

## 三項行列の逆行列と三項方程式の安定性について\*

鳥居達生\*\*

### はしがき

次数の高い三項方程式は、いろいろな分野でよく用いられる。たとえば常微分方程式の境界値問題や偏微分方程式を差分で近似して解く場合などである。この際、とくに問題となるのは、解が安定であることである。安定性の吟味は一般に簡単でないが、ある種の三項方程式の安定性の判別は、以下述べるように非常に容易である。

三項方程式は

$$\begin{aligned} b_1x_1 + c_1x_2 &= f_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 &= f_2 \\ a_3x_2 + b_3x_3 + c_3x_4 &= f_3 \\ \vdots & \\ a_{n-1}x_{n-2} + b_{n-1}x_{n-1} + c_{n-1}x_n &= f_{n-1} \\ a_nx_{n-1} + b_nx_n &= f_n \end{aligned}$$

であり、三項行列Aは

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} & & \\ 0 & & & a_n & b_n & & \end{bmatrix}$$

で表わされるが、以下簡単のためAを  $[a_i, b_i, c_i]$  で示すことにする。

$A=[a, b, c]$  より作られる三項方程式を消去法で解くとき永坂氏<sup>1)</sup>によれば

$$\left| \frac{a}{\alpha} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{c}{\alpha} \right| \leq 1$$

を満足するならば安定した解を求めることができる。ただし  $\alpha, \beta$  は  $z^2 - bz + ac = 0$  の二つの実根で  $|\alpha| \geq |\beta|$ 。

また Evans と Forrington は、対称行列  $[a, b, a]$  からなる三項方程式の新しい解法を提唱すると同時に

$$b^2 \geq 4a^2$$

を満足するならば数値解は安定であるといっている<sup>2)</sup>。

\* Inversion of Tridiagonal Matrices and the Stability of Tridiagonal Systems of Linear Equations, by Tatsuo Torii (University of Osaka)

\*\* 大阪大学工学部

これらはいずれも一定の解法に基づく数値解の安定性にふれたものであるが、本論文ではまず三項行列の逆行列を解析的に求め、つぎに次数  $n$  に対して  $A^{-1}$  のノルム  $\|A^{-1}\|$  の状況を考え、三項方程式の安定性判別を  $\|A^{-1}\|$  と関連づけて述べる。とくに  $A=[a, b, c]$  からなる三項方程式の安定性の判別は

$$|a+c| < |b|$$

によって簡単にできる。

### 1. 三項行列の逆行列

三項行列  $A=[a_i, b_i, c_i]$  より二階同次差分方程式

$$\left. \begin{aligned} a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} &= 0 \\ a_i c_i &\neq 0, \quad i=1, 2, \dots, n. \\ a_i, c_n &\text{ 任意定数} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

をつくり、この二つの基本解を  $x_1, x_2$  とする。

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= (0, x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, x_{n+1}^{(1)}) \\ x_2 &= (x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}, 0) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(1), (2) 式を一つにまとめれば

$$\left. \begin{aligned} P_i X_i &= X_{i-1} \\ P_i &= \begin{bmatrix} -\frac{b_i}{a_i} & -\frac{c_i}{a_i} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ X_i &= \begin{bmatrix} x_i^{(1)} & x_i^{(2)} \\ x_{i+1}^{(1)} & x_{i+1}^{(2)} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

と表わすことができる。

さて  $A^{-1}=(\alpha_{ij})$  において  $y_j^{(1)}, y_j^{(2)}$  を適当にとり

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} x_i^{(1)} y_j^{(2)}, & j \geq i \\ x_i^{(2)} y_j^{(1)}, & j < i \end{cases} \quad (4)$$

と仮定すれば、まず  $AA^{-1}=I$  より次の式が成立する。

$$\begin{bmatrix} x_i^{(1)} & x_i^{(2)} \\ x_{i+1}^{(1)} & x_{i+1}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i^{(2)} \\ -y_i^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{c_i} \end{bmatrix} \quad (5a)$$

上式に (3) 式の関係を用いるとすれば

$$\begin{bmatrix} x_i^{(1)} & x_i^{(2)} \\ x_{i+1}^{(1)} & x_{i+1}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i-1}^{(2)} \\ -y_{i-1}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{c_{i-1}} \\ \frac{b_i}{c_{i-1}c_i} \end{bmatrix} \quad (5b)$$

$$\begin{bmatrix} x_i^{(1)} & x_i^{(2)} \\ x_{i+1}^{(1)} & x_{i+1}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i+1}^{(2)} \\ -y_{i+1}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5c)$$

となる。\$X\_i\$ は正則であるから \$AA^{-1}=I\$ が成り立つためには \$y\_i^{(1)}, y\_i^{(2)}\$ は上の三式より次の二階同次差分方程式

$$\left. \begin{aligned} a_{i+1}y_{i+1} + b_i y_i + c_{i-1} y_{i-1} &= 0 \\ a_{n+1}, c_0; 0 &\text{でない任意定数} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

を満足しなければならない。

したがって \$A^{-1}\$ の元 \$\alpha\_{ij}\$ を確定するためには差分方程式 (1), (6) の境界条件あるいは初期条件を定めればよい。(5a), (5c) 式において, \$i=0, n\$ とおけば

$$y_0^{(1)}=0, y_n^{(2)}=0 \quad (7a)$$

$$y_0^{(2)}=-1/c_0 x_1^{(1)}, y_{n+1}^{(1)}=-1/a_{n+1} x_n^{(2)} \quad (7b)$$

となるので \$x\_1^{(1)}, x\_n^{(2)}\$ を定めれば境界条件 \$y\_0^{(2)}, y\_{n+1}^{(1)}\$ は決定される。

また同じ式において \$i=n, 0\$ とおけば

$$y_1^{(1)}=-1/a_1 x_0^{(2)}, y_n^{(2)}=-1/c_n x_{n+1}^{(1)} \quad (8a)$$

$$y_1^{(2)}/y_1^{(1)}=x_1^{(2)}/x_1^{(1)}, y_n^{(2)}/y_n^{(1)}=x_n^{(2)}/x_n^{(1)} \quad (8b)$$

が成立するので, (7a), (8a) 式により (6) 式の初期条件は定まり計算は簡単となる。

逆行列の計算法としては前述したとおりでよいが, 以下考察の都合上, 以上のことを次のように書きあらためる。

差分方程式 (1) の二つの基本解を

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= (0, 1, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, x_{n+1}^{(1)}) \\ x_2 &= (x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, \dots, x_{n-1}^{(2)}, 1, 0) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

差分方程式 (6) のそれらを

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= (0, 1, y_2^{(1)}, \dots, y_n^{(1)}, y_{n+1}^{(1)}) \\ y_2 &= (y_0^{(2)}, y_1^{(2)}, \dots, y_{n-1}^{(2)}, 1, 0) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

とすれば境界条件 (7b) は

$$\left. \begin{aligned} c_0 y_0^{(2)} &= c_n x_{n+1}^{(1)} \\ a_{n+1} y_{n+1}^{(1)} &= a_1 x_0^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

となり (8b) 式は

$$\left. \begin{aligned} y_1^{(2)}/y_0^{(2)} &= c_0 x_1^{(2)}/a_1 x_0^{(2)} \\ y_{n+1}^{(1)}/y_n^{(1)} &= c_n x_{n+1}^{(1)}/a_{n+1} x_n^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

と表わされる。

よって \$A^{-1}\$ の元 \$\alpha\_{ij}\$ は

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{ij} &= -\frac{x_i^{(1)} y_j^{(2)}}{c_n x_{n+1}^{(1)}} = -\frac{x_i^{(1)} y_j^{(2)}}{c_0 y_0^{(2)}}, \quad j \geq i \\ \alpha_{ij} &= -\frac{x_i^{(2)} y_j^{(1)}}{a_1 x_0^{(2)}} = -\frac{x_i^{(2)} y_j^{(1)}}{a_{n+1} y_{n+1}^{(1)}}, \quad j \leq i \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

で示すことができる。

特別な場合として \$A=[a, b, c]\$ のときの逆行列を

求める。差分方程式 (6) の特性方程式 \$ax^2+bx+c=0\$ の2根を \$\alpha, \beta\$ として初期条件 \$x\_0^{(1)}=0, x\_1^{(1)}=1\$ と \$x\_{n+1}^{(2)}=0, x\_n^{(2)}=1\$ より

$$x_i^{(1)} = \frac{\beta^{-i} - \alpha^{-i}}{\beta^{-1} - \alpha^{-1}}, \quad x_i^{(2)} = \frac{\alpha^{n-i+1} - \beta^{n-i+1}}{\alpha - \beta} \quad (14a)$$

\$y\_0^{(1)}=0, y\_1^{(1)}=1\$ と \$y\_{n+1}^{(2)}=0, y\_n^{(2)}=1\$ より

$$y_i^{(1)} = \frac{\alpha^i - \beta^i}{\alpha - \beta}, \quad y_i^{(2)} = \frac{\beta^{-n+i-1} - \alpha^{-n+i-1}}{\beta^{-1} - \alpha^{-1}} \quad (14b)$$

となり \$A^{-1}\$ の元は

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{ij} &= -c^{-1} \cdot \frac{\beta^{-i} - \alpha^{-i}}{\beta^{-1} - \alpha^{-1}} \cdot \frac{\beta^{-n+j-1} - \alpha^{-n+j-1}}{\beta^{-(n+1)} - \alpha^{-(n+1)}}, \quad j \geq i \\ \alpha_{ij} &= -a^{-1} \cdot \frac{\alpha^{n-i+1} - \beta^{n-i+1}}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}} \cdot \frac{\alpha^j - \beta^j}{\alpha - \beta}, \quad j \leq i \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

で与えられる。\$\alpha, \beta\$ が等根ならば \$\beta \to \alpha\$ として上式の極限值をとればよく

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{ij} &= -c^{-1} \cdot i \left(1 - \frac{j}{n+1}\right) \alpha^{j-i+1}, \quad j \geq i \\ \alpha_{ij} &= -a^{-1} \cdot j \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) \alpha^{j-i-1}, \quad j \leq i \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

\$a, b, c\$ が実数で \$\alpha, \beta\$ が共役複素根ならば \$\alpha = \bar{\beta} = re^{i\theta}\$, \$\theta = \tan^{-1} \sqrt{4ac - b^2}/b\$ とおき

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{ij} &= -c^{-1} \cdot r^{j-i+1} \cdot \frac{\sin i\theta \sin (n-j+1)\theta}{\sin \theta \sin (n+1)\theta}, \quad j \geq i \\ \alpha_{ij} &= -a^{-1} \cdot r^{j-i-1} \cdot \frac{\sin (n-i+1)\theta \sin j\theta}{\sin \theta \sin (n+1)\theta}, \quad j \leq i \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

となる。ただし \$(n+1)\theta\$ は \$\pi\$ の整数倍でないとする。

例題 1. \$A=[-1, 2, -1]\$

$$-x^2 + 2x - 1 = 0, \quad \alpha = \beta = 1$$

\$A^{-1}\$ の元は (16) 式より

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} i \left(1 - \frac{j}{n+1}\right), & j \geq i \\ j \left(1 - \frac{i}{n+1}\right), & j \leq i \end{cases}$$

となる。

例題 2. \$A=[1, 1, 1]\$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$\alpha = \bar{\beta} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

\$A^{-1}\$ の元は (17) 式で求めることができるが, \$\alpha, \beta\$ が共役複素根なので \$A\$ は特定の次数 \$n\$ において特異行列になる。このような \$n\$ を求めてみよう。

$$(n+1)\frac{\pi}{3} = k\pi, \quad (k=1, 2, \dots)$$

これから

$$n=2, 5, 8, \dots, 3k-1, \dots$$

となる。実際  $n=2, 5$  の場合  $\det A=0$  を簡単に確認できる。

**2. 三項方程式の安定性について**

三項方程式  $Ax=f$  の数値解は誤差  $Jx$  を含むので、数値解を与式に代入したときの残差を  $r$  とすれば、 $AJx=r$  となる。正数  $\varepsilon$  を適当にとれば  $\|r\| < \varepsilon$  とすることができるので、すべての  $n$  に対し  $\|Jx\|$  が有界であるためには  $\|A^{-1}\| \leq M < \infty$  のときに限り、かつ  $\|Jx\| \leq \|A^{-1}\| \|r\|$  となる。ただし  $\|x\|$  はベクトル  $x$  のノルムで  $\|A\|$  は行列  $A$  のノルムとする。

一般に連立一次方程式の数値解の誤差は係数行列  $A$  の性質に深く依存している。この性質を表わす指標として  $A$  の condition number  $\|A\| \|A^{-1}\|$  がある。ここで行列  $A$  のノルムの定義によっていくつかの指標が得られる。たとえば  $A$  が実対称正値行列で  $A$  の固有値を  $\lambda_i$  とし行列のノルムを  $\|A\| = \max \lambda_i$  と定義すれば、 $P$ -condition  $= \max \lambda_i / \min \lambda_i$  となる。また  $\|A\|$  の代わりに  $N(A) / \sqrt{n}$  を用いれば  $N$ -condition  $= N(A) \cdot N(A^{-1}) / n$  が得られる。ただし  $N(A)^2 = \text{tr} A' A$ 。  $A$  が三項行列の場合ノルムの定義を適当にとれば  $n$  に無関係に  $\|A\| < \infty$  とできるから condition number  $\|A\| \|A^{-1}\|$  は主として  $\|A^{-1}\|$  に依存していると考えてよい。すなわち  $\|A^{-1}\|$  が大きくなるほど三項方程式の解の誤差は大きくなる。

以上の事実から三項方程式の安定性を次のように定義する。

$n$  次の三項方程式  $Ax=f$  の右辺に任意のベクトル  $r$  を加えたとき解ベクトル  $x$  の変位を  $Jx$  で示す。正数  $\varepsilon$  を適当にとり  $\|r\| < \varepsilon$  において

$$\|Jx\| < M\varepsilon, \quad 0 < M < \infty$$

$$n=2, 3, 4, \dots$$

を満足するとき与式の解は安定である。

したがって、すべての  $n$  に対し  $\|A^{-1}\|$  が有界ならば三項方程式は必ず安定である。よって  $\|A^{-1}\|$  が有界であるための条件を求めることが問題となる。

ここでベクトル  $x$  のノルム  $\|x\|$  を

$$\|x\| = \max_i |x_i| \tag{18}$$

と定義し、これに従って行列  $A$  のノルム  $\|A\|$  を

$$\|A\| = \max_{j=1}^n |a_{ij}| \tag{19}$$

で定義する。

そこでいよいよ三項行列  $A$  の逆行列のノルムについて考えよう。

$A^{-1}$  の元は (13) 式で示されているので

$$\|A^{-1}\| = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^i \left| \frac{x_i^{(2)} y_j^{(1)}}{a_{n+1} y_{n+1}^{(1)}} \right| + \sum_{j=i+1}^n \left| \frac{x_i^{(1)} y_j^{(2)}}{c_0 y_0^{(2)}} \right| \right\} \tag{20 a}$$

となる。上式の括弧内は  $A^{-1}$  の第  $i$  行の元の絶対値和である。(9) 式より  $x_i^{(1)} = x_n^{(2)} = 1$  であること、(13) 式における  $A^{-1}$  の対角元に注目し、 $i=n, 1$  とおけば、 $A^{-1}$  の第  $n$  行、第 1 行の元の絶対値和は、それぞれ

$$\frac{1}{|a_{n+1}|} \sum_{j=1}^n \left| \frac{y_j^{(1)}}{y_{n+1}^{(1)}} \right|, \quad \frac{1}{|c_0|} \sum_{j=1}^n \left| \frac{y_j^{(2)}}{y_0^{(2)}} \right|$$

となるので

$$\|A^{-1}\| \geq \max \left\{ \frac{1}{|a_{n+1}|} \sum_{j=1}^n \left| \frac{y_j^{(1)}}{y_{n+1}^{(1)}} \right|, \frac{1}{|c_0|} \sum_{j=1}^n \left| \frac{y_j^{(2)}}{y_0^{(2)}} \right| \right\} \tag{20 b}$$

が成り立つ。

(20 a) 式によりすべての  $n$  に対し  $\|A^{-1}\| < \infty$  であるかどうかは  $\{x_i^{(1)}\}$ ,  $\{x_i^{(2)}\}$  と  $\{y_i^{(1)}\}$ ,  $\{y_i^{(2)}\}$  の性質に依存していることになる。前者は二階同次差分方程式 (1) の二つの基本解、後者は同じく (6) 式の解である。(1) 式において  $a_i$  と  $c_{i-1}$  を入れ換えると (6) 式が得られるので、前者が  $A$  から作られる差分方程式の解であるのに対し後者は  $A'$  から得られる。

$A = [a_i, b_i, c_i]$  として、すべての  $n$  に対し  $\|A^{-1}\| < \infty$  であるための条件を求めたいのであるが、 $\|A^{-1}\|$  が発散する場合の方が簡単なので、 $n \rightarrow \infty$  あるいは少なくとも一つの  $n (=n_1)$  において  $\|A^{-1}\| = \infty$  となるための条件について述べる。すなわち一般の三項方程式の解が不安定となるための十分条件を明らかにする。つぎに  $A = [a, b, c]$  からなる特別な三項方程式が安定であるための必要十分条件についてふれる。

さて簡単のため  $a_{n+1} = c_0 = 1$  とし  $\{y_i^{(1)}\}$ ,  $\{y_{n-i+1}^{(2)}\}$  をまとめて  $\{y_i\}$  で表わし

$$\|A^{-1}\|_L \equiv \frac{1}{|y_{n+1}|} \sum_{i=1}^n |y_i| \tag{20 c}$$

$$n=2, 3, \dots$$

とおけば (20 b) 式より

$$\|A^{-1}\| \geq \|A^{-1}\|_L \tag{20 d}$$

が常に成り立つ。

したがって (20 c) 式で定義される  $\|A^{-1}\|_L$  が  $n \rightarrow \infty$  あるいは少なくとも一つの  $n$  において  $\|A^{-1}\|_L = \infty$

ならば  $\|A^{-1}\| = \infty$  である。

なお  $a_i = c_n = 1$  とし  $\{x_i^{(1)}\}$ ,  $\{x_{n-i+1}^{(2)}\}$  を  $\{x_i\}$  で表わせば  $A'$  について

$$\|A'^{-1}\|_L = \frac{1}{|x_{n+1}|} \sum_{i=1}^n |x_i| \tag{20e}$$

であることを注意しておこう。

そこで  $\|A^{-1}\|_L$  が発散する場合を具体的に考察しよう。

(1)  $\{y_i\}$  が極限值 0 をもつならば  $y_i \neq 0$  であるから  $\|A^{-1}\|_L$  の定義より  $\|A^{-1}\|_L \rightarrow \infty$ 。

(2)  $y_i \neq 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) で  $y_{n+1} = 0$  ならば  $\|A^{-1}\|_L = \infty$ 。たとえば  $\{y_n\}$  が有界で振動し、かつ特定の次数  $n$  において  $y_{n+1} = 0$  ならば  $n$  次の三項行列  $A$  は特界行列である。

(3)  $\min |y_i| = m > 0$ ,  $i=1, 2, \dots, n+1$   
 $\max |y_i| = M < \infty$

ならば  $\|A^{-1}\|_L \geq \frac{M}{m} n$ 。すなわち  $y_i = O(1)$  ならば  $\|A^{-1}\| \geq O(n)$ 。

(4)  $p$  を  $i$  に無関係な任意の正数とし、 $K_1, K_2$  ( $> 0$ ) を適当にとり

$K_1 i^p \leq |y_i| \leq K_2 i^p$ ,  $i=1, 2, \dots, n+1$   
 ならば

$$\|A^{-1}\|_L \geq \sum_{i=1}^n K_2 i^p / K_1 (n+1)^p \approx \frac{K_2}{K_1} n$$

すなわち  $y_i = O(i^p)$  ならば  $\|A^{-1}\| \geq O(n)$  である。

二階同次差分方程式 (6) の基本解  $\{y_i\}$  が、以上の性質をもつとき、他方の差分方程式 (1) の基本解  $\{x_i\}$  が  $\{y_i\}$  と関連して、どのような性質をもつかははっきりすれば  $\|A^{-1}\|$  について、さらに正確な見通しが立つであろうが、ここでは  $\{x_i\}$  と  $\{y_i\}$  の境界条件について、常に (11) 式が成立していることを指摘するに留める。

さて次に  $|\alpha| > 1$  とし  $K_1 |\alpha|^i \leq |y_i| \leq K_2 |\alpha|^i$  とすれば

$$\|A^{-1}\|_L \leq \sum_{i=1}^n K_2 |\alpha|^i / K_1 |\alpha|^{n+1} \approx \frac{K_2}{K_1} \frac{1}{|\alpha|-1} < \infty$$

となるから  $y_i = O(\alpha^i)$ ,  $|\alpha| > 1$  ならば  $\|A^{-1}\|_L = O(1)$  である。くわしくは  $\{y_i^{(1)}\}$ ,  $\{y_{n-i+1}^{(2)}\}$  をまとめて  $\{y_i\}$  で表わしたので

$$\left. \begin{aligned} y_i^{(1)} &= O(\alpha^i), & |\alpha| > 1 \\ y_{n-i+1}^{(2)} &= O(\beta^{-i}), & |\beta| < 1 \end{aligned} \right\} \tag{21a}$$

ならば  $\|A^{-1}\|_L < \infty$  である。これだけでは  $\|A^{-1}\| < \infty$  であるかどうかかわからないが、特別な場合として  $A = [a, b, c]$  のとき  $\{y_i\}$  が上式にしたがうならば (14a) 式より  $\{x_i\}$  は

$$\left. \begin{aligned} x_i^{(1)} &= O(\beta^{-i}) \\ x_{n-i+1}^{(2)} &= O(\alpha^i) \end{aligned} \right\} \tag{21b}$$

となるので  $\|A^{-1}\| < \infty$  を簡単に示すことができる。

すなわち (20a) 式より  $\|A^{-1}\|$  の第一項は

$$\begin{aligned} |x_i^{(2)}| \sum_{j=1}^i \frac{|y_j^{(1)}|}{|y_{n+1}^{(1)}|} &= O(\alpha^{n-i+1}) O(\alpha^{i+1}) / O(\alpha^{n+1}) \\ &= O(1) \end{aligned}$$

第二項は

$$\begin{aligned} |x_i^{(1)}| \sum_{j=i+1}^n \frac{|y_j^{(2)}|}{|y_0^{(2)}|} &= O(\beta^{-i}) O(\beta^{-n+i}) / O(\beta^{-n-1}) \\ &= O(1) \end{aligned}$$

となる。

そこで  $A = [a, b, c]$  の場合についてさらにくわしくしらべよう。

二階同次差分方程式 (6) の特性方程式  $az^2 + bz + c = 0$  の二根を  $\alpha, \beta$  とする。差分方程式 (1), (6) の基本解  $\{x_i\}$ ,  $\{y_i\}$  は (14) 式より、 $|\alpha| \geq |\beta|$ ,  $|\alpha| = |\beta| \neq 1$  の場合

$$x_i^{(1)} = y_{n-i+1}^{(2)} = O(\beta^{-i})$$

$$y_i^{(1)} = x_{n-i+1}^{(2)} = O(\alpha^i)$$

$|\alpha| = |\beta| = 1$ ,  $\alpha \neq \beta$  の場合

$$x_i^{(1)} = y_i^{(1)} = x_{n-i+1}^{(2)} = y_{n-i+1}^{(2)} = \sin i\theta$$

ただし  $\{x_i\}$ ,  $\{y_i\}$  の定数倍は以下無視するものとする。 $\alpha = \beta = \pm 1$  ならば

$$x_i^{(1)} = y_i^{(1)} = x_{n-i+1}^{(2)} = y_{n-i+1}^{(2)} = i$$

となる。

$A^{-1}$  を下半三角行列  $L$ , 対角行列  $D$ , 上半三角行列  $U$  に分割し  $A^{-1} = L + D + U$  とすれば

$$\max(\|L\|, \|D\|, \|U\|) \leq \|A^{-1}\| \leq \|L\| + \|D\| + \|U\|$$

である。また任意の正方形行列  $A$  において

$$M(A) = n \max |a_{ij}|$$

とおけば

$$M(A) \geq \|A\| \geq \frac{1}{n} M(A)$$

が成り立つ。

$A$  が三項行列のとき、 $A^{-1}$  の元は (13) 式で与えられているので

$$\|L\| = \max_i \left| \frac{x_i^{(2)}}{y_{n+1}^{(1)}} \sum_{j=1}^{i-1} |y_j^{(1)}| \right| \tag{22a}$$

$$\frac{1}{n} M(L) \geq 1 / |y_{n+1}^{(1)}|$$

$$\|D\| = \max_i \left| \frac{x_i^{(2)} y_i^{(1)}}{y_{n+1}^{(1)}} \right| \tag{22b}$$

$$\|U\| = \max_i \left| \frac{x_i^{(1)}}{y_0^{(2)}} \sum_{j=i+1}^n |y_j^{(2)}| \right| \tag{22c}$$

$$\frac{1}{n} M(U) \geq 1 / |y_0^{(2)}|$$

となる。

(1)  $|\alpha| \geq |\beta| > 1$  の場合

$x_i^{(1)} = y_{n-i+1}^{(2)}$  は  $O(\beta^{-i})$  で 0 に近づき

$$\|L\| = O(1), \|D\| = O(1), \|U\| \geq O(\beta^{n+1})$$

であるから  $\|A^{-1}\| \geq O(\beta^{n+1})$  で発散。

(2)  $|\alpha| > 1 > |\beta|$  の場合は (21) 式を用いて

$\|A^{-1}\| < \infty$  であることを既に示した。

(3)  $1 > |\alpha| \geq |\beta|$  の場合

$y_i^{(1)} = x_{n-i+1}^{(2)}$  は  $O(\alpha^i)$  で 0 に近づき

$$\|L\| \geq O(\alpha^{-n-1}), \|D\| = O(1), \|U\| = O(1)$$

であるから  $\|A^{-1}\| \geq O(\alpha^{-n-1})$  で発散。

(4)  $|\alpha| = |\beta| = 1, \alpha \neq \beta$  の場合

$\theta$  は  $a, b, c$  によってきまる定数であるから

$$(n+1)\theta = k\pi, k=1, 2, \dots$$

となる特定の次数  $n$  において  $A$  は特異行列となる。

$(n+1)\theta \neq k\pi$  のとき  $\|L\| = O(n), \|D\| = O(1), \|U\| = O(n)$  であるから  $\|A^{-1}\| = O(n)$  で発散。

(5)  $\alpha = \beta = \pm 1$  の場合

$x_i^{(1)} = y_i^{(1)} = x_{n-i+1}^{(2)} = y_{n-i+1}^{(2)} = i$  で増加し

$$\|L\| = \max_i \frac{i(i-1)(n-i+1)}{2(n+1)} = O(n^2)$$

$$\|D\| = \max_i \frac{i(n-i+1)}{n+1} = O(n)$$

$$\|U\| = \|L\|$$

であるから  $\|A^{-1}\| = O(n^2)$  で発散する。

以上のことから次の結論を得る。

$n$  次の二項行列  $A = [a, b, c]$  から二次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  をつくり、この二根を  $\alpha, \beta$  とする。2 根の絶対値が次の条件

$$|\alpha| > 1 > |\beta| \tag{23}$$

を満足するときに限り、すべての  $n$  に対し  $\|A^{-1}\|$  は有界である。

これらの結果はベクトルのノルムを (18) 式で定義したときに得られたものであるが、ノルムの定義を変えた場合についても考える。さきに定義したベクトルおよび行列のノルムを  $\|x\|_I, \|A\|_I$  とし、他に實際上重要なノルムの定義は次のとおりである。

$$\|x\|_{II} = \sum_{i=1}^n |x_i| \tag{24}$$

$$\|A\|_{II} = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \tag{25}$$

$$\|x\|_{III} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \tag{26}$$

$$\|A\|_{III} = \sqrt{\mu_1} \tag{27}$$

$\mu_1$ ;  $A'A$  の最大固有値。

$\|A\|_I$  と  $\|A\|_{II}$  をみると行と列を入れ換えたにすぎ

ないので

$$\|A'\|_I = \|A\|_{II} \tag{28}$$

となる。したがって行列のノルムの定義  $\|A\|_I$  の下で得られた三項行列に関する結論は、 $A$  の代わりに  $A'$  を考えれば  $\|A\|_{II}$  になってもそのまま成立する。

$\|A\|_{III}$  と  $\|A\|_I$  (あるいは  $\|A\|_{II}$ ) の間には、よく知られているように ((文献 4), 110 頁)

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_I \leq \|A\|_{III} \leq \sqrt{n} \|A\|_I \tag{29}$$

の関係があるが  $\|A\|_{III}$  に関しては以下に示すように、さらに精密な不等式が成立する。

いま行列  $A$  の絶対値最大の固有値を  $\lambda_1$  とすれば

$$|\lambda_1| \leq \min \left\{ \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right\} \\ = \min \{ \|A\|_I, \|A\|_{II} \}$$

が成り立つので  $A$  に  $A'$  を代入すれば

$$\mu_1 = \|A\|_{III}^2 \leq \min \{ \|A'A\|_I, \|A'A\|_{II} \} \\ \leq \min \{ \|A'\|_I \|A\|_I, \|A'\|_{II} \|A\|_{II} \} \\ = \|A\|_I \|A\|_{II} \tag{28} \text{ 式より}$$

となり、つぎの不等式

$$\|A\|_{III} \leq \sqrt{\|A\|_I \|A\|_{II}} \leq \max(\|A\|_I, \|A\|_{II}) \tag{30}$$

が得られる。

$A$  を三項行列とし  $\|A^{-1}\|_I < \infty$  ならば  $\|A^{-1}\|_{III} < \infty$  となる。もし  $\|A^{-1}\|_I$  が発散するならば、最も遅い場合で  $O(n)$  であるから (29) 式により  $\|A^{-1}\|_{III}$  もまた  $O(n^{\frac{1}{2}})$  より速く発散する。

したがって安定の条件 (23) は、いずれもノルムの定義を以上のように変えても成立する。

さて再び三項方程式の安定の条件と連立一次方程式の ill-condition の判定との関連にふれよう。

$A$  が一般の正方行列の場合  $P$ -condition は、 $P = \sqrt{\mu_1/\mu_n}$  である。 $\mu_1, \mu_n$  は  $A'A$  の最大、最小の固有値とする。いま行列のノルムの定義を  $\|A\| = \sqrt{\mu_1}$  とする。 $A$  が三項行列であることから  $\|A\| < \infty$ 、さらに安定の条件を満たせば  $\|A^{-1}\| = \sqrt{1/\mu_n} < \infty$  であるから次数  $n$  がどれだけ増えても  $P$ -condition は有界である。 $\|A\| = N(A)/\sqrt{n}$  とおけば  $N$ -condition =  $\frac{N(A)N(A^{-1})}{n}$  についても同じことがいえる。

最後に三項方程式の安定性の簡単な判別法について述べる。

$A = [a, b, c]$  から作る三項方程式が安定の条件 (23) を満足するためには複素係数二次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  に Lehmer<sup>2)</sup> の判定を適用することにより

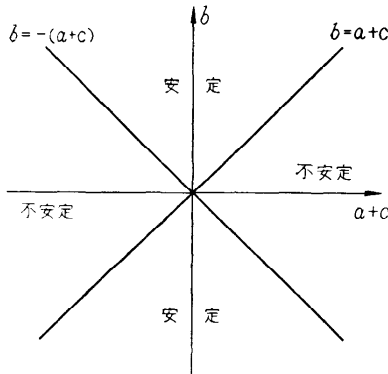
$$||a|^2 - |c|^2| < |cb - ab|, |a| \neq |c| \quad (31)$$

が成立すれば必要十分である(証明略)。

とくに  $a, b, c$  が実数ならば

$$|a+c| < |b| \quad (32)$$

となり安定の領域は第1図のようにきわめて明白となる。



第1図

$|a+c| > |b|$  であつ  $|a| > |c|$  ならば2根の絶対値はともに1より小,  $|a| < |c|$  ならばともに1より大となり, それぞれ  $A^{-1}$  の上半三角行列, 下半三角行列のノルムが  $n$  とともに増加する.  $A$  が対称行列の場合, すなわち  $a=c$  で  $|a+c| > |b|$  ならば2根は絶対値1の共役複素根で,  $A^{-1}$  は特定の次数  $n$  において特異行列, あるいはそれに近づく(前節例題2参照).

$a=c=|b|/2$  ならば  $\alpha=\beta=\pm 1$  で  $\|A^{-1}\|=O(n^2)$ .

ちなみに永坂氏の条件は  $ax^2+bx+c=0$  の2根に変換していうならば  $|\alpha| \geq 1 \geq |\beta|$  で, 本論文で述べた安定の条件と等号が成立することを除き, まったく同じである. 等号が成立する場合は安定と不安定の境界であるから準安定と呼んだ方が適切かもしれない.

Evans と Forrington の条件  $b^2 \geq 4a^2$  は,  $|a+c| \leq |b|$  の特別な場合  $a=c$  になっているのは明らかである.

例題 1.  $A_1=[1, -6, 8], \alpha_1=4, \beta_1=2$

$$A_2=[8, -6, 1], \alpha_2=\frac{1}{2}, \beta_2=\frac{1}{4}$$

$$A_3=\left[-1, \frac{3}{2}, 1\right], \alpha_3=2, \beta_3=-\frac{1}{2}$$

より解がすべて1になるような三項方程式  $Ax=f$  をつくり誤差の伝播をしらべる(第1表).

$A_1$  の場合  $|a+c|=9, |b|=6$  であるから  $|a+c| > |b|$  となり不安定. なお  $|a| < |c|$  であるから  $A^{-1}$  の上半三角行列のノルムが  $O(\beta_1^n)$  で発散するので  $x_n$  より  $x_1$  の方の誤差が格段に大きくなる.  $A_2$  の場合  $A_1$  と異なるのは  $|a| > |c|$  であるから  $A_2^{-1}$  の下半三角行列のノルムが  $O(\alpha_2^n)$  で増える.  $A_3$  の場合  $|a+c|=0, |b|=\frac{3}{2}$  であるから  $|a+c| < |b|$  となり安定.

実際,  $n=50$  として消去法で解いた実験結果が第1表に示されているが, 前述したことと実験結果はよく一致している.

例題 2.  $A=[a, b, c], \alpha, \beta$

$$b=a+d, c=b+d$$

$$a>0, c>0$$

この例題では  $|a+c|=2(a+d), b=a+d$  であるから  $A$  から作る三項方程式は正数  $a, d$  に無関係に常に不安定, さらに  $|a| < |c|$  であるから  $A^{-1}$  の上半三角行列のノルムが  $O(\beta^n)$  で増大する. そこで最も不安定となるのは  $a, d$  の間にどのような関係があるときか考えてみよう.

$|\beta|$  が大きいほど  $\|A^{-1}\|$  は  $O(\beta^n)$ ,  $|\beta| > 1$  で増大するので  $|\alpha| \geq |\beta|$  の下で  $|\beta|$  の最大値は等号が成立するときである. 二根の積が正で, かつ絶対値が等しいのは  $\alpha, \beta$  が等根か共役複素根のいずれかであるので

第1表

$A$	$A=[1, -6, 8]$	$A=[8, -6, 1]$	$A=\left[-1, \frac{3}{2}, 1\right]$
1	-3.659 1 61 004( 5)	9.999 9 99 993(-1)	1.000 0 00 001( 0)
2	-2.744 3 68 254( 5)	9.999 9 99 982(-1)	9.999 9 99 991(-1)
3	-1.600 8 77 315( 5)	9.999 9 99 962(-1)	1.000 0 00 001( 0)
4	-8.576 0 82 047( 4)	9.999 9 99 920(-1)	9.999 9 99 996(-1)
5	-4.430 9 27 393( 4)	9.999 9 99 836(-1)	9.999 9 99 997(-1)
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
24	9.127 5 85 696(-1)	9.911 9 60 200(-1)	1.000 0 00 000( 0)
25	9.563 7 92 835(-1)	9.823 9 20 399(-1)	1.000 0 00 000( 0)
26	9.781 8 96 413(-1)	9.647 8 40 802(-1)	1.000 0 00 000( 0)
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
46	9.999 9 99 802(-1)	-3.577 1 61 391( 4)	1.000 0 00 000( 0)
47	9.999 9 99 9 06(-1)	-6.923 6 31 722( 4)	1.000 0 00 000( 0)
48	9.999 9 99 9 58(-1)	-1.292 4 19 921( 5)	1.000 0 00 000( 0)
49	9.999 9 99 9 84(-1)	-2.215 5 84 150( 5)	1.000 0 00 000( 0)
50	9.999 9 99 9 97(-1)	-2.954 1 15 533( 5)	1.000 0 00 000( 0)

$$b^2 - 4ac = d^2 - 6ad - 3a^2 \leq 0.$$

上の条件の下で  $|\beta|$  の最大値

$$\max |\beta| = \max \sqrt{|c/a|}$$

を求めればよい.

ゆえに

$$d = (3 + 2\sqrt{3})a$$

$$|\beta| = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} \approx 3.73$$

となり  $|\beta|$  の最大値は  $a$  に無関係である.

もし  $n=50$ ,  $a=3$  とすれば

$$d = 9 + 6\sqrt{3} \approx 19.39$$

$$|\beta|^n = 3.73^{50} \approx 3.8 \times 10^{28}$$

となる.

文献6)には  $n=50$ ,  $a=3$  として  $d$  をいろいろ変えた豊富な実験例がある. これによると  $d=19$  のとき解  $x_1$  が最大の誤差を示している. 誤差の程度は仮数部9桁の計算機で約  $10^{18}$  であるから丸め誤差は大略  $10^{9+18} = 10^{27}$  倍拡大されたことになり, 先の推論と大体一致する.

**例題 3.**  $A = [-p, 1+2p, -p]$ ,  $p > 0$

この三項行列は放物型偏微分方程式を差分で近似して Crank-Nicolson の公式を用いて解くときに現われる. ここで  $p$  は格子点のとり方によってきまる定数であるが, Crank-Nicolson の公式はすべての  $p$  について安定であることが知られている<sup>7)</sup>.

さて前述した安定性の判別によれば

$$|a+c| = 2p, \quad |b| = 1+2p$$

であるから正数  $p$  に関係なく  $|a+c| < |b|$  が成り立ち常に安定であることがわかる.

また安定ならば  $\|A\| \|A^{-1}\| < \infty$  と前に述べたが, このことを  $P$ -condition を用いて確かめよう.

$A$  の固有値  $\lambda_i$  は

$$\lambda_i = 1 + 2p \left( 1 - \cos \frac{i}{n+1} \pi \right)$$

となる. また  $A$  は対称行列であるので行列のノルムは  $\|A\| = \max_i |\lambda_i|$  で定義する.

しからば

$$P = \frac{\max_i \left\{ 1 + 2p \left( 1 - \cos \frac{i}{n+1} \pi \right) \right\}}{\min_i \left\{ 1 + 2p \left( 1 - \cos \frac{i}{n+1} \pi \right) \right\}} < 1 + 4p$$

となりすべての  $n$  に対し  $P$ -condition は確かに有界である.

### おわりに

五項行列または一般の帯状行列は三項行列程頻繁に現われないが, 五項行列の逆行列や五項方程式の安定性などについても, 本稿で述べた基本的考え方は適用できるであろう. また微分方程式を差分で近似し implicit な方法で解くとき数値解の安定性判別についても前述した判定法は役立つと考えられる. これらの問題についてはあらためて検討したい.

最後に, いろいろ御教示いただいた城 憲三教授に心から御礼申上げる.

### 参考文献

- 1) 永坂秀子: ある種の三項方程式における誤差伝播, 情報処理 5, 1964, pp. 195~202.
- 2) D.J. Evans and C.V.D. Forrington: Note on the solution of certain tri-diagonal systems of linear equations, Comput. J. 5, 1963, pp. 327~328.
- 3) 牧之内三郎, 鳥居達生: 連立一次方程式の ill-condition の判定について, 情報処理学会講演予稿集, 昭 38, pp. 75~76.
- 4) D.K. Faddeev and V.N. Faddeeva: Computational methods of linear algebra, Freeman, 1963.
- 5) D.H. Lehmer: A machine method for solving polynomial equations, J.ACM 8, 1961, pp. 151~162.
- 6) 清野 武, 西原 宏: 連立一次方程式の多段階消去法に関する実験, 情報処理学会講演予稿集, 昭 38, pp. 77~78.
- 7) A.R. Mitchell and R.P. Pearce: High accuracy difference formulae for the numerical solution of the heat conduction equations, Comput. J. 5, 1962, pp. 142~146.

(昭和40年2月26日受付)