

Hermite-Gauss の数値積分公式の分点と重率の決定*

山下真一郎** 佐竹誠也***

Gauss 型の積分公式 $\int_a^b w(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)$ において、 $a=-\infty, b=\infty, w(x)=e^{-x^2}$ としたものは、Hermite-Gauss の積分公式とよばれる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) + E$$

の分点 x_k は、 n 次の Hermite 多項式 $H_n(x)$ の 0 点であり、重率 W_k 、誤差 E は、それぞれ、

$$W_k = \frac{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{(H_{n+1}(x_k))^2}$$

$$E = \frac{n! \sqrt{\pi} f^{(2n)}(\xi)}{2^n (2n)!}, \quad |\xi| < \infty$$

である。

Hermite 多項式 $H_n(x)$ の 0 点の計算は Newton 法によって行なう。このときの初期値のとり方は、次のようにする。まず、 n の大きいときの漸近式、

$$H_{2n}(x) \approx (-1)^n (2n-1)!! e^{x^2/2} \times \left(\cos(\sqrt{4n+1} \cdot x) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right)$$

$$H_{2n+1}(x) \approx (-1)^n 2^{n+1/2} (2n-1)!! \sqrt{2n+1} e^{x^2/2} \times \left(\sin(\sqrt{4n+3} \cdot x) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right)$$

ここで、 $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\dots 5 \cdot 3 \cdot 1$ から、おのおの、

$$x_k = \frac{1}{\sqrt{4n+1}}, \frac{2k-1}{2} \cdot \pi \quad k=1, 2, \dots$$

$$x_k = \frac{1}{\sqrt{4n+3}} \cdot \pi \cdot k \quad k=1, 2, \dots$$

である。これは k が大きくなるとよくないので、 $k=1, 2, 3$ についてのみ用いて、 $k \geq 4$ のときは

$$x_k = 3x_{k-1} - 3x_{k-2} + x_{k-3} \\ k=4, 5, \dots, n$$

を使う。この式は、 x を k の関数とみなしたときの等間隔分点に対する 3 点の Lagrange 補間から導びいたものである。 k を増すにつれて新しく得られる x_k

をつぎつぎに利用して、補間の点数をふやせば、さらによりよい値が得られそうであるが、 x_k は、ほぼ k の一次式になっているので、この場合には、むしろ 2 点の補間でもよく、むやみに点数を増すことは得策でない。

関数値の計算には、漸化式

$$H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x$$

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

を用いる。また、 $H_n'(x)$ の値は、

$$H_n'(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$$

から求めればよい。

この計算は、FACOM-231 によって行なった。プログラムの大部分は印刷用のルーチンである。

計算結果のチェックには、 $\sum_{k=1}^n W_k = \sqrt{\pi}$ の関係を用い、また、サンプリング調査として、 x_k の末尾を変化させたときの $H_n(x)$ の符号変化を調べた。いずれも結果は満足すべきものである。結果の表の中で () の中には 10 の指数を表わす。たとえば、 $N=3, i=3$ のときの $W_i = 2.954 \dots 38901 (-1)$ は $W_i = 2.954 \dots 38901 \times 10^{-1}$ の意味である。

```
begin comment reallength:=45, integerlength:
:=5;
```

```
integer n, c, k, i, K;
```

```
real x, dx, fo, fl, t, W, N, SQPI;
```

```
Boolean B, Q;
```

```
procedure crlf;
```

```
begin CRLF; c := c+1; end;
```

```
procedure PRintx (I, J);
```

```
value I, J; integer I, J;
```

```
begin integer i, j;
```

```
i := 10 ↑ J; j := I := I - (I div i) * i;
```

```
for i := 0, i+1 while j ≠ 0 do j := j div 10;
```

```
if I > 0 then Space (J-i+1)
```

```
else begin Space (J-i); Printstring
```

```
(' ') end;
```

```
Printx (I, i);
```

```
end of PRintx;
```

* Computation of the Abscissas and Weight Coefficients for the Hermite-Gaussian Quadrature Formulae by Shin-ichiro Yamashita (FACOM Computing and Data Processing Center), and Seiya Satake (Musashi Institute for Technology)

** ファコム株式会社

*** 武蔵工業大学

```

procedure PPrint (x, K);
  value x,K; real x; integer K;
begin
procedure PPrint (A) Integralpart: (U) Decimal-
  part: (K);
  value A,U,K; real A; integer U,K;
begin integer I, J, N; U:=U+1;
  J:=N:=if A>=0.0 then entier(A) else
  entier(A)+1;
  for I:=0, I+1 while J≠0 do J:=J div 10;
if I<U then
  begin if A>=0.0 then Space (U-I)else
  begin Space (U-I-1); Printstring ('-')
  end; Printx(N,I) end else Printx(N,U);
  Printstring ('. ');
for J:=1 step 1 until K do
  begin A:=(A-N) *100000.0; N:=entier(A);
  Printx(N, 5); Space(1) end
end of PPrint;

real a; integer i;
a:=abs(x);i:=0;
LL: if a=0.0 then i:=-51 else
if a>10.0 then begin i:=i+1; a:=0.1*a; go
to LL end
else MM: if a<1.0 then begin i:=i-1; a:=
10.0*a; go to MM end;
if x<0.0 then a:=-a;
  PPrint(a, I, K); Printstring (' '); Printx(i,2);
  Printstring(' ');
end of PPrint;

SQPI:=sqrt (3.1415926535897932384626433832795
028841971693993751);
Readinteger(n); c:=0;N:=4.0;
for k:=n-1 step -1 until 2 do N:=N*k*2.0;
for n:=n step 1 until 100 do
begin K:=(n+1) div 2; Q:=K*2 ÷n; N:=N
*n*2.0;
begin array XX, WW [1:K];

Printstring(' i N='); Printx(n, 2);
Space(7);
Printstring('Abscissas (Xi)'); Space (31);
Printstring('Weights (Wi)'); crlf; crlf;
for k:=1 step 1 until k do
begin if k<4 then
begin if Q then x:=3.14159 * (k-1)/sqrt(n+n
+1.0)
else x:=3.14159 * (k-0.5)/sqrt(n+n
+1.0)
end else x:=3.0 * (XX[k-1]+XX[k
-2])+XX[k-3];
B:=true;
L: f0:=1.0; f1:=x+x;
for i:=1 step 1 until n do
begin t:=2.0 * (x*f1-i*f0);
f0:=f1; f1:=t;
end;
dx:=f0/(2.0*x*f0-f1); x:=x-dx;
if abs(dx)>10-30 then go to L else
if B then begin B:=false; go to L end;

if Q then
begin if K=1 then Space(3) else
Printx (K+1-k, 2); Printx(K-1+k, 2)
end
else begin Printx(K+1-k, 2);
Printx(K+k, 2) end;

Space(1); PPrint(x, 6); Space(1);
XX[k]:=x; WW[k]:=W :=N * SQPI/f1/f1;
Print(W, 6); crlf;
end k;
end;
crlf; crlf; crlf;
if c+n>50 then begin c:=0; LFEED; LFEED
end;
end n;
end of program;

Data n=2;

```

Calculated and Printed Results by FACOM-231

1	N = 2	Abcissas (X1)	Weights (W1)
1	2	7.07106 78118 65475 24100 84436 21048 (-1)	8.86226 52945 27590 13649 08374 16705 (-1)
1	N = 3	Abcissas (X1)	Weights (W1)
1	2	0.00000 00000 00000 00000 00000 00000 (-51)	1.81163 82506 03677 37653 21116 35560 (-0)
1	3	1.26744 40715 37599 04903 80428 37332 (0)	2.95808 97521 09159 37883 02151 36981 (-0)
1	N = 4	Abcissas (X1)	Weights (W1)
1	2	5.24647 63227 52953 17884 60625 38347 (-1)	8.04914 65000 55188 36506 04918 44806 (-2)
1	3	1.65668 01238 87684 57560 33411 11120 (0)	8.13128 35047 24517 74430 34557 19988 (-2)
1	N = 5	Abcissas (X1)	Weights (W1)
1	2	0.00000 00000 00000 00000 00000 00000 (-51)	4.45038 72048 20418 81825 68032 44486 (-1)
1	3	0.9372 66461 38185 07118 77059 38929 (0)	3.93619 12315 22411 59868 19562 28340 (-1)
1	4	2.08218 28704 56085 61592 87940 88174 (0)	1.99532 62659 04591 32077 43458 59417 (-2)
1	N = 6	Abcissas (X1)	Weights (W1)
1	2	4.36077 11102 74165 08679 21504 80506 (-1)	7.24699 49282 13095 04091 01170 52076 (-1)
1	3	1.33544 30740 13492 04071 28052 80970 (0)	1.57067 30332 28566 41916 31136 35045 (-1)
1	4	2.35060 49736 74492 22283 39219 87060 (0)	4.53000 59035 08645 64085 74725 64627 (-1)
1	N = 7	Abcissas (X1)	Weights (W1)
1	2	0.0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 (-51)	4.18264 51257 68074 26564 87564 38123 (-1)
1	3	0.2807 16897 67471 44503 18013 98303 (0)	5.45155 82619 12703 05021 78560 84169 (-1)
1	4	1.67556 13568 32823 49244 70820 06516 (0)	9.71761 24509 95191 54149 42422 59386 (-1)
1	N = 8	Abcissas (X1)	Weights (W1)
1	2	3.81186 09020 72281 16898 71898 48516 (-1)	6.61147 19255 80418 01030 41507 44099 (-1)
1	3	1.17119 37120 42760 19472 07657 70063 (0)	2.07802 12561 08918 70583 25262 08597 (-1)
1	4	1.94165 61566 95842 22565 46304 39769 (0)	1.70779 83007 41317 54562 03095 43644 (-2)
1	5	2.95863 74208 57244 01922 35027 05243 (0)	1.99604 07221 13676 19206 09045 25440 (-2)
1	N = 9	Abcissas (X1)	Weights (W1)
1	2	0.0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 (-51)	7.20235 21560 60909 57124 33472 33904 (-1)
1	3	7.23551 10375 28375 73362 43984 45704 (-1)	4.32651 55900 25557 50199 81211 20560 (-1)
1	4	1.46855 34894 6667 83166 70157 39243 (0)	8.38745 27594 37657 38879 75111 74758 (-2)
1	5	2.26558 05845 11883 11180 20797 39336 (0)	3.90486 71723 26536 13045 86228 60253 (-2)
1	6	1.93999 32011 01327 60725 70477 95386 (0)	3.90486 71723 26536 13045 86228 60253 (-2)
1	N = 10	Abcissas (X1)	Weights (W1)
1	2	3.42901 32722 37046 08789 16502 25572 (-1)	6.10862 93373 53257 92783 56409 04134 (-1)
1	3	1.03661 08597 85413 65417 74919 16756 (0)	2.40136 51108 03116 86416 26359 29048 (-1)
1	4	1.53273 10762 32789 70240 89607 07754 (0)	1.34354 57467 81232 62820 15625 85045 (-1)
1	5	3.43615 91188 37737 60332 67254 94314 (0)	7.64043 26558 32620 62045 93678 59595 (-1)
1	N = 11	Abcissas (X1)	Weights (W1)
1	2	0.0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 (-51)	4.44765 85641 15547 78903 04655 76061 (-1)
1	3	0.36655 70844 94932 85594 97547 35582 (0)	6.29156 75291 47540 28403 07752 90281 (-1)
1	4	2.05294 40159 29755 33516 59126 31212 (0)	1.17227 47516 77685 03381 78864 93081 (-1)
1	5	2.76329 00997 81651 77083 67187 01816 (0)	1.19113 95444 01153 24503 87420 29198 (-2)
1	6	3.66817 08625 59582 51845 85714 68531 (0)	3.46819 46632 31956 10083 43770 25011 (-2)
1	7	1.66817 08625 59582 51845 85714 68531 (0)	1.43926 09357 14258 22093 08326 60319 (-2)

1	N = 12	Abcissas (X1)	Weights (W1)
6	7	3.44890 37628 07591 14786 61463 10353 10353 (-1)	2.70128 25686 41795 70347 13493 27948 (-1)
7	8	1.47478 26352 10521 20524 70427 70424 (-1)	2.03227 36968 10634 17762 73260 99790 (-1)
8	9	1.59768 26351 23604 70670 26287 70424 (-1)	2.03227 36968 10634 17762 73260 99790 (-1)
9	10	2.27950 70805 01059 90018 77285 69424 (0)	3.90539 08846 90861 43843 26195 (-2)
10	11	3.08053 70951 20869 77171 07993 75176 (0)	2.57368 79435 87698 15456 90632 31532 (-2)
11	12	3.88972 48978 09781 91527 19427 47244 (0)	2.63955 16843 36361 60602 31400 08780 (-2)
1	N = 13	Abcissas (X1)	Weights (W1)
7	8	0.00000 00000 00000 00000 00000 00000 (-51)	6.04393 18792 11616 42342 09006 83765 (-1)
8	9	0.05763 87917 10501 13280 53710 66917 (0)	4.21616 22689 65432 21746 89355 86579 (-1)
9	10	1.28005 50385 90748 16828 24624 83174 (0)	2.03227 36968 10634 17762 73260 99790 (-1)
10	11	2.51973 52946 02217 88343 04091 46682 (0)	1.20745 99227 19365 44720 90489 26236 (-1)
11	12	3.24660 60763 12619 98812 20511 42361 (0)	2.04303 60402 70707 11848 66943 29367 (-1)
12	13	4.10133 75261 78539 84117 83150 00071 (0)	4.82573 19500 73131 08834 99733 23422 (-1)
1	N = 14	Abcissas (X1)	Weights (W1)
7	8	2.91745 51067 95900 70446 11307 57983 (-1)	5.36405 90971 20901 40704 56189 67755 (-1)
8	9	1.76713 70732 93994 16114 67931 18637 (-1)	2.71105 60946 62666 20326 56198 70556 (-1)
9	10	4.47688 27311 11140 87058 35665 44095 (0)	6.85055 34223 46280 53587 16331 23670 (-2)
10	11	2.78419 32840 51448 54622 43267 24148 (0)	3.59082 61394 19284 10483 64407 46002 (-2)
11	12	3.46265 69336 02270 52020 89172 61150 (0)	4.71648 44550 18516 74887 68805 01092 (-2)
12	13	4.30444 85704 75631 81262 12261 00368 (0)	8.68859 11681 25157 94532 04178 34889 (-2)
1	N = 15	Abcissas (X1)	Weights (W1)
8	9	0.00000 00000 00000 00000 00000 00000 (-51)	5.64100 30870 64172 30852 68970 73298 (-1)
9	10	1.13611 53452 57357 44526 02033 21581 (-1)	1.12028 69746 88442 70325 86107 85938 (-1)
10	11	1.71999 25753 86888 92821 93315 25152 (0)	1.52088 91579 93575 48883 83938 49599 (-1)
11	12	2.38273 26651 79557 48428 84247 41045 (0)	3.07900 33872 54608 22266 84415 87578 (-2)
12	13	3.76095 05138 03548 53472 33820 33175 (0)	2.78906 04829 36728 09027 86074 61762 (-2)
13	14	4.49999 07072 09391 55366 43265 30534 (0)	1.05911 52477 11066 63577 52079 10350 (-2)
14	15	5.60900 00000 00000 00000 00000 00000 (-51)	1.52247 52442 53517 22016 06246 69648 (-2)
1	N = 16	Abcissas (X1)	Weights (W1)
8	9	2.73481 04613 81524 52158 28040 19650 (-1)	5.07929 47901 66137 41913 51734 17905 (-1)
9	10	8.29251 44914 46458 92592 45449 67339 (-1)	2.86417 42562 55336 75369 46333 53796 (-1)
10	11	1.00000 79040 16983 97743 95267 10559 (0)	0.28803 11395 80932 64034 20730 93011 (-2)
11	12	2.54660 21576 74781 34215 95267 05445 (0)	3.32284 00662 17805 89914 27730 28335 (-2)
12	13	3.17699 01619 77956 06681 39945 29263 (0)	2.71186 03925 37881 51801 89143 22835 (-2)
13	14	4.68675 69393 05216 36868 64960 46743 (0)	2.20998 09448 65810 85738 78942 31848 (-2)
14	15	5.60900 00000 00000 00000 00000 00000 (-51)	2.09480 74740 11102 84170 86236 69502 (-2)
1	N = 17	Abcissas (X1)	Weights (W1)
8	9	0.00000 00000 00000 00000 00000 00000 (-51)	2.30917 93762 48635 80331 88310 33787 (-1)
9	10	5.31633 00134 26247 31319 08655 37176 (0)	4.01886 46947 04110 56777 63508 26770 (-1)
10	11	1.00000 81142 21931 33311 28267 34156 (0)	1.06990 34189 79420 26204 06487 76437 (-2)
11	12	2.17950 28266 66620 81927 53790 11887 (0)	5.06734 92576 27537 41170 06449 28787 (-2)
12	13	3.77693 29911 31904 08398 32706 26990 (0)	2.96643 26669 77530 41151 33664 30594 (-2)
13	14	4.67144 51432 74743 28834 62762 26262 (0)	7.11228 94800 21309 39533 32737 97444 (-2)
14	15	5.04836 40688 74166 76837 20375 78853 (-1)	4.83495 69472 24555 28876 44092 21109 (-2)
15	16	7.00282 75651 90827 52928 11609 87105 (-1)	6.73017 47644 31745 03326 57703 14556 (-2)
16	17	8.29251 44914 46458 92592 45449 67339 (-1)	1.82400 44397 44465 02910 31522 19729 (-2)
17	18	1.83555 16842 61658 82625 35362 40396 (0)	1.88926 23002 68417 60438 17532 54526 (-3)
18	19	2.36659 94991 66806 00056 49390 44239 (0)	2.46170 72828 33066 07077 92949 97283 (-2)
19	20	3.24660 60763 12619 98812 20511 42361 (0)	1.84242 48879 40003 26949 70289 29113 (-2)
20	21	4.24811 76873 88126 44302 34021 60082 (0)	1.04672 07958 70268 28443 59960 88150 (-2)
21	22	5.04836 40688 74166 76837 20375 78853 (-1)	7.82819 07721 15891 20285 14747 10119 (-2)

1	N = 12	Abcissas (X1)	Weights (W1)
6	7	3.44890 37628 07591 14786 61463 10353 10353 (-1)	2.70128 25686 41795 70347 13493 27948 (-1)
7	8	1.47478 26352 10521 20524 70427 70424 (-1)	2.03227 36968 10634 17762 73260 99790 (-1)
8	9	1.59768 26351 23604 70670 26287 70424 (-1)	2.03227 36968 10634 17762 73260 99790 (-1)
9	10	2.27950 70805 01059 90018 77285 69424 (0)	3.90539 08846 90861 43843 26195 (-2)
10	11	3.08053 70951 20869 77171 07993 75176 (0)	2.57368 79435 87698 15456 90632 31532 (-2)
11	12	3.88972 48978 09781 91527 19427 47244 (0)	2.63955 16843 36361 60602 31400 08780 (-2)
1	N = 13	Abcissas (X1)	Weights (W1)
7	8	0.00000 00000 00000 00000 00000 00000 (-51)	6.04393 18792 11616 42342 09006 83765 (-1)
8	9	0.05763 87917 10501 13280 53710 66917 (0)	4.21616 22689 65432 21746 89355 86579 (-1)
9	10	1.28005 50385 90748 16828 24624 83174 (0)	2.03227 36968 10634 17762 73260 99790 (-1)
10	11	2.51973 52946 02217 88343 04091 46682 (0)	1.20745 99227 19365 44720 90489 26236 (-1)
11	12	3.24660 60763 12619 98812 20511 42361 (0)	2.04303 60402 70707 11848 66943 29367 (-1)
12	13	4.10133 75261 78539 84117 83150 00071 (0)	4.82573 19500 73131 08834 99733 23422 (-1)
1	N = 14	Abcissas (X1)	Weights (W1)
7	8	2.91745 51067 95900 70446 11307 57983 (-1)	5.36405 90971 20901 40704 56189 67755 (-1)
8	9	1.76713 70732 93994 16114 67931 18637 (-1)	2.71105 60946 62666 20326 56198 70556 (-1)
9	10	4.47688 27311 11140 87058 35665 44095 (0)	6.85055 34223 46280 53587 16331 23670 (-2)
10	11	2.78419 32840 51448 54622 43267 24148 (0)	3.59082 61394 19284 10483 64407 46002 (-2)
11	12	3.46265 69336 02270 52020 89172 61150 (0)	4.71648 44550 18516 74887 68805 01092 (-2)
12	13	4.30444 85704 75631 81262 12261 00368 (0)	8.68859 11681 25157 94532 04178 34889 (-2)
1	N = 15	Abcissas (X1)	Weights (W1)
8	9	0.00000 00000 00000 00000 00000 00000 (-51)	5.64100 30870 64172 30852 68970 73298 (-1)
9	10	1.13611 53452 57357 44526 02033 21581 (-1)	1.12028 69746 88442 70325 86107 85938 (-1)
10	11	1.71999 25753 86888 92821 93315 25152 (0)	1.52088 91579 93575 4

i	N = 24	Abcissas (xi)	Weights (wi)
1	12	2.26114	54717
2	13	4.26931	16396
3	14	6.26779	33574
4	15	8.26750	50752
5	16	10.26835	67930
6	17	12.27042	85108
7	18	14.27369	102286
8	19	16.31816	119464
9	20	18.37383	136642
10	21	20.44070	153820
11	22	22.51877	171000
12	23	24.60804	188180
13	24	26.70851	205360

i	N = 25	Abcissas (xi)	Weights (wi)
1	12	0.00000	0.00000
2	13	0.00000	0.00000
3	14	0.00000	0.00000
4	15	0.00000	0.00000
5	16	0.00000	0.00000
6	17	0.00000	0.00000
7	18	0.00000	0.00000
8	19	0.00000	0.00000
9	20	0.00000	0.00000
10	21	0.00000	0.00000
11	22	0.00000	0.00000
12	23	0.00000	0.00000
13	24	0.00000	0.00000
14	25	0.00000	0.00000

i	N = 26	Abcissas (xi)	Weights (wi)
1	13	2.15777	85624
2	14	4.15777	17124
3	15	6.15777	25688
4	16	8.15777	34252
5	17	10.15777	42816
6	18	12.15777	51380
7	19	14.15777	59944
8	20	16.15777	68508
9	21	18.15777	77072
10	22	20.15777	85636
11	23	22.15777	94200
12	24	24.15777	102764
13	25	26.15777	111328
14	26	28.15777	119892

i	N = 27	Abcissas (xi)	Weights (wi)
1	14	0.00000	0.00000
2	15	0.00000	0.00000
3	16	0.00000	0.00000
4	17	0.00000	0.00000
5	18	0.00000	0.00000
6	19	0.00000	0.00000
7	20	0.00000	0.00000
8	21	0.00000	0.00000
9	22	0.00000	0.00000
10	23	0.00000	0.00000
11	24	0.00000	0.00000
12	25	0.00000	0.00000
13	26	0.00000	0.00000
14	27	0.00000	0.00000

i	N = 19	Abcissas (xi)	Weights (wi)
1	10	0.00000	0.00000
2	11	0.00000	0.00000
3	12	0.00000	0.00000
4	13	0.00000	0.00000
5	14	0.00000	0.00000
6	15	0.00000	0.00000
7	16	0.00000	0.00000
8	17	0.00000	0.00000
9	18	0.00000	0.00000
10	19	0.00000	0.00000

i	N = 20	Abcissas (xi)	Weights (wi)
1	10	11.26243	66960
2	11	22.52486	13392
3	12	33.78729	20088
4	13	45.04972	26784
5	14	56.31215	33480
6	15	67.57458	40176
7	16	78.83701	46872
8	17	90.09944	53568
9	18	101.36187	60264
10	19	112.62430	66960

i	N = 21	Abcissas (xi)	Weights (wi)
1	10	0.00000	0.00000
2	11	0.00000	0.00000
3	12	0.00000	0.00000
4	13	0.00000	0.00000
5	14	0.00000	0.00000
6	15	0.00000	0.00000
7	16	0.00000	0.00000
8	17	0.00000	0.00000
9	18	0.00000	0.00000
10	19	0.00000	0.00000
11	20	0.00000	0.00000
12	21	0.00000	0.00000

i	N = 22	Abcissas (xi)	Weights (wi)
1	11	2.31179	13993
2	12	4.31179	27986
3	13	6.31179	41979
4	14	8.31179	55972
5	15	10.31179	69965
6	16	12.31179	83958
7	17	14.31179	97951
8	18	16.31179	111944
9	19	18.31179	125937
10	20	20.31179	139930
11	21	22.31179	153923
12	22	24.31179	167916

i	N = 23	Abcissas (xi)	Weights (wi)
1	12	0.00000	0.00000
2	13	0.00000	0.00000
3	14	0.00000	0.00000
4	15	0.00000	0.00000
5	16	0.00000	0.00000
6	17	0.00000	0.00000
7	18	0.00000	0.00000
8	19	0.00000	0.00000
9	20	0.00000	0.00000
10	21	0.00000	0.00000
11	22	0.00000	0.00000
12	23	0.00000	0.00000

i	N = 19	Abcissas (xi)	Weights (wi)
1	10	0.00000	0.00000
2	11	0.00000	0.00000
3	12	0.00000	0.00000
4	13	0.00000	0.00000
5	14	0.00000	0.00000
6	15	0.00000	0.00000
7	16	0.00000	0.00000
8	17	0.00000	0.00000
9	18	0.00000	0.00000
10	19	0.00000	0.00000

i	N = 20	Abcissas (xi)	Weights (wi)
1	10	11.26243	66960
2	11	22.52486	13392
3	12	33.78729	20088
4	13	45.04972	26784
5	14	56.31215	33480
6	15	67.57458	40176
7	16	78.83701	46872
8	17	90.09944	53568
9	18	101.36187	60264
10	19	112.62430	66960

i	N = 21	Abcissas (xi)	Weights (wi)
1	10	0.00000	0.00000
2	11	0.00000	0.00000
3	12	0.00000	0.00000
4	13	0.00000	0.00000
5	14	0.00000	0.00000
6	15	0.00000	0.00000
7	16	0.00000	0.00000
8	17	0.00000	0.00000
9	18	0.00000	0.00000
10	19	0.00000	0.00000
11	20	0.00000	0.00000
12	21	0.00000	0.00000

i	N = 22	Abcissas (xi)	Weights (wi)
1	11	2.31179	13993
2	12	4.31179	27986
3	13	6.31179	41979
4	14	8.31179	55972
5	15	10.31179	69965
6	16	12.31179	83958
7	17	14.31179	97951
8	18	16.31179	111944
9	19	18.31179	125937
10	20	20.31179	139930
11	21	22.31179	153923
12	22	24.31179	167916

i	N = 23	Abcissas (xi)	Weights (wi)
1	12	0.00000	0.00000
2	13	0.00000	0.00000
3	14	0.00000	0.00000
4	15	0.00000	0.00000
5	16	0.00000	0.00000
6	17	0.00000	0.00000
7	18	0.00000	0.00000
8	19	0.00000	0.00000
9	20	0.00000	0.00000
10	21	0.00000	0.00000
11	22	0.00000	0.00000
12	23	0.00000	0.00000

	N = 28	Abcissas (X1)	Weights (W1)
1	2.08657	3896	07368 69111 00435
13 15	2.08936	7096	52768 59114 00435
13 16	2.09136	7196	52768 59114 00435
12 17	1.04153	52737	54208 27476 46498 47593
11 18	1.46533	78634	57009 18560 64783 21027
10 19	1.89236	88268	37685 34577 12759 44256
9 20	2.76778	48260	10111 02174 12061 34276
8 21	2.76778	53580	61195 54769 12034 32051
7 22	3.22111	20765	61195 54769 12034 32051
6 23	3.68913	42384	61679 49075 88123 36425
5 24	4.17663	67421	29268 35919 17028 76484
4 25	4.68398	57739	33117 96536 02721 34404
3 26	5.18570	16413	82890 60138 77423 30175
2 27	5.69160	54423	67742 54401 27652 15001

	N = 28	Abcissas (X1)	Weights (W1)
1	3.96604	71782	64514 45978 72314 83923
2	2.89561	39125	93887 35117 61663 37636
3	1.91164	60976	69249 30703 77913 14626
4	1.91164	65976	69249 30703 77913 14626
5	1.04684	23214	34243 87641 43216 61489
6	1.95733	12944	08989 61567 51291 21332
7	2.10611	10002	40323 30916 37303 07168
8	2.10611	10002	40323 30916 37303 07168
9	5.87727	91229	70484 25132 39530 08841
10	1.32543	24015	11707 61423 72418 52424
11	1.47585	31682	77688 61411 55128 12631
12	6.63943	67149	09663 63381 34111 30976
13	6.63943	67149	09663 63381 34111 30976
14	1.14013	93478	03076 10381 11730 06284

	N = 20	Abcissas (X1)	Weights (W1)
1	0.00000	00000	00000 00000 00000 00000
13 15	8.19498	68127	36768 30190 36997
13 16	8.19498	68127	36768 30190 36997
12 17	1.25221	57550	84772 93380 85922 64456
11 18	1.68662	29138	92315 11141 03474 85607
10 19	2.08118	19760	33127 74080 02174 96483
9 20	2.93548	25046	40126 63185 59432 00013
8 21	2.93548	25046	40126 63185 59432 00013
7 22	3.84664	51410	52214 07493 72574 79489
6 23	3.84664	51410	52214 07493 72574 79489
5 24	3.84664	67922	13620 08020 00234 67836
4 25	4.81136	36512	19124 39219 20460 72338
3 26	5.38964	05211	66751 65174 29420 61944
2 27	5.98269	12894	63620 21061 70388 61923
1 28	6.72826	15266	08844 96282 27509 01134

	N = 20	Abcissas (X1)	Weights (W1)
1	4.08971	17463	52098 63313 17650 48076
2	3.46418	93907	16701 88375 17650 48076
3	2.10742	69444	92106 21034 97347 23199
4	2.10742	69444	92106 21034 97347 23199
5	2.76386	55522	02565 84703 28930
6	5.84550	35456	71509 64775 83211 25628
7	4.07792	50611	02686 15989 18357 90836
8	4.89207	91542	21504 91587 94915 70790
9	1.74522	91598	40948 31287 90433 70790
10	3.82031	23276	03628 34293 27672 69840
11	3.48413	01613	08433 93644 70256 43281
12	1.43310	04144	04934 82846 19044 23661
13	1.43310	04144	04934 82846 19044 23661
14	1.82442	30521	67285 33634 94134 51710

	N = 30	Abcissas (X1)	Weights (W1)
1	2.01126	57681	89718 85945 76301 32436
13 15	6.03321	05862	55528 07728 15201
13 16	1.00831	82710	16723 46160 46596 04696
12 17	1.41552	76001	96188 51144 07251 09547
11 18	2.86314	11236	03688 03743 56804 83506
10 19	2.86314	11236	03688 03743 56804 83506
9 20	2.66713	21245	31657 20057 11084 64224
8 21	3.09997	08295	86241 70668 87333 24274
7 22	3.54444	38731	55348 86628 54089 02168
6 23	4.03305	65328	02228 31262 78760 13321
5 24	4.03305	65328	02228 31262 78760 13321
4 25	4.96891	85665	89244 04448 64071 06339
3 26	5.53344	71515	67494 72511 83335 59580
2 27	6.13827	92201	23934 68039 49983 74537
1 28	6.80334	56935	29861 58108 11083 57555

	N = 30	Abcissas (X1)	Weights (W1)
1	3.86394	88954	48138 62955 60184 91651
2	1.46730	67975	96126 67413 46321 12934
3	5.51441	76870	23429 11650 75404 81830
4	1.47038	29704	82668 35152 77355 77870
5	2.17192	24730	67658 46298 94256 89286
6	2.93872	42821	29227 61120 97432 31087
7	1.97909	18873	24710 26834 63879 40218
8	5.10852	24507	75946 27738 96380 44028
9	1.16738	42821	78288 20850 07774 24928
10	2.87866	70349	83706 08019 23079 61170
11	2.87866	70349	83706 08019 23079 61170
12	2.81033	36627	50903 70876 27749 15319
13	2.90825	47001	31226 22941 10274 73851

	N = 31	Abcissas (X1)	Weights (W1)
1	0.00000	00000	00000 00000 00000 00000
15 16	3.95942	73647	14231 10946 70041 66343
13 18	7.92876	97691	23086 39685 93032 96882
13 19	1.19182	69293	20046 42608 23125 64924
11 20	2.00225	85488	15232 96570 79529 42627
10 21	2.41231	77054	80420 10517 40184 52821
9 22	3.82168	04533	90205 45570 15640 15142
8 23	3.82168	04533	90205 45570 15640 15142
7 24	3.82032	97252	13240 81041 45401 20964
6 25	4.15648	17546	18148 12868 31429 31253
5 26	4.63155	95063	12859 04206 67997 65433
4 27	5.13359	57717	12360 70458 62963 91399
3 28	5.72792	47446	49268 32595 76927
2 29	6.32792	37446	49268 32595 76927
1 30	6.99568	01237	18940 27532 04521 47423

	N = 31	Abcissas (X1)	Weights (W1)
1	3.85178	85569	46095 46141 78381 06106
2	2.12132	76666	87647 79817 70423 73317
3	9.67179	48166	87045 33560 33667 88655
4	3.18472	30731	30033 27772 08273 23389
5	1.23568	33073	36888 26345 67800 30157
6	1.39280	30395	04704 33623 18327 92035
7	1.04966	02727	67560 63228 12377 92035
8	5.04371	85569	30799 74223 74567 16333
9	1.82949	20038	04621 61328 50128 29223
10	1.62037	32914	58146 58146 36489 26031
11	5.89955	64587	53872 99038 43158 93777
12	1.18660	90079	27156 40739 42264 11656
13	2.18946	93944	64205 02132 94412 69737