\mathrm{E}}$ を用いて，零点をほぼ $2p$ 桁正しく計算することができる．

例 5　区間（7, 8）内の $J_4(x)$ の零点を，たとえば regula falsi で求める．このときに必要な関数値 $J_4(x)$ は

　$x=7$ のとき $M=23$, $L=22$

　$7<x\leqq 8$ のとき $M=L=24$

として近似計算する（第1表参照）．反復演算を6回行なうと，零点の近似値の相対誤差の絶対値は 0.5×10^{-21} 以下となり，20 桁正しい近似値

　7.5883　42434　50380　43850　80318　34160

がえられる（ただし，このときの関数値は -1.39×10^{-33} となり，正しくないので注意を要する）．

3.　$J_{\nu+n}(x)$ の計算手順

以上の説明をまとめると，$J_{\nu+n}(x)$ の計算手順はつぎのようになる．

（i）　まず p を定めて，

（ii）　第1表より x に対応する M_{E} と N_{E} を選び，

$$L=2\left[\frac{M_{\mathrm{E}}}{2}\right]とする．$$

（iii）　$n\leqq N_{\mathrm{E}}$ のときは $M=M_{\mathrm{E}}$,

（iv）　$n>N_{\mathrm{E}}$ のときは

$$M=n+(M_{\mathrm{E}}-N_{\mathrm{E}}) \tag{26}$$

として（1）〜（4）式の計算を行なうと，$J_{\nu+n}(x)\neq 0$ の近似値は p 桁正しく求められる．

$n>N_{\mathrm{E}}$ の場合についてはさらに説明を補足する必要があろう．まず，(26)で定まる M を用いて $J_{\nu+n}(x)$ は p 桁正しく求められることを述べる．

$M>M_{\mathrm{E}}$ であるから，もちろん $\varDelta\alpha/\alpha<0.5\times 10^{-p}$ である．いま，

$$s=n-N_{\mathrm{E}}$$

とすれば，s は正整数（$\neq 0$）であり，

$$M=s+M_{\mathrm{E}},\ n=s+N_{\mathrm{E}}$$

と書けるから

$$\frac{J_{M+1}(x)}{J_n(x)}\frac{Y_n(x)}{Y_{M+1}(x)}=\frac{J_{s+M_{\mathrm{E}}+1}(x)}{J_{s+N_{\mathrm{E}}}(x)}\frac{Y_{s+N_{\mathrm{E}}}(x)}{Y_{s+M_{\mathrm{E}}+1}(x)}$$
$$=\varepsilon_{s+M_{\mathrm{E}},s+N_{\mathrm{E}}}$$

である．ところで，$\varepsilon_{s+M_{\mathrm{E}},s+N_{\mathrm{E}}}$ は s に関する単調減少関数であって

$$\frac{J_{s+M_{\mathrm{E}}+1}(x)}{J_{s+N_{\mathrm{E}}}(x)}\frac{Y_{s+N_{\mathrm{E}}}(x)}{Y_{s+M_{\mathrm{E}}+1}(x)}<\frac{J_{M_{\mathrm{E}}+1}(x)}{J_{N_{\mathrm{E}}}(x)}\frac{Y_{N_{\mathrm{E}}}(x)}{Y_{M_{\mathrm{E}}+1}(x)}$$

であるから，この不等式と (23)，(24) から

$$\frac{J_{\nu+M+1}(x)}{J_{\nu+n}(x)}\frac{Y_{\nu+n}(x)}{Y_{\nu+M+1}(x)}<\frac{J_{M_{\mathrm{E}}+1}(x)}{J_{N_{\mathrm{E}}}(x)}\frac{Y_{N_{\mathrm{E}}+1}(x)}{Y_{M_{\mathrm{E}}+1}(x)}$$
$$<0.5\times 10^{-p}$$

となる．したがって，(26) の M を用いると $J_{\nu+n}(x)$ の近似値は p 桁正しく計算される．

例 6　$n\leqq 30$ に対して $J_n(1)$ を20桁正しく計算することを考える．このとき，$p=20$, $x=1$, $n=30$ であるが，第1表より $M_{\mathrm{E}}=16$, $N_{\mathrm{E}}=9$ である．

　したがって

$$L=2\left[\frac{16}{2}\right]=16$$

$n>N_{\mathrm{E}}$ であるから，(26) によって

$$M=30+(16-9)=37$$

とする．このような M, L を用いて計算した数値例が**第6表**に示されている．この表から明らかなように，少なくとも $n\leqq 30$ に対して $J_n(1)$ は20桁正しく計算されている．

第6表　$J_n(1)$ の近似計算例（$M=37$, $L=16$）

n	$F_n(1)/\alpha_0$	$\lvert\varDelta_n\rvert$	$\lvert\varepsilon_n\rvert$
37	5.2507 16734 07866 00063 07378 (−56)	9.34 (−59)	1.78 (− 4)
36	3.8855 30283 62570 14461 4[illegible] (−53)	1.30 (−60)	3.34 (− 8)
35	2.7970 56804 53608 60558 25304 (−51)	1.65 (−62)	6.61 (−12)
34	1.9575 51210 13731 70183 93102 (−49)	2.73 (−64)	1.39 (−15)
33	1.3308 55117 21292 19040 01747 (−47)	4.72 (−66)	3.10 (−19)
32	8.7816 86222 39514 77493 93134 (−46)	9.69 (−67)	1.10 (−21)
31	5.6189 48327 21568 13177 07604 (−44)	6.61 (−65)	1.18 (−21)
30	3.4828 69784 25143 29022 53776 (−42)	4.10 (−63)	1.18 (−21)
29	2.0591 59981 71816 81732 70494 (−40)	2.46 (−61)	1.18 (−21)
28	1.2113 64502 41711 23921 77661 (−38)	1.43 (−59)	1.18 (−21)

つぎに，x にくらべて M が大きすぎる場合について述べる．このような場合には，（1）〜（3）式の計算を行なうと計算機がオーバフローすることがある．その危険性を少なくするため，（1）式における任意定数 a には計算機の表現しうる絶対値の一番小さい数値がよく用いられる．しかし，そのようにしても M が x より極度に大きい場合にはやはりオーバフローが

おこる．一松氏は計算機がオーバフローしないための M の最大値を求める計算式を導き，数値例を挙げて説明している[11]．

たとえば，表わしうる数値 x の範囲が

$$10^{-51} \leqq |x| < 10^{50} \tag{27}$$

であるような計算機を用いる場合には，**第7表**に示す

第7表　$F_n(1)$ と α_0 の数値例（$L=10$）

n	$F_n(1)$ $M=60$ の場合	$F_n(1)$ $M=61$ の場合
62		0.0000 00000
61	0.0000 00000	1.0000 00000 (−51)
60	1.0000 00000 (−51)	1.2200 00000 (−49)
59	1.2000 00000 (−49)	1.4639 00000 (−47)
58	1.4159 00000 (−47)	1.7272 80000 (−45)
⋮	⋮	⋮
36	3.7431 26783 (− 4)	4.5663 02726 (− 2)
35	2.6945 45366 (− 2)	3.2871 20785 (0)
34	1.8858 07444 (0)	2.3005 27919 (2)
33	1.2820 79607 (2)	1.5640 30273 (4)
⋮	⋮	⋮
3	1.8846 36191 (47)	2.2990 99089 (49)
2	1.1069 23007 (48)	1.3503 53818 (50) *
1	4.2392 28409 (48)	5.1715 05365 (50) *
0	7.3715 33810 (48)	8.9926 56911 (50) *
α_0	9.6335 02479 (48)	1.1752 07018 (51) *

ように，$x=1$ のとき $M=60$ とすれば計算機はオーバフローしないが，$M=61$ では $F_2(1)$ の計算において計算機がオーバフローする．いま考えている計算機が扱いえない数値を第7表の＊印は示している．$M=60$ のときオーバフローがおこらないからといって，すべての次数 $n \leqq M$ に対して意味のある関数値がえられるとは限らない．これについて説明を加える．

$M=60$，$L=10$ として $J_n(1)$ の近似値を求めると，えられる関数値は**第8表**のようになるべきである．しかし，$n \geqq 36$ のとき

$$|J_n(1)| < 10^{-51}$$

第8表　$J_n(1)$ の近似計算例（$M=60$，$L=10$）

n	$F_n(1)/\alpha_0$
60	1.0380 44057 37593 (−100) *
59	1.2456 52868 85112 (− 98) *
58	1.4697 66580 83858 (− 96) *
⋮	⋮
36	3.8855 30533 39454 (− 53) *
35	2.7970 56804 55803 (− 51)
34	1.9575 51210 13928 (− 49)
33	1.3308 55117 21425 (− 47)
⋮	⋮
3	1.9563 35398 26880 (− 2)
2	1.1490 34849 32016 (− 1)
1	4.4005 05857 45374 (− 1)
0	7.6519 76865 58733 (− 1)

であるから，いま考えている計算機では，これらの関数値（＊印がつけられている）はアンダフロー（underflow）によって実際には零になる．すなわち $x=1$ のとき，この計算機で扱いうる最高の次数は $n=35$ である．

したがって，この計算機で $n \leqq 35$ に対して $J_n(1)$ を10桁正しく求めるのであれば，

$$a=10^{-51},$$

$$L=2\left[\frac{10}{2}\right]=10,$$

$$M=35+(10-6)=39$$

として計算を行なえばよい（第1表参照）．もちろん $L=38$ としてもよいが計算時間の浪費になる．

以上のように考えると，たとえば(13)の第1式を用いて，計算機が扱いうる最高の次数 n の見当をつける方が，オーバフローがおこらないための M の最大値を求めるよりも実際には意味があるように思われる．

4. Olver の評価式

Miller の計算法によって求められる関数の近似値の絶対誤差の評価式を Olver は導いている．$J_n(x)$ を計算する場合についてこの評価式を示すとつぎのようになる．

$$e_n=\alpha_0 J_n(x)-F_n(x) \tag{28}$$

とすれば

$$|e_n| \leqq (1-\rho\sigma)^{-1}[\{\sigma^{M-n}+(1-\sigma)^{-1}c\}\rho\sigma+c\tau] \tag{29}$$

ただし，

$$\rho=|J_{M+1}(x)/J_M(x)|$$

であり，不等式

$$|Y_m(x)/Y_{M+1}(x)| \leqq \sigma^{-m+M+1},\quad m=0,\ 1,\ \cdots,\ M$$

を満足する σ の最小値をあらためて σ とする．なお，

$$\tau=\left|\frac{1}{J_M(x)}\sum_{m=\left[\frac{M}{2}\right]+1}^{\infty} J_{2m}(x)\right|$$

$$c=2\max_{0\leqq m\leqq M}|J_m(x)|$$

であって，α_0 は（1）式において $a=1$ としたときにえられる値とする．

したがって，(29) を用い，$J_n(x)$ の近似値 $F_n(x)/\alpha_0$ の絶対誤差 $\Delta_n=e_n/\alpha_0$ を評価することができる．

いま，$M=L=10$ としてえられる $J_n(1)$ の近似値，その絶対誤差ならびに (29) を用いた絶対誤差の評価値を示すと**第9表**のようになる．第1表によれば，$n \leqq 6$ に対して $J_n(1)$ は少なくとも10桁正しく計算されるべきであるが，実際にそのようになっているこ

第9表　$J_n(1)$ の近似計算例 ($M=L=10$)

n	$F_n(1)/\alpha_0$	$\lvert\Delta_n\rvert$	$\lvert\Delta_n\rvert \leqq$
10	2.6246 08346 06751(-10)	6.01(-13)	4.45(-12)
9	5.2492 16692 13502(- 9)	3.35(-14)	3.25(-12)
8	9.4223 43962 38236(- 8)	2.10(-15)	3.11(-12)
7	1.5023 25817 28904(- 6)	1.48(-16)	3.10(-12)
6	2.0938 33800 24227(- 5)	3.35(-17)	3.10(-12)
5	2.4975 77302 11784(- 4)	5.50(-16)	3.10(-12)
4	2.4766 38964 11542(- 3)	5.47(-15)	3.10(-12)
3	1.9563 35398 27116(- 2)	4.31(-13)	3.10(-12)
2	1.1490 34849 32154(- 1)	2.54(-13)	3.10(-12)
1	4.4005 05857 45905(- 1)	9.71(-13)	3.10(-12)
0	7.6519 76865 59655(- 1)	1.69(-12)	3.10(-12)

とが第9表から明らかである．また，Olver の評価式による絶対誤差の評価も正しいことがわかる．しかしこの誤差評価によると，$J_6(1)$ の近似値の確度は少なくとも3桁少なく評価される．

このように，とくに $M(=M_E)$ に対する $N(=N_E)$ において，(29) を用いる絶対誤差の評価は過大評価になる．一定の p について考えると，x に対応する $M=M_E$ を用いてえられる近似値の絶対誤差が $n=N_E$ で過大評価される程度は，ほとんど x の値に無関係である．しかし，x を一定にして考えると，大きな $M=M_E$ を用いるほど，えられる近似値の絶対誤差の評価が過大評価される程度はますます大きくなる．つぎにその例を示す．

第1表からわかるように，$M=L=22$ として $J_n(1)$ の近似計算を行なうと，$n\leqq 13$ に対しては**第10表**のように30桁正しい $J_n(1)$ がえられる（ただし，30桁に丸めたために $J_8(1)$ は最下位で1だけ大きくなっている）．ところが，(29) を用いると，$n\leqq 13$ に対して

$$|\Delta_n|\leqq 5.72\times 10^{-31}$$

となる．したがって，この誤差評価によれば，第10表において下線が引かれている桁以下は確度が保証されないことになり，とくに $J_{13}(1)$ の確度は14桁も少なく評価される．

第10表　$J_n(1)$ の近似計算例 ($M=L=22$)

n	$F_n(1)/\alpha_0$
13	1.9256 16764 48017 28903 61689 45536(-14)
12	4.9997 18179 44840 52891 01801 52674(-13)
11	1.1980 06746 30313 70964 94070 67696(-11)
10	2.6306 15123 68745 32069 97853 68779(-10)
9	5.2492 50179 91187 50430 30766 66881(- 9)
8	9.4223 44172 60450 05453 85401 46699(- 8)
7	1.5023 25817 43680 82122 18633 46805(- 6)
6	2.0938 33800 23892 69965 60701 45380(- 5)
5	2.4975 77302 11234 43137 50655 40988(- 4)
4	2.4766 38964 10995 50437 85048 39534(- 3)
3	1.9563 35398 26684 05918 90532 16218(- 2)
2	1.1490 34849 31900 48046 96468 81335(- 1)
1	4.4005 05857 44933 51595 96822 03719(- 1)
0	7.6519 76865 57966 55144 97175 26103(- 1)

む　す　び

上述したように，ベッセル関数 $J_{\nu+n}(x)$ の近似値を，漸化式を用いて，p 桁正しく，しかもできるだけ速く計算するためには x に対して M_E および N_E を定めることが重要である．

筆者は，$p=30$ のときの M_E および N_E（第1表参照）を用い，$M=M_E$ として

$$x=0.01(0.01)0.1(0.1)1(1)10(10)100$$

に対する

$$n=0(1)N_E \text{ の } J_n(x)$$

および

$$\nu=\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5}$$

の $J_\nu(x)$ を計算し，少なくとも29桁正しい第1種ベッセル関数の関数表を作成した．

なお，詳述を避けたが，第2種ベッセル関数 $Y_\nu(x)$ についてもほぼ同様の計算を行なった．一例を**第11表**に示す．

第11表　$Y_{1/3}(x)$ の計算例

x	$Y_{1/3}(x)$
0.01	-4.8760 68267 08722 19914 09360 53794 (　0)
0.02	-3.8181 57351 27911 22484 31297 38426 (　0)
0.03	-3.2970 70000 85192 13533 15540 58663 (　0)
0.04	-2.9641 62848 91887 41274 75566 56719 (　0)
0.05	-2.7246 09099 17169 41491 45769 47907 (　0)
0.06	-2.5398 83194 36284 49529 50199 67707 (　0)
0.07	-2.3908 12052 88043 50631 55509 32899 (　0)
0.08	-2.2665 74421 04945 10058 29378 43013 (　0)
0.09	-2.1605 11203 90952 60919 40352 64993 (　0)
0.10	-2.0682 56564 96619 04585 62445 51421 (　0)
0.20	-1.5118 28882 45869 96950 42368 96713 (　0)
0.30	-1.2133 44853 88314 22205 82781 67614 (　0)
0.40	-1.0048 52916 97824 21496 76204 67736 (　0)
0.50	-8.4062 78260 43377 73860 10645 51804 (- 1)
0.60	-7.0227 88211 23329 14159 55669 54438 (- 1)
0.70	-5.8085 80299 95712 69679 19264 50024 (- 1)
0.80	-4.7150 32314 64345 84297 53933 45568 (- 1)
0.90	-3.7138 77373 35319 40914 94342 70711 (- 1)
1.00	-2.7880 16412 75992 15392 42051 62130 (- 1)
2.00	+3.4319 99662 60344 34226 14991 77313 (- 1)
3.00	+4.5689 30345 72306 32403 57025 46113 (- 1)
4.00	+1.7941 67663 43948 49539 63709 35308 (- 1)
5.00	-1.8192 32112 93433 37450 30802 69728 (- 1)
6.00	-3.2525 79921 00949 32100 79021 83572 (- 1)
7.00	-1.7066 16479 46895 22611 98972 68080 (- 1)
8.00	+1.0958 77946 33606 25605 12571 42168 (- 1)
9.00	+2.6198 81509 68579 53029 05015 35819 (- 1)
10.00	+1.7020 11178 82687 61032 80600 54251 (- 1)
20.00	-2.8777 70763 57151 68951 15788 76747 (- 2)
30.00	-5.8645 77231 67050 79406 09984 07923 (- 2)
40.00	+1.0547 87036 70989 29091 12296 02830 (- 1)
50.00	-1.1283 48993 30312 78916 76492 82993 (- 1)
60.00	+8.6699 17329 57180 01556 31860 80338 (- 2)
70.00	-3.9323 24637 45527 25697 08324 30425 (- 2)
80.00	-1.3358 84953 59840 77644 03851 37868 (- 2)
90.00	+5.5812 48288 39558 63181 42873 61325 (- 2)
100.00	-7.6900 50496 21365 08257 91120 98727 (- 2)

漸化式を用いて変形ベッセル関数 $I_{\nu+n}(x)$ の近似値を p 桁正しく求める場合にも，$J_{\nu+n}(x)$ に対する場合と同じようにして，x に対して M_E および N_E を定めることができた．これについては稿を改めて詳述する．

本研究を行なうにあたり，ご指導，ご鞭撻をいただいた城　憲三教授に深甚の謝意を表する．

参考文献

1) British Association for the Advancement of Science: Bessel functions, Part II, Mathematical Tables, Vol. X, Cambridge University Press, 1952.

2) L. Fox: A short table for Bessel functions of integer oders and large arguments, Royal Society Shorter Mathematical Tables, No. 3, Cambridge University Press, 1954.

3) I.A. Stegun and M. Abramowitz: Generation of Bessel functions on high speed computers, MTAC **11**, 1957, pp. 255～257.

4) M. Goldstein and R.M. Thaler: Recurrence techniques for the calculation of Bessel functions, MTAC **13**, 1959, pp. 102～108.

5) F.J. Corbató and J.L. Uretsky: Generation of spherical Bessel functions in digital computers, Jour. Assoc. Comput. Mach. **6**, 1959, pp. 336～375.

6) F.W.J. Olver: Error analysis of Miller's recurrence algorithm, Math. Comp. **18**, 1964, pp. 65～74.

7) M. Goldstein and R.M. Thaler: Bessel functions for large arguments, MTAC **12**, 1958. pp. 18～26.

8) J.B. Randels and R.F. Reeves: Note on empirical bounds for generating Bessel functions, Comm. Assoc. Comput. Mach. **1**, May 1958, pp. 3～5.

9) 魚木五夫：$J_n(x)$ を漸化式によって計算するための条件，計算機のための函数近似公式，第2集，数理科学総合研究第IV班第5分科会，1962, pp. 80～81.

10) 宇野利雄：計算機のための数値計算，朝倉書店，1963.

11) S. Hitotumatu: Note on the computation of Bessel functions through recurrence formula, Jour. Math. Soc. Japan **15**, 1963, pp. 353～359.

(昭和40年2月26日受付)