複素方程式の数値解法について*

二 宮 理 憙**

はじめに

非線型の方程式 $f(x)=0$ の数値解を求める方法はいろいろある．まず代表的なものとして Newton の方法をあげなければならないであろう．その他 Bairstow, Graeffe の方法があり，そそぞれある特徴をもっている．この論文では一般の解析関数よりなる複素方程式 $f(z)=0$ の数値解をもとめる方法をのべる．(1) ではその理論について，(2) ではその実際に計算する方法について，(3) では実例についてそれぞれ述べる．

1. 関数論的説明

ある複素方程式 $f(z)=0$ が与えられたとする．ここで考える問題は，その方程式の真の根 z_0 を1つの与えられたその近似根 z_1 を基に数値的に求めようとするのである．いいかえれば，方程式

$$f(z)=0 \qquad (1)$$

を与えられた近似根を基に解くことである．

根の位数 α は“偏角の原理”で求められるはずであるがその計算が困難な場合も多い***．実際にフィルターのデザインなどのときのように α があらかじめわかっている場合もある．

この位数 α を用いれば $f(z)$ は

$$f(z)=(z-z_0)^{\alpha}g(z) \qquad (2)$$

と書き表わされる．ここで $g(z)$ とは，z_0 で0とならない関数 $(g(z_0)\neq 0)$ であり，さらに

$$g(z)=g(z_0)+h(z) \qquad (3)$$

と表わすこともできる．ここで $h(z)$ は，z_0 で0となる関数 $(h(z_0)=0)$ である．

与えられた近似根 z_1 より3点 z_{11}, z_{12}, z_{13} を z_0 の近似根となるように作る．その方法は後で述べる．

(1) より明らかに

$$\frac{1}{\alpha}\arg\frac{f(z_{11})}{f(z_{12})}=\theta_{12}+\frac{1}{\alpha}\arg\frac{g(z_{11})}{g(z_{12})}, \qquad (4)$$

ここで

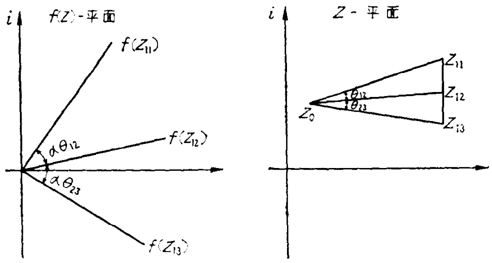
$$\theta_{12}=\arg((z_0-z_1)/(z_0-z_{12})).$$

$$\frac{1}{\alpha}\arg\frac{f(z_{12})}{f(z_{13})}=\theta_{23}+\frac{1}{\alpha}\arg\frac{g(z_{12})}{g(z_{13})}, \qquad (5)$$

ここで

$$\theta_{23}=\arg((z_0-z_{12})/(z_0-z_{13})),$$

が成立する．ここでもし $f(z)$ がただ1つの零点*（位数は任意でよい）しか持っていない場合，とくにちょうど $g(z)=1$ の場合について考えてみよう．明らかに (4) と (5) の最後の項は0となってしまう．したがってこの3点（この場合は零点と3点が一直線上でないような任意の3点でもよいが）より θ_{12} と θ_{23} を正確に計算することができる．この3点 z_{11}, z_{12}, z_{13} と正確な θ_{12}, θ_{23} とにより，初等幾何学的方法により真の根 z_0 を計算することができる．



3点 Z_{11}, Z_{12}, Z_{13} はどのようにえらんでもよいが，計算の都合のため上のようにえらんである．

第1図

この際，解が2つでてくるが，一つだけが求める解であり，そのどちらであるかを定めるのには実用上その2つの z についての関数値 $f(z)$ の絶対値を小さくするところの z が求めている方であるとすることができる．

一般の場合，すなわち二つ以上の根をもつか，また

* On the numerical Method of the Solution of the Complex Equation, Satoki Ninomija (Institute of Statistical Mathematics)

この論文の主要な部分は1959年9月東京理科大学の卒業論文として当大学に提出されたものである．この方法の特徴を認識し，この論文を提出するように進めてくださいました統計数理研究所の方々に感謝の意を表します．

** 統計数理研究所；（現在の連絡先）渋谷区緑岡町 22，青山学院大学電子計算センター，TEL. 402-8111

*** これについては後で再び述べる．

* 零点でなくて極の場合も同様な方法で考えを進めることができる．

は，一つ以上の極をもつ場合には (4) と (5) の最後の値は0とはならない．しかし，近似根 z_1 が z_0 より少ししか離れていないとき，これらの項は非常に小さくなる．そうして近似的な角度 $\hat{\theta}_{12}$, $\hat{\theta}_{23}$ (θ_{12}, θ_{23} の推定値) をえることができる．したがって，これを用いて近似解を得ることができる．この近似根をもとに，この方法をくりかえし用いて精度を上げるのである．

次に実用的な意味はあまりないが，少なくともこの方法の有効な問題が空集会でないということの証明をしよう．上記のことを数学的に表現すれば，小さな正数 ε' に対して，

$$\left|\frac{h(z_{1j})}{g(z_0)}\right|<\frac{\varepsilon'}{2},\quad j=1.2,3 \tag{6}$$

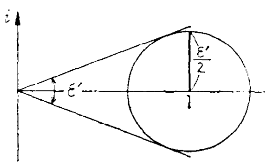
が成立するとする．(4) の最後の項は

$$\arg\frac{g(z_{11})}{g(z_{12})}=\arg\left(1+\frac{h(z_{11})}{g(z_0)}\right)-\arg\left(1+\frac{h(z_{12})}{g(z_0)}\right) \tag{7}$$

となり，これを (6) で評価すれば

$$\left|\arg\frac{g(z_{11})}{g(z_{12})}\right|<\varepsilon' \tag{8}$$

また同様に



第2図

$$\left|\arg\frac{g(z_{12})}{g(z_{13})}\right|<\varepsilon' \tag{8}$$

となる．(4) と (5) をこれらの式を用いて書けば

$$\frac{1}{\alpha}\left(\arg\frac{f(z_{11})}{f(z_{12})}-\varepsilon'\right)<\theta_{12}<\frac{1}{\alpha}\left(\arg\frac{f(z_{11})}{f(z_{12})}+\varepsilon'\right) \tag{9}$$

または

$$\hat{\theta}_{12}-\varepsilon<\theta_{12}<\hat{\theta}_{12}+\varepsilon, \tag{9'}$$

または

$$\frac{1}{\alpha}\left(\arg\frac{f(z_{12})}{f(z_{13})}-\varepsilon'\right)<\theta_{23}<\frac{1}{\alpha}\left(\arg\frac{f(z_{22})}{f(z_{23})}+\varepsilon'\right) \tag{9''}$$

または

$$\hat{\theta}_{23}-\varepsilon<\theta_{23}<\hat{\theta}_{23}+\varepsilon \tag{9'''}$$

となり，$\theta_{..}$ と $\hat{\theta}_{..}$ との関係が明らかとなる．したがって，十分小さい ε' に対して (6) が成立すれば (9), (9′) を満足する θ_{12}, θ_{23} が求まる．

実際には z_{11}, z_{12}, z_{13} と θ_{12}, θ_{23} とにより近似根を求める．その求めた近似根をもとにまた3点を作り，この方法をくりかえす．

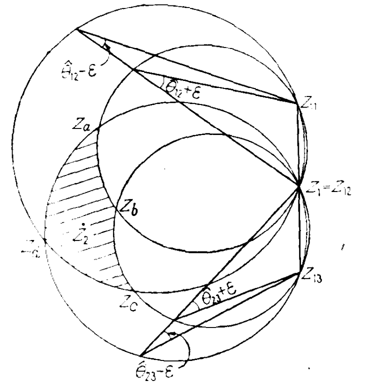
z_j から z_{j+1} を作る方法は初等幾何学的な方法により

$$z_{j+1}^{+}{}_{-}=z_j\pm\frac{\delta 2\sin\hat{\theta}_{12}\sin\hat{\theta}_{23}\sin(\hat{\theta}_{12}+\hat{\theta}_{23})}{4\sin^2\hat{\theta}_{12}\sin^2\hat{\theta}_{23}}\cdot\frac{+i\sin(\hat{\theta}_{23}-\hat{\theta}_{12})\cdot\sin(\hat{\theta}_{12}+\hat{\theta}_{23})}{+\sin^2(\hat{\theta}_{33}-\hat{\theta}_{12})} \tag{10}$$

となる．

このように解は二つあるうちの一つである．関数の写像の性質を用いればこの符号のうちどちらをとるべきかが定まるが，実用にはならない場合が多い，実際には前に述べたように，この二つの点について関数値を求め，その絶対値が小さい方が，より良い近似値となっているとすればよい．

条件 (6) は実際にためすことができない場合が多い．そこで別の立場でこの方法により，より良い近似値が得られるための条件を示そう．(9) 式群により，$\hat{\theta}_{12}-\varepsilon$, $\hat{\theta}_{12}+\varepsilon$, $\hat{\theta}_{23}-\varepsilon$, $\hat{\theta}_{23}+\varepsilon$ によって作られる斜線の範囲 (**第3図**) の中に真の根 z_0 が入っている．図



第3図

のように z_a, z_b, z_c, z_d, z_2, z_1 を定める．ここで z_2 とは z_1 をもとにして作られた近似根である．そこで

$$|z_2-z_m|=\max\{|z_2-z_a|,\ |_2-z_c|,\ |z_2-z_c|,\ |z_2-z_d|\}$$

とする．ここで

$$|z_2-z_a|=\delta\left|\frac{2\sin\theta_{12}\sin\theta_{23}\sin(\theta_{12}-\theta_{23})}{4\sin^2\theta_{12}\sin^2\theta_{23}}\cdot\frac{+i\sin(\theta_{23}-\theta_{12})\sin(\theta_{23}+\theta_{12})}{+\sin^2(\theta_{23}-\theta_{12})}\right.$$

$$-\frac{2\sin(\theta_{12}+\varepsilon)\sin(\theta_{23}-\varepsilon)\sin(\theta_{12}+\theta_{23})}{4\sin^2(\theta_{12}+\varepsilon)\sin^2(\theta_{23}-\varepsilon)}\cdot$$

$$\cdot\left.\frac{+i\sin(\theta_{23}-\theta_{12}-2\varepsilon)\sin(\theta_{12}+\theta_{23})}{+\sin^2(\theta_{23}-\theta_{12}-2\varepsilon)}\right|$$

他の $|z_2-z_c|$, $|z_2-z_c|$, $|z_2-z_d|$ も同じような式で与えられる.

次に

$$|z_1-z_n|=\min\{|z_1-z_a|,\ |z_1-z_c|,\ |z_1-z_c|\}$$

とする. ここで

$$|z_1-z_a|=\delta\left|\frac{2\sin(\theta_{12}+\varepsilon)\sin(\theta_{23}-\varepsilon)}{4\sin^2(\theta_{12}+\varepsilon)\sin^2(\theta_{23}-\varepsilon)}\cdot\right.$$

$$\cdot\left.\frac{+i\sin(\theta_{23}-\theta_{12}-2\varepsilon)\sin(\theta_{12}-\theta_{23})}{+\sin^2(\theta_{23}-\theta_{12}-2\varepsilon)}\right|$$

他の $|z_1-z_b|$, $|z_1-z_c|$ も同じような式で与えられる.

そこでもし, $\theta_{11}\gg\varepsilon$ でかつ

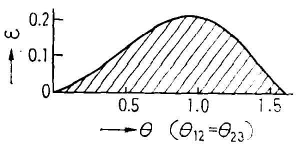
$$|z_2-z_m|<|z_1-z_n| \tag{11}$$

が成り立っているとすれば明らかに

$$|z_2-z_0|<|z_1-z_0|$$

となる.

いいかえればより良い近似根を得るための条件は(11) である. しかし (11) も θ_{12}, θ_{23} と ε とで表わされていてあまり複雑で実際にためすことができない場合も多い. 条件 (11) が実際にどのような範囲であるかを数値計算してみると次のようになる. θ_{12} と θ_{23} が等しいとき (このときが ε が最も大きくなる) には**第4図**の斜線の部分にが入っていれば (11) を満している.



第4図

いる. θ_{12} と θ_{23} が異なるときは ε の (11) を満足する範囲は第4図より小さい. ε の最も大きくなる所は $\theta=0.90\sim0.95$ (52°~54°) でそのときの ε は 1.12 (12°) である. したがって θ_{12}, θ_{23} ともに 53° くらいになるように z_{j1}, z_{i2}, z_{j3} を作ってゆけばよいのだが, 関数 f が複雑なときはあまりよい方法とはいえない. しかし α がうまく推定できないときは α を適当に定めて, θ_{12}, θ_{23} がともに 50° に近くなるようにするのは良い方法である (例題参照).

いままで述べたのは複素関数についてであったが, 実はここで用いられているのはその方程式が根の所で, その実数部と虚数部が一種の直交* しているという性質である. いいかえれば

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=0$ の解とは

$$\begin{cases} u(x,y)=0 \\ v(x,y)=0 \end{cases}$$

を解くことであり, $u=0$ と $v=0$ は交わる所 (根) で一種の直交をしている. 証明は Cauchy-Riemann の関係式から明らかである.

そこで今度は任意の

$$\begin{cases} g(x,y)=0 \\ h(x,y)=0 \end{cases} \tag{12}$$

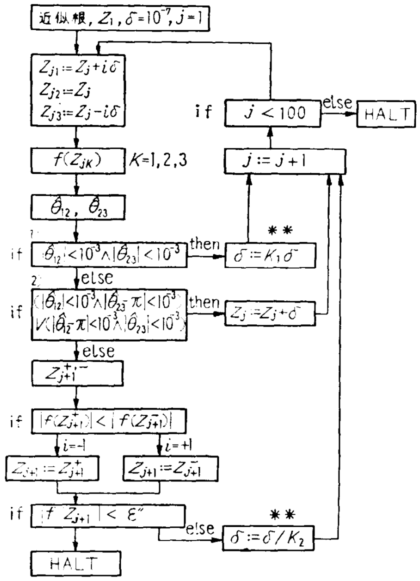
なる連立方程式を考えよう. もし $g=0$, $h=0$ がその根で直交していれば, 前述の方法によって根を求めることができる. もし直交していなくても近似的に直交していれば, ここでの方法が利用できる. 近似的直交とは与えられた3点に対して (11) 式が (12) に対して

$$|z_2-z_m|<|z_1-z_n|$$

となることである.

2. 実際の計算法

この方法により $f(z)=0$ の根をもとめるには次の流れ図にしたがえばよい.



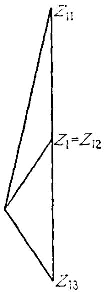
第5図 流 れ 図

* ここで用いた一種の直交とは単根の場合は 90° に交わり, 2重根のときは 90°/2 に交わり, 3重根のときは 90°/3, ……, n 重根のときは 90°/n で交わることを意味する.

** $K_1:=30$, $K_2:=100$ としてある. 関数によってもっと適当な K_1, K_2 がありうる.

1) でおこなっているチェックは計算された角度があまり小さいと，角度の計算のときの誤差に真の角度がおおいかぶされてしまうのと，もう一つは角度が小さいときは，大きな誤差がゆるされないという二つの理由による．

2) でおこなっているチェックは**第6図**に示したような場合と，もう一つそれに対応する場合をはぶくためである．この場合も理由は 1) と同様である．



第6図

θ_{12} と θ_{23} はできるだけ等しくなるように z_{j1}, z_{j2}, z_{i3} を作った方がよいが，小形の計算機でそのような条件を作るのは困難である．ここでは 2) の場合は流れ図に示すように $z_j=z_j+\delta$ としてある．

3. 例　題

この方法は α が定まっているという条件で進めているが，実際にはそれができない場合もある．そのときは推定された α を用いればよい．もしそれも不可能ならば $\alpha=1$ としてもよい．もちろん α が正しく推定されてないと収束の速度はおそくなるが，(11) 式が成立する条件だとかならず収束する．次にいくつかの例題を上げよう．

$$z^2(z-10)(z-10\,i)=0 \qquad (3\cdot1)$$

この多項式は $z=0$ で位数2の零点，$z=+10$ および $z=+10\,i$ で位数1の零点をもっている．

3.11　まず $x=5.0$, $y=2.0$, $\delta=1.0$, $\alpha=2$ で実験してみると**第1表**のようになる．

3.12　$x=20.0$, $y=15.0$, $\delta=1.0$ で $\alpha=2$ としてこの方法で計算を進めると**第2表**のようになる．

第1表　$Z^2(Z-10)(Z-10\,i)=0$, $\alpha=2$

j	X	Y	δ	i	*
1	.5000000000$_{10}$ 1	.2000000000$_{10}$ 1	.1000000000$_{10}$ 1		
2	−.3215525026$_{10}$ 1	.4071214778$_{10}$ 1	.1000000000$_{10}$ 1	−	1
3	.1349318451$_{10}$ 1	.5878844572$_{10}$ 1	.1000000000$_{10}$− 1	−	1
5	−.7977494270$_{10}$ 0	−.1842694516$_{10}$ 1	.3000000000$_{10}$− 2	−	1
7	−.2033344052$_{10}$ 1	.2879972500$_{10}$− 1	.9000000000$_{10}$− 3		1
9	−.1922849990$_{10}$ 0	.5320440136$_{10}$− 1	.2700000000$_{10}$− 3	−	1
11	−.1395275600$_{10}$− 2	.1048909083$_{10}$ 0	.8100000000$_{10}$− 4	−	1
14	−.5175105070$_{10}$− 2	−.4127919830$_{10}$− 1	.7290000000$_{10}$− 3		1
16	−.1060832525$_{10}$− 1	.6454047000$_{10}$− 3	.2187000000$_{10}$− 3		1
17	−.4004550000$_{10}$− 5	.1276890714$_{10}$− 2	.2187000000$_{10}$− 5	−	1
21	−.8240167575$_{10}$− 5	−.2043447800$_{10}$− 4	.5904900000$_{10}$− 3		1
22	−.1648039277$_{10}$− 4	.2235000000$_{10}$−10	.5904900000$_{10}$− 5		1
23	−.1330000000$_{10}$−10	.2876877425$_{10}$−10	.5904900000$_{10}$− 7	−	1

第2表　$Z^2(Z-10)(Z-10\,i)=0$, $\alpha=2$

j	X	Y	δ	i	
1	.2000000000$_{10}$ 2	.1500000000$_{10}$ 2	.1000000000$_{10}$ 1		
2	.7450893240$_{10}$ 1	.1938640147$_{10}$ 2	.1000000000$_{10}$ 1	−	1
3	.1555746676$_{10}$ 2	.7657774590$_{10}$ 1	.1000000000$_{10}$− 1		1
5	.7436737899$_{10}$ 1	.9929264816$_{10}$ 1	.3000000000$_{10}$− 2	−	1
8	−.1946879331$_{10}$ 1	.1158162450$_{10}$ 2	.2700000000$_{10}$− 1	−	1
10	−.4252775153$_{10}$ 1	.8975220638$_{10}$ 1	.8100000000$_{10}$− 2		1
12	.1314794299$_{10}$ 1	.8763296575$_{10}$ 1	.2430000000$_{10}$− 2	−	1
14	.3538327619$_{10}$ 0	.6729939299$_{10}$ 1	.7290000000$_{10}$− 3	−	1
18	.3142687976$_{10}$ 0	.4793495142$_{10}$ 1	.1968300000$_{10}$ 0		1
20	.4553426403$_{10}$ 2	.2748046615$_{10}$ 1	.5904900000$_{10}$− 1	−	1
22	.2406740325$_{10}$ 2	.2976014968$_{10}$ 1	.1771470000$_{10}$− 1	−	1
24	.1347115975$_{10}$ 2	.3558106947$_{10}$ 1	.5314410000$_{10}$− 2	−	1
26	.8273081459$_{10}$ 1	.5451673219$_{10}$ 1	.1594323000$_{10}$− 2	−	1
29	−.9748541820$_{10}$ 0	.3675188099$_{10}$ 1	.1434890700$_{10}$− 1	−	1
31	.2656674907$_{10}$ 1	.7798310915$_{10}$ 1	.4304672100$_{10}$− 2	−	1
33	−.4967698160$_{10}$ 0	.3721732697$_{10}$ 1	.1291401630$_{10}$− 2	−	1
36	.3674822725$_{10}$ 1	.9411208550$_{10}$ 1	.1162261467$_{10}$− 1	−	1
38	−.3004578044$_{10}$ 1	.8087965888$_{10}$ 1	.3486784401$_{10}$− 2	−	1
40	.1744607954$_{10}$ 1	.6383317497$_{10}$ 1	.1046035320$_{10}$− 2	−	1
43	−.3777920830$_{10}$ 0	.6065205720$_{10}$ 0	.9414317880$_{10}$− 2	−	1
45	−.8020989644$_{10}$ 0	.9009364200$_{10}$− 2	.2824295364$_{10}$− 2		1
47	−.3107946030$_{10}$− 1	.1681933584$_{10}$− 1	.8472886092$_{10}$− 3	−	1
48	.2748008000$_{10}$− 4	.3354594500$_{10}$− 1	.8472886092$_{10}$− 5	−	1
53	−.3371655424$_{10}$− 2	−.2187321395$_{10}$ 0	.6863037732$_{10}$− 1		1
55	−.2008171796$_{10}$− 1	.1529860888$_{10}$ 0	.2058911319$_{10}$− 1		1
56	−.4383631157$_{10}$− 1	−.8328532300$_{10}$− 2	.2058911319$_{10}$− 3		1
58	−.8534580000$_{10}$− 4	−.1660264306$_{10}$− 1	.6176733957$_{10}$− 4	−	1
61	−.2190501414$_{10}$− 3	.2677793680$_{10}$− 2	.5559060561$_{10}$− 3		1
62	−.4392197223$_{10}$− 3	−.4564197000$_{10}$− 5	.5559060561$_{10}$− 5		1
63	−.6007100000$_{10}$− 8	−.8951842817$_{10}$− 5	.5559060561$_{10}$− 7	−	1
67	−.1201494090$_{10}$− 7	−.1081534800$_{10}$− 7	.1500946351$_{10}$− 4		1
68	−.3709473000$_{10}$−10	.2845054320$_{10}$− 8	.1500946351$_{10}$− 6	−	1
69	−.7418946110$_{10}$−10	−.2200000000$_{10}$−16	.1500946351$_{10}$− 8		1

* (10) 式最後の項が + の方をえらんだとき −1 とし，そうでないとき +1 としてある．

3.13 3.12 と初期値は同じだが $\alpha=1$ とすれば第3表のように $0+10\,i$ 収束する．

3.14 3.11 と同じ初期条件であるが $\alpha=1$ とすると非常にゆっくりとしか収束しない．

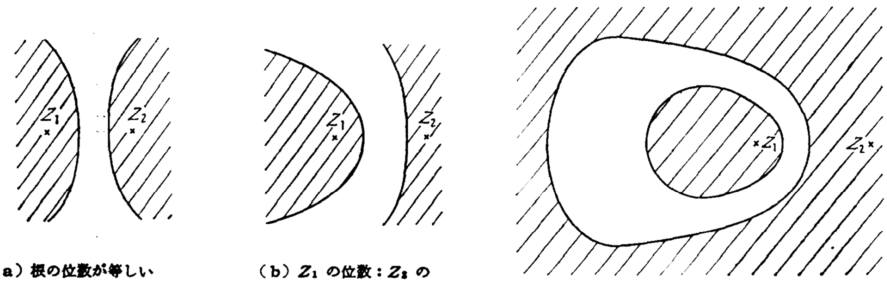
2根が近接している場合も (11) さえ満していればよいが，(11) を満すような z_1 をみつけることができないかもしれないという心配もあろう．しかし (11) はあまり強すぎる条件であり，その場合でも，それぞ

第3表 $Z^2(Z-10)(Z-10\,i)=0,\ \alpha=1$

j	X	Y	DY	i
1	.2000000000 2	.1500000000 2	.1000000000 1	
2	.1320404318 2	.1619371864 2	.1000000000 1	− 1
3	.6241762141 1	.1802662411 2	.1000000000 −1	− 1
5	.1334748391 2	.1215187036 2	.3000000000 −2	1
7	.7882877685 1	.1323946993 2	.9000000000 −3	− 1
10	.2224393379 1	.1487137775 2	.8100000000 −2	− 1
12	.3988607593 1	.1015704860 2	.2430000000 −2	1
14	.3574645810 0	.1040020460 2	.7290000000 −3	− 1
16	.6997537167 0	.5990256686 1	.2187000000 −3	1
19	−.1804110140 −1	.5979265532 1	.1968300000 −2	− 1
20	−.3612843881 −1	.9999967862 1	.1968300000 −4	1
22	−.7562411520 −2	.1001460384 2	.5904900000 −5	− 1
25	−.1477473102 −1	.1000027001 2	.5314410000 −4	1
27	−.1292750410 −2	.1000443238 2	.1594323000 −4	− 1
29	−.1620145087 −2	.1000213352 2	.4782969000 −5	1
31	−.1650340486 −2	.1000176909 2	.1434890700 −5	1
33	−.1650731107 −2	.1000173206 2	.4304672100 −6	1
36	−.2242786368 −2	.1000042744 2	.3874204890 −5	1
38	−.2272667439 −2	.1000016592 2	.1162261467 −5	1
40	−.2272917736 −2	.1000014187 2	.3486784401 −6	1
43	−.1357952058 −2	.1000126098 2	.3138105960 −5	− 1
45	−.1368972292 −2	.1000109472 2	.9414317880 −6	1
47	−.1369087448 −2	.1000107871 2	.2824295364 −6	1
50	−.1674633723 −2	.1000031467 2	.2541865827 −5	1

第4表 $Z^2(Z-10)(Z-10\,i)=0,\ \alpha=1$

j	X	Y	δ	i
1	.5000000000 1	.2000000000 1	.1000000000 1	
2	.7576114980 0	.2541784252 1	.1000000000 1	− 1
3	.1132112420 1	.8747376600 0	.1000000000 −1	1
4	.2725567514 0	.1212338572 1	.1000000000 −3	− 1
7	.4806450159 0	.3339007822 0	.9000000000 −3	1
9	.1564349064 0	.4549915084 0	.2700000000 −3	− 1
11	.3669343521 0	.1030904014 0	.8100000000 −4	1
13	.1689353481 0	.1310561854 0	.2430000000 −4	− 1
16	.5058356510 −1	.1782339508 0	.2187000000 −3	− 1
18	.1275320130 0	.3296140260 −1	.6561000000 −4	1
20	.6020784824 −1	.4182666392 −1	.1968300000 −4	− 1
22	.2012979005 −1	.5563073378 −1	.5904900000 −5	− 1
25	.4961099789 −1	.1420252248 −1	.5314410000 −4	1
27	.2324716258 −1	.1799935275 −1	.1594323000 −4	− 1
29	.7124611690 −2	.2435295389 −1	.4782969000 −5	− 1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
90	.5529622810 −7	.4153217992 −6	.7976644281 −9	− 1
92	.1600819114 −6	.2117400620 −7	.2392993284 −9	1
94	.7899592166 −7	.2654146462 −7	.7178979852 −10	− 1
96	.3624839312 −7	.3373109597 −7	.2153693955 −10	− 1
98	.8455185710 −8	.4667176642 −7	.6461081865 −11	− 1



(a) 根の位数が等しい

(b) Z_1 の位数：Z_2 の位数=1：2 のとき

(c) Z_1 の位数：Z_2 の位数=1：5 のとき

第7図

第5表 $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x^2-y^2=1, \ \alpha=1 \end{cases}$

i	x	y	δ
1	4.00000-00	1.00000-00	1.00000-00
2	3.5835475676-00	2.8920308506-00	1.0000000000-00
3	1.1252203384-00	2.3551205402-00	1.0000000000-02
5	1.5152835896-00	1.3308978009-00	3.0000000000-03
6	1.5980562368-00	1.2273932232-00	3.0000000000-05
8	1.5761008627-00	1.2249414432-00	9.0000000001-06
10	1.5825939588-00	1.2247535610-00	2.7000000000-08
12	1.5807146258-00	1.2247388558-00	8.1000000001-07
14	1.5812622150-00	1.2247336046-00	2.4300000000-07
16	1.5811024577-00	1.2247262763-00	7.2900000001-08
18	1.5811541092-00	1.2247380184-00	2.1870000000-08
20	1.5811436319-00	1.2247269809-00	6.5610000001-09
23	1.5811375209-00	1.2247447589-00	5.9049000001-08
24	1.5811375291-00	1.2247446414-00	5.9049000001-10
26	1.5811375290-00	1.2247446536-00	1.7714700000-10
29	1.5811379104-00	1.2247439425-00	1.5943230000-09
31	1.5811379048-00	1.2247440456-00	4.7829690001-10
34	1.5811392600-00	1.2247447908-00	4.3046721001-09
36	1.5811386952-00	1.2247447504-00	1.2914016300-09
38	1.5811386740-00	1.2247448213-00	3.8742048901-10
40	1.5811386736-00	1.2247448304-00	1.1622614670-10
42	1.5811386736-00	1.2247448312-00	3.4867844011-11
45	1.5811387280-00	1.2247447394-00	3.1381059610-10
47	1.5811387274-00	1.2247447516-00	9.4143178830-11
49	1.5811387274-00	1.2247447520-00	2.8242953649-11

第6表 $\begin{cases} x^3+2y^2-1 \\ 5y^3+x^2-2xy-4=0, \ \alpha=1 \end{cases}$

j	x	y	δ
1	0.00000-40	1.00000-00	5.00000-01
2	-2.9378607702-02	9.5454405614-01	5.0000000000-01
3	-8.2171980363-02	9.1246841368-01	5.0000000000-03
4	-1.3261593346-01	9.0431853387-01	5.0000000000-05
6	-1.8113441245-01	8.9653680103-01	1.5000000000-05
9	-2.2757223770-01	8.8873375053-01	1.3500000000-04
11	-2.7173663331-01	8.8093950549-01	4.0500000000-08
13	-3.1342894753-01	8.7323817692-01	1.2150000000-08
16	-3.5247278446-01	8.6574373003-01	1.0935000000-04
18	-3.8870655265-01	8.5850672763-01	3.2805000000-05
20	-4.2200776402-01	8.5160058605-01	9.8415000001-06
23	-4.5232770792-01	8.4514249498-01	8.8573500001-05
25	-4.7965423119-01	8.3913619219-01	2.6572050000-05
27	-5.0404023797-01	8.3363313880-01	7.9716150001-06
29	-5.2555644550-01	8.2857809770-01	2.3914845000-06
32	-5.4444996443-01	8.2423499119-01	2.1523360500-05
34	-5.6086264932-01	8.2030941410-01	6.4570081501-06
36	-5.7500533687-01	8.1686709659-01	1.9371024450-06
39	-5.8711709026-01	8.1390508550-01	1.7433922005-05
41	-5.9741683231-01	8.1134242702-01	5.2301766016-06
43	-6.0612281257-01	8.0914756204-01	1.5690529805-06
46	-6.1346402682-01	8.0732071348-01	1.4121476824-05
48	-6.1961838705-01	8.0575777206-01	4.2364430473-06

れの根に収束する範囲は**第7図**のうよになっている．（空白の部分は計算誤差によりどちらかに行く）

この範囲については初期のδをいくらにするかにより，理論的に議論するのは困難な問題である．3個またはそれ以上の根がある場合も同じように議論していくことができよう．

次に2元非線型連立方程式を解いてみよう．3.2 の場合は h, g は直交に近いため収束が速い．しかし，3.3 は直交に近くないから収束は遅い．

$$\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \qquad (3\cdot 2)$$

$$\begin{cases} x^3+2y^3-1=0 \\ 5y^3+x^2-2xy-4=0 \end{cases} \qquad (3\cdot 3)$$

（**註**）近似根を求めることができない場合にはこの方法を用いることはできない．しかし与えられた関数が n 次の多項式である場合は，n_1 個の根は単位円の内部にあり，残りの $n_2(=n-n_1)$ 個は単位円の外部および周上にある．その外部にある n_2 個の根は $z=1/z$ なる変換によって，その円の内部に入る．したがって根を求めるという問題は単位円の内部および周上の根を求める問題に置き変えられる．単位円の内部の根を求めるには円をいくつかに分割する．そうしてある範囲には根が入っており，他の範囲にはそうでないようにする．根の入っている範囲に対してはさらに分割をおこない，根の入っている範囲とそうでない範囲とに分割する．

この分割の極限に近い状態では条件（11）を満した近似根となっているから，それを z_1 とすることができる．しかし実用的には適当な分割をおこなったところで z_1 を定めなければならない．

これに対して与えられた関数が一般の場合は，一つのある範囲に対して，その所における位数が0となるからといって，その領域に根がないと断定できないのである．単にその領域での極の位数と零点の位数が等しいということである．

さらに領域に対する偏角を計算するとき，その道が極または零点の上（数値計算では近似的にでも）を通過しているときは偏角は半分になる．このときは領域を少し大きくかまたは小さくするとよい．

これらの計算は HIPAC 103 の FORTRAN（HARP 103）を用いて行なわれた．計算機室の方々に感謝いたします．

計算に御協力願った計算機室の諸氏に感謝の意を表します．

参考文献

二宮理憲：複素根の計算法について，1964，春期，日本数学会応用数学分科会報告集

（昭和40年3月1日受付，同7月7日再受付）