漸化式を用いる $I_\nu(x)$ の近似計算*

牧之内三郎**

まえがき

漸化式を用いる変形ベッセル関数 $I_\nu(x)$ の近似計算法についてはすでに知られている[1~5]. 本論文は，漸化式を用いて，$I_\nu(x)$ の近似値を所要の精度でなるべく速く計算する方法について述べるのが目的である．

いま $x>0$ とし，次数 ν を以下あらためて$(\nu+n)$で表わし，n は正整数，$0\leqq\nu<1$ とすれば，漸化式を用いる $I_{\nu+n}(x)$ の近似計算法はつぎのとおりである．

x および n が与えられたとき，適当に大きな正整数 $M>n$ を選び，

$$\left.\begin{array}{l} G_{\nu+M+1}(x)=0 \\ G_{\nu+M}(x)=a,\ a\text{は任意定数} \end{array}\right\} \qquad (1)$$

とおき，漸化式

$$G_{\nu+m-1}(x)=\frac{2(\nu+m)}{x}G_{\nu+m}(x)+G_{\nu+m+1}(x) \qquad (2)$$

$$m=M,\ M-1,\ \cdots\cdots,\ 1$$

を用いて $G_{\nu+n}(x)$ を求める．このとき

$$G_{\nu+n}(x)\approx\alpha_0\ I_{\nu+n}(x)$$

であるから，

$$I_{\nu+n}(x)\approx G_{\nu+n}(x)/\alpha_0 \qquad (3)$$

ただし，α_0 は正規化定数であって

$$2\left(\frac{2}{x}\right)^\nu\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+2\nu)}\sum_{m=0}^{L}\frac{(\nu+m)}{m\,!}\Gamma(2\nu+m)\left(e^{-x}G_{\nu+m}(x)\right)=\alpha_0 \qquad (4\cdot1)$$

とする．$L\leqq M$ は正整数である．とくに $\nu=0$ のとき，(4·1) は簡単になる．

$$e^{-x}\Big(G_0(x)+2\sum_{m=1}^{L}G_m(x)\Big)=2\sum_{m=0}^{L}{}'\left(e^{-x}G_m(x)\right)=\alpha_0 \qquad (4\cdot2)$$

さて，この計算法では M をどのような値に選ぶべきかが問題である．漸化式を用いて，ベッセル関数 $J_{\nu+n}(x)$ の近似計算を行なう場合と同様に，M が大きいほど $I_{\nu+n}(x)$ の計算値の精度はよくなる．しかし M が極度に大きい場合には，計算時間を浪費し，計算機がオーバフローすることさえある．

そこで，$J_{\nu+n}(x)$ の近似計算における場合と同じようにして[6]，$I_{\nu+n}(x)$ の近似値を p 桁正しく計算するために必要な，なるべく小さな M および L の値をできるだけ簡単に求める方法について述べる．そして，$p\leqq30$，$0.01\leqq x\leqq100$ に対する M および L の数値例を示す．(1)～(4) 式を用いて $I_{\nu+n}(x)$ の近似計算を行なう場合には，丸め誤差が大きくならない[5]．ここでは丸め誤差を省略して述べる．

1. M の最小値の近似値 M_E

正規化定数 α_0 が少なくとも p 桁正しくえられるような M の最小値の近似値 M_E (M_E: $M_{\text{Economical}}$ の意) をなるべく簡単に求める方法を述べる．M_E が定まると，(4·1)，(4·2) における L は

$$L=M_E \qquad (5)$$

とする．

$G_{\nu+M+1}(x)$ は第1種変形ベッセル関数と第2種変形ベッセル関数の線形結合として表わされる．

いま，$\overline{K}_{\nu+n}(x)=(-)^n\ K_{\nu+n}(x)$ とし，

$$G_{\nu+M+1}(x)=\alpha\ I_{\nu+M+1}(x)+\beta\,\overline{K}_{\nu+M+1}(x) \qquad (6)$$

とすれば，一般に

$$G_{\nu+n}(x)=\alpha\ I_{\nu+n}(x)+\beta\,\overline{K}_{\nu+n}(x) \qquad (7)$$

である．

さて，$I_{\nu+n}(x)\neq0$ として，

$$\varepsilon_{\nu+M,\nu+n}=\frac{I_{\nu+M+1}(x)}{I_{\nu+n}(x)}\cdot\frac{\overline{K}_{\nu+n}(x)}{\overline{K}_{\nu+M+1}(x)}=(-)^{M-n+1}\frac{I_{\nu+M+1}(x)}{I_{\nu+n}(x)}\cdot\frac{K_{\nu+n}(x)}{K_{\nu+M+1}(x)} \qquad (8)$$

とすれば，(1)，(6) および (7) から

$$\left[I_{\nu+n}(x)-\frac{G_{\nu+n}(x)}{\alpha}\right]\Big/I_{\nu+n}(x)=\varepsilon_{\nu+M,\nu+n} \qquad (9)$$

$M\to\infty$ のとき $\varepsilon_{\nu+M,\nu+n}\to0$ であり，この場合には

$$G_{\nu+n}(x)=\alpha\ I_{\nu+n}(x) \qquad (10)$$

が成立する．

加法定理

$$2\left(\frac{2}{x}\right)^\nu\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+2\nu)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\nu+m)}{m\,!}\Gamma(2\nu+m)\left(e^{-x}I_{\nu+m}(x)\right)=1$$

を用いて

* Note on the Recurrence Techniques for the Calculation of Bessel Functions $I_\nu(x)$, by Saburo Makinouchi (University of Osaka)

** 大阪大学工学部

$$2\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu}\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+2\nu)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\nu+m)}{m\,!}\Gamma(2\nu+m)$$
$$(\alpha\, e^{-x}\, I_{\nu+m}(x))=\alpha \tag{11}$$

がえられる．

α の近似値 α_0 の絶対誤差を

$$\varDelta\alpha=\alpha-\alpha_0$$

とすれば，(4·1) と (11) から

$$\varDelta\alpha=2\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu}\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+2\nu)}\sum_{m=0}^{M}\frac{(\nu+m)}{m\,!}$$
$$\Gamma(2\nu+m)e^{-x}(\alpha I_{\nu+m}(x)-G_{\nu+m}(x))$$
$$+2\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu}\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+2\nu)}\sum_{m=M+1}^{\infty}\frac{(\nu+m)}{m\,!}$$
$$\Gamma(2\nu+m)(\alpha\, e^{-x}\, I_{\nu+m}(x))$$

したがって，(8)，(9) および上式から

$$\frac{\varDelta\alpha}{\alpha}=2\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu}\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+2\nu)}\sum_{m=0}^{M}\frac{(\nu+m)}{m\,!}\Gamma(2\nu+m)e^{-x}$$
$$\frac{I_{\nu+M+1}(x)}{\bar{K}_{\nu+M+1}(x)}\bar{K}_{\nu+m}(x)+2\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu}\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+2\nu)}\sum_{m=M+1}^{\infty}$$
$$\frac{(\nu+m)}{m\,!}\Gamma(2\nu+m)(e^{-x}I_{\nu+m}(x)) \tag{12}$$

がえられる．(12) の右辺第1項および第2項をそれぞれ $\varDelta\alpha_1/\alpha$, $\varDelta\alpha_2/\alpha$ とすれば，

$$\frac{\varDelta\alpha_1}{\alpha}=2\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu}\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+2\nu)}\sum_{m=0}^{M}\frac{(\nu+m)}{m\,!}$$
$$\Gamma(2\nu+m)e^{-x}\frac{I_{\nu+M+1}(x)}{\bar{K}_{\nu+M+1}(x)}\bar{K}_{\nu+m}(x) \tag{13·1}$$

$$\frac{\varDelta\alpha_2}{\alpha}=2\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu}\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+2\nu)}\sum_{m=M+1}^{\infty}\frac{(\nu+m)}{m\,!}$$
$$\Gamma(2\nu+m)\ (e^{-x}\, I_{\nu+m}(x)) \tag{13·2}$$

$\varDelta\alpha_1/\alpha<0$, $\varDelta\alpha_2/\alpha>0$ で，かつ

$$|\varDelta\alpha_1/\alpha|<|\varDelta\alpha_2/\alpha|$$

である．したがって

$$\varDelta\alpha/\alpha>0$$

さて，$\mu\gg x$ のとき

$$\left.\begin{aligned}I_{\mu}(x)&\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}}\left(\frac{ex}{2\mu}\right)^{\mu}\\K_{\mu}(x)&\approx\sqrt{\frac{\pi}{2\mu}}\left(\frac{ex}{2\mu}\right)^{-\mu}\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

であり，正整数 m が十分大きく，$0<\nu<1$ であれば

$$\Gamma(\nu+m)\approx m^{\nu}\Gamma(m) \tag{15}$$

であるから，$M\gg x$ のとき，$\varDelta\alpha/\alpha$ は ν に関する単調増加関数であることがわかる．また，$M\gg x$ でない場合にも $\varDelta\alpha/\alpha$ は ν に関する単調増加関数である（例3参照）．すなわち，x および M を一定とすれば，$\nu\to1$ のとき $\varDelta\alpha/\alpha$ は最大である．

(13·1) において $\nu=1$ とすれば

$$\frac{\varDelta\alpha_1}{\alpha}=e^{-x}\frac{I_{M+2}(x)}{\bar{K}_{M+2}(x)}\sum_{m=0}^{M}(m+1)\frac{2(m+1)}{x}\bar{K}_{m+1}(x)$$
$$=e^{-x}\frac{I_{M+2}(x)}{\bar{K}_{M+2}(x)}\sum_{m=0}^{M}(m+1)(\bar{K}_m(x)-\bar{K}_{m+2}(x))$$
$$=e^{-x}\frac{I_{M+2}(x)}{\bar{K}_{M+2}(x)}[-(M+1)\bar{K}_{M+2}(x)-M\bar{K}_{M+1}(x)$$
$$+2\bar{K}_M(x)+\cdots\cdots+2\bar{K}_1(x)+\bar{K}_0(x)]$$

すなわち，

$$\frac{\varDelta\alpha_1}{\alpha}=e^{-x}\, I_{M+2}(x)\Big[-(M+1)+M\frac{K_{M+1}(x)}{K_{M+2}(x)}$$
$$+2\frac{K_M(x)}{K_{M+2}(x)}-\cdots\cdots\Big] \tag{16·1}$$

(13·2) において $\nu=1$ とすれば

$$\frac{\varDelta\alpha_2}{\alpha}=e^{-x}\sum_{m=M+1}^{\infty}(m+1)\ \frac{2(m+1)}{x}I_{m+1}(x)$$
$$=e^{-x}\sum_{m=M+1}^{\infty}(m+1)\ (I_m(x)-I_{m+2}(x))$$
$$=e^{-x}[(M+2)I_{M+1}(x)+(M+3)I_{M+2}(x)$$
$$+2I_{M+3}(x)+\cdots\cdots] \tag{16·2}$$

ところで，

$$I_{M+1}(x)>I_{M+2}(x)>I_{M+3}(x)>\cdots\cdots$$
$$K_{M+2}(x)>K_{M+1}(x)>K_M(x)>\cdots\cdots$$

であり，M は大きな値であるから，(16·1)，(16·2) を用いて

$$\frac{\varDelta\alpha}{\alpha}<e^{-x}[(M+2)I_{M+1}(x)+(M+3)I_{M+2}(x)] \tag{17}$$

がえられる．

そこで，必要な関数値 ($I_{M+1}(x)$ と $I_{M+2}(x)$) を3桁程度正しく計算して，

$$e^{-x}[(M+2)I_{M+1}(x)+(M+3)I_{M+2}(x)]$$
$$<0.25\times10^{-p} \tag{18}$$

を満足する M の最小値 $M_{\rm E}$ を求めると，ν の値いかんにかかわらず $M_{\rm E}$ は

$$\varDelta\alpha/\alpha<0.25\times10^{-p} \tag{19}$$

を満足する．そして，$M_{\rm E}$ は (19) を満足する M の最小値に等しいか僅かに大きい．p=9, 10, 18, 20 および 30 の場合について，$0.01\leqq x\leqq100$ に対してえられた $M_{\rm E}$ の例が**第1表**に示されている．$x\geqq50$ で p が比較的小さいとき，$M_{\rm E}<x$ となる場合がある．このようなことは $J_{\nu+n}(x)$ における場合にはない[6]．

なお，$\varDelta\alpha/\alpha$ の上界を 0.25×10^{-p} として $M_{\rm E}$ を定めたことについては次節で述べる．

2. $I_{\nu+n}(x)$ の近似値 $G_{\nu+n}(x)/\alpha_0$

$M\geqq M_{\rm E}$ のとき $\varDelta\alpha/\alpha<0.25\times10^{-p}$ であるから，$\varDelta\alpha/\alpha$ の2乗以上の項を省略すると

第1表　M_{E} と N_{E} の例（N_{E} については2節参照）

p \ x	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
9	3 (2)	4 (3)	4 (3)	4 (2)	5 (3)	5 (3)	5 (3)	5 (3)	5 (3)
10	4 (3)	4 (2)	5 (3)	5 (3)	5 (3)	5 (3)	5 (3)	6 (4)	6 (4)
18	6 (3)	7 (4)	8 (5)	8 (5)	8 (5)	9 (6)	9 (6)	9 (5)	9 (5)
20	7 (4)	8 (5)	8 (5)	9 (6)	9 (5)	9 (5)	10 (6)	10 (6)	10 (6)
30	10 (6)	11 (6)	12 (7)	12 (7)	13 (8)	13 (8)	14 (8)	14 (8)	14 (8)

p \ x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
9	5 (3)	6 (4)	7 (5)	8 (5)	8 (5)	9 (6)	9 (6)	9 (6)	10 (7)
10	6 (4)	7 (5)	8 (5)	8 (5)	9 (6)	9 (6)	10 (7)	10 (7)	10 (6)
18	10 (6)	11 (7)	12 (7)	13 (8)	14 (9)	14 (9)	15 (10)	15 (9)	16 (10)
20	10 (6)	12 (7)	13 (8)	14 (9)	15 (9)	15 (9)	16 (10)	17 (11)	17 (11)
30	15 (9)	17 (10)	18 (11)	19 (11)	20 (12)	21 (13)	22 (14)	23 (14)	23 (14)

〔例〕 $p=10$, $x=0.7$ のとき $M_{\mathrm{E}}=10$, $N_{\mathrm{E}}=7$

p \ x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	10 (7)	13 (9)	15 (10)	16 (11)	18 (13)	19 (13)	20 (14)	22 (16)	23 (16)
10	11 (7)	14 (10)	16 (14)	17 (11)	19 (13)	20 (14)	22 (16)	23 (16)	24 (17)
18	16 (10)	20 (13)	23 (15)	25 (16)	27 (18)	29 (19)	31 (21)	32 (21)	34 (23)
20	18 (12)	22 (14)	24 (15)	27 (18)	29 (19)	31 (21)	33 (22)	34 (23)	36 (24)
30	24 (15)	29 (18)	32 (20)	35 (22)	38 (25)	40 (26)	42 (27)	44 (29)	46 (30)

p \ x	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
9	24 (17)	32 (23)	39 (28)	44 (32)	49 (35)	54 (39)	58 (42)	62 (45)	66 (48)	69 (50)
10	25 (17)	34 (24)	41 (29)	47 (34)	52 (38)	57 (41)	61 (44)	65 (47)	69 (50)	73 (53)
18	35 (24)	47 (33)	56 (39)	63 (44)	70 (50)	76 (54)	82 (58)	87 (62)	92 (66)	97 (69)
20	38 (26)	50 (35)	59 (41)	67 (47)	74 (52)	80 (56)	86 (61)	92 (65)	97 (69)	102 (73)
30	48 (32)	63 (43)	74 (51)	84 (58)	92 (64)	100 (70)	107 (75)	113 (79)	120 (84)	126 (89)

〔例〕 $p=10$, $x=30$ のとき $M_{\mathrm{E}}=41$, $N_{\mathrm{E}}=29$

$$\frac{G_{\nu+n}(x)}{\alpha_0}=\frac{G_{\nu+n}(x)}{\alpha-\Delta\alpha}$$
$$\approx I_{\nu+n}(x)\,(1-\varepsilon_{\nu+M,\nu+n})\left(1+\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right)\qquad(20)$$

である．

与えられた p, x および M に対して

$$|\varepsilon_{\nu+M,\nu+n}|<0.25\times10^{-p}\qquad(21)$$

を満足する最大の次数 n を N とすれば，$n\leqq N$ のとき $(\Delta\alpha/\alpha)\,\varepsilon_{\nu+M,\nu+n}$ を省略することができる．(20) から，$I_{\nu+n}(x)$ の近似値 $G_{\nu+n}(x)/\alpha_0$ の絶対誤差は

$$\Delta_{\nu+n}=I_{\nu+n}(x)-\frac{G_{\nu+n}(x)}{\alpha_0}$$
$$\approx I_{\nu+n}(x)\left(\varepsilon_{\nu+M,\nu+n}-\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right)\qquad(22)$$

であるから，$G_{\nu+n}(x)/\alpha_0$ の相対誤差は

$$\delta_{\nu+n}=\Delta_{\nu+n}/I_{\nu+n}(x)$$
$$\approx\varepsilon_{\nu+M,\nu+n}-\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\qquad(23)$$

となり，

$$|\delta_{\nu+n}|\leqq|\varepsilon_{\nu+M,\nu+n}|+\left|\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right|\qquad(24)$$

と見なすことができる．

したがって，(19), (21) と (24) から

$n\leqq N$ のとき $|\delta_{\nu+n}|<0.5\times10^{-p}$

すなわち，$M\geqq M_{\mathrm{E}}$ を用いて $I_{\nu+n}(x)$ の近似計算を行なうと，$n\leqq N$ に対して近似値 $G_{\nu+n}(x)/\alpha_0$ は p 桁正しい．

(14), (15) を用いて，$|\varepsilon_{\nu+M,\nu+n}|$ は ν に関する単調減少関数であることがわかる．$|\varepsilon_{\nu+M,\nu+n}|\leqq|\varepsilon_{M,n}|$ であるから，$\nu\neq0$ の場合の N が $\nu=0$ の場合の N より小さくはない．与えられた p, x および M に対する N は，あらためて

$$|\varepsilon_{M,n}|<0.25\times10^{-p}\qquad(25)$$

すなわち

$$\frac{I_{M+1}(x)}{I_n(x)}\;\frac{K_n(x)}{K_{M+1}(x)}<0.25\times10^{-p}$$

を満足する n の最大値として定めることにする．

$M=M_{\mathrm{E}}$ のときの N を N_{E} として，第1表にその例をも示しておく．

$I_{\nu+n}(x)$ を p 桁正しく計算するための M の最小値，すなわち

$$|\delta_{\nu+n}|<0.5\times10^{-p}\qquad(26)$$

となるような M の最小値を $M_{\min}$ とする．$M_{\min}$ と M_{E} の関係について述べる．

一定の x, M に対して N を考えると，$n\ll N$ のとき，$|\varepsilon_{\nu+M,\nu+n}|\ll|\Delta\alpha/\alpha|$ であるから

$$|\delta_{\nu+n}|\approx|\Delta\alpha/\alpha|$$

したがって，(26) を満足する $M_{\min}$ は

$$\Delta\alpha/\alpha<0.5\times10^{-p}\qquad(27)$$

を満足している．しかし M_{E} は $\Delta\alpha/\alpha<0.5\times10^{-p}$ と

なるように定められたのであるから，M_E は $M_{\min}$ に十分近い値であって，$M_E \geqq M_{\min}$ である（例2参照）．

しかし，(27) を満足する $M_{\min}$ の近似値を求めると $|\delta_{\nu+n}| \leqq |\varepsilon_{\nu+M,\nu+n}| + |\Delta\alpha/\alpha|$ であるから，$|\delta_{\nu+n}| < 0.5 \times 10^{-p}$ となるような $|\varepsilon_{\nu+M,\nu+n}|$ の画一的な上界を，$\Delta\alpha/\alpha$ の値いかんにかかわらず設定することができない．すなわち，$I_{\nu+n}(x)$ の計算値が p 桁正しく求まる最高の次数 N を具体的には定め難い．

ここでは一例として，$\Delta\alpha/\alpha$ の上界を 0.25×10^{-p} として M_E を定め，$|\varepsilon_{M,n}|$ の上界も 0.25×10^{-p} として N_E を定めた．

第2表 $I_{\nu+n}(30)$ の近似計算例
ただし $\nu=99/100$ ($M=L=41$)

n	$G_{\nu+n}(30)/\alpha_0$	$\Delta_{\nu+n}$	$\delta_{\nu+n}$
41	2.8152 99388 42138(0)	-2.58(- 1)	-1.01(- 1)
40	7.8809 51421 32091(0)	8.41(- 2)	1.06(- 2)
39	2.4351 33996 57510(1)	-2.80(- 2)	-1.15(- 3)
38	7.2801 63377 00130(1)	9.50(- 3)	1.30(- 4)
37	2.1358 70533 45271(2)	-3.29(- 3)	-1.54(- 5)
⋮	⋮	⋮	⋮
31	8.7204 26373 11050(4)	-9.86(- 6)	-1.13(-10)
30	2.1979 66386 48330(5)	1.14(- 6)	5.21(-12)
29	5.4130 41191 78555(5)	-7.50(- 6)	-1.39(-11)
28	1.3020 44007 59265(6)	-1.39(- 5)	-1.06(-11)
27	3.0577 21171 18596(6)	-3.43(- 5)	-1.12(-11)
26	7.0077 51713 02565(6)	-7.78(- 5)	-1.11(-11)
25	1.5667 00242 01568(7)	-1.74(- 4)	-1.11(-11)
⋮	⋮	⋮	⋮
4	5.1301 53656 37313(11)	-5.70(0)	-1.11(-11)
3	5.9701 43865 11136(11)	-6.64(0)	-1.11(-11)
2	6.7182 11924 49276(11)	-7.47(0)	-1.11(-11)
1	7.3093 07442 06025(11)	-8.13(0)	-1.11(-11)
0	7.6879 13378 47275(11)	-8.55(0)	-1.11(-11)

例 1 $M=L=41$ として，$I_{\nu+n}(30)$ の近似計算を行なった数値例が**第2表**に示されている．ただし $\nu=\frac{99}{100}$．$G_{\nu+n}(30)/\alpha_0$ は $I_{\nu+n}(30)$ の計算値であって，これらが真値と異なる桁には下線がつけられている．$0 \leqq n \leqq 30$ のとき，$I_{\nu+n}(30)$ の計算値は10桁正しくなっており，$p=10$，$x=30$ のとき $N_E=41$，$N_E=29$（第1表参照）の正しいことがわかる．いま $\nu=\frac{99}{100}(\neq 0)$ であるから，$n=N_E+1=30$ のとき $\varepsilon_{\nu+M,\nu+n} \approx 1.6 \times 10^{-11}$ となっており，$|\varepsilon_{\nu+M,\nu+n}| < 2.5 \times 10^{-11}$．したがって，$n=30$ のときも10桁正しい近似値がえられている．

$n \leqq 26$ のとき．$|\varepsilon_{\nu+M,\nu+n}| \ll |\Delta\alpha/\alpha|$ であるから $\delta_{\nu+n}$ は一定値 -1.11×10^{-11} となっている．すなわち，この例では

$$\Delta\alpha/\alpha \approx 1.11 \times 10^{-11}$$

であり，(19) が満足されている．

例 2 $M=L=40$ として，$I_{\nu+n}(30)$ の近似計算を行なった例が**第3表**に示されている．ただし $\nu=\frac{99}{100}$．$p=10$，$x=30$ のときの $M_E=41$ より M が1だけ小さいのであるが，$n \leqq$ 29 のとき $I_{\nu+n}(30)$ の計算値は10桁正しい．すなわち，いまの場合 $M_{\min}=40$ であって，M_E はこれより1だけ大きい．

第3表 $I_{\nu+n}(30)$ の近似計算例
ただし $\nu=99/100$ ($M=L=40$)

n	$G_{\nu+n}(30)/\alpha_0$	$\Delta_{\nu+n}$	$\delta_{\nu+n}$
40	8.7993 75094 12915(0)	-8.34(- 1)	-1.05(- 1)
39	2.4045 75000 72209(1)	2.78(- 1)	1.14(- 2)
38	7.2905 36860 73790(1)	-9.42(- 2)	-1.29(- 3)
37	2.1355 11138 07335(2)	3.26(- 2)	1.53(- 4)
⋮	⋮	⋮	⋮
31	8.7204 26363 59412(4)	8.53(- 5)	9.78(-10)
30	2.1979 66386 92550(5)	-4.31(- 5)	-1.96(-10)
29	5.4130 41191 74750(5)	-3.70(- 6)	-6.83(-12)
28	1.3020 44007 62927(6)	-5.05(- 5)	-3.85(-11)
27	3.0577 21171 25291(6)	-1.01(- 4)	-3.31(-11)
26	7.0077 51713 18720(6)	-2.39(- 4)	-3.42(-11)
25	1.5667 00242 05144(7)	-5.32(- 4)	-3.40(-11)
⋮	⋮	⋮	⋮
4	5.1301 53656 49044(11)	-1.74(1)	-3.40(-11)
3	5.9701 43865 24787(11)	-2.03(1)	-3.40(-11)
2	6.7182 11924 64638(11)	-2.28(1)	-3.40(-11)
1	7.3093 07442 22738(11)	-2.48(1)	-3.40(-11)
0	7.6879 13378 64854(11)	-2.61(1)	-3.40(-11)

しかし，第3表から明らかなように

$$\Delta\alpha/\alpha \approx 3.40 \times 10^{-11}$$

であるから，$M=40$ のとき (19) は満足されていない．例1とこの数値例から，$M_E=41$ は (19) を満足する M の最小値であることがわかる．

例 3 $\nu=0$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{39}{40}$ および $\frac{99}{100}$ に対する $I_\nu(30)$ および $I_\nu(100)$ の少なくとも10桁正しい計算値が**第4表**に示されている．前者は $M=L=41$，後者は $M=L=73$（第1表参照）として近似計算を行なった結果である．いずれの場合にも ν が大きくなると $\Delta\alpha/\alpha$ ($\approx|\delta_\nu|$) も大きくなっているが，これらの値はすべて 2.5×10^{-11} 以下となっている．

第4表 $I_\nu(30)$ の近似計算例 ($M=L=41$) と
$I_\nu(100)$ の近似計算例 ($M=L=73$)

ν	$G_\nu(30)/\alpha_0$	$\|\Delta_\nu\|$	$\|\delta_\nu\|$
0.000	7.8167 22978 24425(11)	4.47(- 1)	5.72(-13)
0.250	7.8084 44106 22961(11)	1.14(0)	1.46(-12)
0.500	7.7836 60688 42913(11)	2.47(0)	3.17(-12)
0.750	7.7425 31743 30349(11)	4.82(0)	6.22(-12)
0.975	7.6917 55625 91011(11)	8.26(0)	1.07(-11)
0.990	7.6879 13378 47275(11)	8.55(0)	1.11(-11)
ν	$G_\nu(100)/\alpha_0$	$\|\Delta_\nu\|$	$\|\delta_\nu\|$
0.000	1.0737 51707 13156(42)	4.82(29)	4.48(-13)
0.250	1.0734 14516 64668(42)	1.35(30)	1.26(-12)
0.500	1.0724 03582 54554(42)	3.23(30)	3.01(-12)
0.750	1.0707 20814 87736(42)	6.94(30)	6.48(-12)
0.975	1.0686 34505 80441(42)	1.30(31)	1.21(-11)
0.990	1.0684 76234 00686(42)	1.35(31)	1.26(-11)

前述したように $\Delta\alpha/\alpha$ は ν に関する単調増加関数であるから，x と M を一定にすれば $\nu=0$ のとき $\Delta\alpha/\alpha$ は最小である．したがって，整数次 ($\nu=0$) の変形ベッセル関数 $I_n(x)$ の近似計算においては，とくに $x \geqq 1$ のとき，第1表の M_E より 1～5 程度小さい M

を用いることができる．たとえば，$I_n(30)$ を 10 桁正しく求める場合には $M_{\min}=37$ である．すなわち，$M=L=37$ とすれば，

$$\Delta\alpha/\alpha \approx 4.94\times10^{-11}$$

となり，$n\leqq22$ に対する $I_n(30)$ は 10 桁正しく計算される（**第 5 表**参照）．

第 5 表　$I_n(30)$ の近似計算例（$M=L=37$）

n	$G_n(30)/\alpha_0$	$\lvert\Delta_n\rvert$	$\lvert\delta_n\rvert$
37	6.8209 46103 50869(　2)	7.47(　1)	1.23(- 1)
36	1.6825 00038 86548(　3)	2.70(　1)	1.58(- 2)
35	4.7200 94703 62802(　3)	9.96(　0)	2.11(- 3)
34	1.2696 05434 73308(　4)	3.75(　0)	2.96(- 4)
33	3.3497 81789 09113(　4)	1.45(　0)	4.32(- 5)
⋮	⋮	⋮	⋮
25	3.3892 59984 59716(　7)	3.31(- 3)	9.76(-11)
24	7.2031 05744 74602(　7)	2.78(- 3)	3.86(-11)
23	1.4914 22917 61908(　8)	7.75(- 3)	5.20(-11)
22	3.0071 59048 15719(　8)	1.47(- 2)	4.88(-11)
21	5.9019 22854 91629(　8)	2.93(- 2)	4.96(-11)
20	1.1269 85104 50400(　9)	5.56(- 2)	4.94(-11)
19	2.0928 39091 49696(　9)	1.03(- 1)	4.94(-11)
⋮	⋮	⋮	⋮
4	5.9620 87362 31346(11)	2.95(　1)	4.94(-11)
3	6.7114 04618 30595(11)	3.32(　1)	4.94(-11)
2	7.3043 68285 97466(11)	3.61(　1)	4.94(-11)
1	7.6853 20389 76924(11)	3.80(　1)	4.94(-11)
0	7.8167 22978 62594(11)	3.86(　1)	4.94(-11)

3.　$I_{\nu+n}(x)$ の計算手順

これまでに述べたことをまとめると，$I_{\nu+n}(x)$ の計算手順はつぎのようになる．

（i）　まず p を定めて，

（ii）　第 1 表より x に対応する M_{E} と N_{E} を選び $L=M_{\mathrm{E}}$ とする．

（iii）　$n\leqq N_{\mathrm{E}}$ のときは $M=M_{\mathrm{E}}$，

（iv）　$n>N_{\mathrm{E}}$ のときは

$$M=n+(M_{\mathrm{E}}-N_{\mathrm{E}}) \tag{28}$$

として (1)～(4) 式の計算を行なえば，$I_{\nu+n}(x)$ の近似値は少なくとも p 桁正しく求められる．

(28) で定まる M を用いると，$\mu\leqq\nu+n$ に対する $I_\mu(x)$ は少なくとも，p 桁正しく計算されることを，$J_\mu(x)$ における場合とまったく同様にして説明することができる[6]．しかし，x が比較的小さい場合でも，$M\gg x$ のとき，(2) あるいは (4) 式の計算において，計算機がオーバフローすることがある．これについては説明を省略する．

例 4　$n\leqq24$ に対して $I_{\nu+n}(0.7)$ を 20 桁正しく計算することを考える．ただし $\nu=\dfrac{99}{100}$．第 1 表によれば $p=20$，$x=0.7$ のとき $M_{\mathrm{E}}=16$，$N_{\mathrm{E}}=10$ である．したがって

$$L=M_{\mathrm{E}}=16$$

とし，(28) を用いて

$$M=24+(16-10)=30$$

とする．このような M，L を用いた計算例が**第 6 表**に示されている．この表から明らかなように，少なくとも $n\leqq24$ に対して $I_{\nu+n}(0,7)$ は 20 桁正しく計算されている．

第 6 表　$I_{\nu+n}(0.7)$ の近似計算例
ただし $\nu=99/100$（$M=30$，$L=16$）

n	$G_{\nu+n}(0.7)/\alpha_0$	$\lvert\Delta_{\nu+n}\rvert$	$\lvert\delta_{\nu+n}\rvert$
30	9.3830 95326 19927 65323 06473(-49)	1.16(-52)	1.24(- 4)
29	8.3080 60690 25473 08496 05074(-47)	1.35(-54)	1.63(- 8)
28	7.1197 59455 26803 07327 86264(-45)	1.63(-56)	2.29(-12)
27	5.8980 25852 01817 43571 84212(-43)	2.04(-58)	3.46(-16)
26	4.7174 47507 31663 25247 13595(-41)	2.66(-60)	5.65(-20)
25	3.6384 15751 79879 92986 40144(-39)	1.61(-60)	4.41(-22)
24	2.7022 55327 30075 43424 42682(-37)	1.22(-58)	4.51(-22)
23	1.9297 74145 26791 84804 33939(-35)	8.71(-57)	4.51(-22)
22	1.3229 92561 10351 19138 80250(-33)	5.97(-55)	4.51(-22)
21	8.6921 00911 22233 61756 53845(-32)	3.92(-53)	4.51(-22)
⋮	⋮	⋮	⋮
4	4.5919 02206 83638 04594 09424(- 5)	2.07(-26)	4.51(-22)
3	6.5734 93289 29963 23139 56776(- 4)	2.97(-25)	4.51(-22)
2	7.5397 01371 86994 46425 04819(- 3)	3.40(-24)	4.51(-22)
1	6.5067 94104 86189 18891 65113(- 2)	2.94(-23)	4.51(-22)
0	3.7749 74233 34017 51205 50355(- 1)	1.70(-22)	4.51(-22)

なお，$M=L=22$ として計算を行ない，$n\leqq14$ に対して $I_{n+\frac{100}{99}}(0.7)$ を 30 桁（第 1 表参照）正しく求めた例を**第 7 表**に示しておく．

第 7 表　$I_{n+\frac{100}{99}}(0.7)$ の近似計算例
（$M=L=22$）

n	$G_{n+\frac{99}{100}}(0.7)/\alpha_0$
14	1.1596 03291 57375 32113 05374 52193 (-19)
13	4.9689 52315 23834 72239 89902 65563 (-18)
12	1.9873 20828 72541 59721 71840 75030 (-16)
11	7.3807 68256 64185 36267 98907 43021 (-15)
10	2.5304 27646 46117 75584 09854 70041 (-13)
9	7.9529 23578 14473 93870 33742 66672 (-12)
8	2.2725 22043 23691 67911 71755 26157 (-10)
7	5.8450 88114 63525 38687 11056 54311 (- 9)
6	1.3366 22637 35568 48713 91210 09182 (- 7)
5	2.6752 71441 00498 87541 61442 06849 (- 6)
4	4.5919 02206 83638 04594 07351 52670 (- 5)
3	6.5734 93289 29963 23139 53809 88304 (- 4)
2	7.5397 01371 86994 46425 01416 78193 (- 3)
1	6.5067 94104 86189 18891 62177 00682 (- 2)
0	3.7749 74233 34017 51205 48651 95170 (- 1)

む　す　び

上述したように，変形ベッセル関数 $I_{\nu+n}(x)$ の近似値を，漸化式を用いて，p 桁正しく，できるだけ速く計算するためには x に対して M_{E} および N_{E} を定めることが重要である．

筆者は，$p=30$ のときの M_{E} および N_{E}（第 1 表参照）を用い，$M=L=M_{\mathrm{E}}$ として

$x=0.01(0.01)\ 0.1(0.1)\ 1(1)\ 10(10)100$ に対

する

$$n=0(1)\ N_E \text{ の } I_n(x)$$

および

$$\nu=\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5}$$

の $I_\nu(x)$ を計算し，少なくとも 29 桁正しい第 1 種変形ベッセル関数の関数表を作成した．

なお，詳述を避けたが，第 2 種変形ベッセル関数 $K_\nu(x)$，$x \leqq 2$ についてもほぼ同様の計算を行なった．一例を**第 8 表**に示す．

第 8 表　$K_{1/3}(x)$ の計算例

x	$K_{1/3}(x)$
0.01	+7.4862 24666 45123 49273 19488 37672 (　0)
0.02	+5.7805 61591 68195 49629 50829 56333 (　0)
0.03	+4.9320 99110 52890 21608 19859 28866 (　0)
0.04	+4.3860 96459 37970 32382 73699 19426 (　0)
0.05	+3.9910 17706 86754 02463 70442 43708 (　0)
0.06	+3.6850 72372 74689 88699 10726 27999 (　0)
0.07	+3.4374 06112 67444 47374 50225 53870 (　0)
0.08	+3.2305 49726 21181 81081 20652 19079 (　0)
0.09	+3.0537 20459 40131 18152 80791 17433 (　0)
0.10	+2.8998 27980 93457 72461 75567 52819 (　0)
0.20	+1.9793 41175 82596 54162 68190 30287 (　0)
0.30	+1.5091 12924 58213 66952 23588 24433 (　0)
0.40	+1.2057 63926 48535 34579 19717 65731 (　0)
0.50	+9.8903 10742 46724 28985 82616 60444 (− 1)
0.60	+8.2509 37472 73916 90827 98819 05121 (− 1)
0.70	+6.9653 00605 04096 86219 90040 71245 (− 1)
0.80	+5.9318 02597 76815 15565 78663 89300 (− 1)
0.90	+5.0859 69651 55235 52337 51747 11767 (− 1)
1.00	+4.3843 06334 41534 36171 31150 10543 (− 1)
2.00	+1.1654 49612 96165 24875 89426 28915 (− 1)

本研究を行なうにあたり，ご指導，ご鞭撻をいただいた城　憲三教授に深甚の謝意を表する．

参考文献

1) British Association for the Advancement of Science: Bessel functions, Part II, Mathematical Tables, Vol. X, Cambridge University Press, 1952.

2) C.W. Jones: A short table for the Bessel functions $I_{n+\frac{1}{2}}(x)$, $(2/\pi)\ K_{n+\frac{1}{2}}(x)$, Royal Society Shorter Mathematical Tables, No. 1, Cambridge University Press, 1952.

3) I.A. Stegun and M. Abramowitz: Generation of Bessel functions on high speed computers, MTAC **11**, 1957, pp. 255〜257.

4) M. Goldstein and R.M. Thaler: Recurrence techniques for the calculation of Bessel functions, MTAC **13**, 1959, pp. 102〜108.

5) F.W.J. Olver: Error analysis of Miller's recurrence algorithm, Math. Comp. **18**, 1964, pp. 65〜74.

6) 牧之内三郎：漸化式を用いる $J_\nu(x)$ の近似計算，情報処理 Vol. 6, No. 4, 1965, pp. 194〜201.

（昭和 40 年 2 月 26 日受付）