

Volterra 型積分方程式の線型多段公式による数値解 の数値的不安定現象について*

—— 数値解に含まれる打切誤差の漸近的取扱い ——

小 林 光 夫**

1. ま え が き

物理学や工学上の諸問題は、微分方程式で数式化されることが多いが、積分方程式で記述されることも少なくない。特に Volterra 型積分方程式は常微分方程式の初期値問題と関連が深く、その拡張と考えられる。ところで、常微分方程式の初期値問題の数値解法には線型多段公式を用いる方法があるが、この方法を用いると一般に数値解には真の解とは無関係な、いわゆる無縁成分が含まれ、しばしば数値的不安定現象を起こすことが知られている（たとえば中点則、Milne 法など）。この現象については P. Henrici によってかなり詳しい解析がなされた¹⁾。

Volterra 型積分方程式の数値解法についても差分近似法、すなわち未知関数の積分の項を数値積分公式を用いて和の形に分解し、若干の点における未知関数の数値を未知数とする連立方程式に導く方法があるが、特に数値積分公式としてある有限ステップの公式をくりかえし用いる場合が多い（電子計算機などを用いて計算を実行する場合には、長い区間の数値積分公式としてあるステップでのくりかえしを含むのは当然である）。したがって、この場合にも無縁成分を生じて数値的不安定現象を起こすことがあるのではないかと考えられる。積分方程式の数値解法については、最近 B. Noble らによってかなりまとまった研究がなされてきたようであるが²⁾、上にあげた疑問点についてはまだまだ未解決のように思われる。

本論文では、常微分方程式の数値解法からの類推により考察を進め、Volterra 型積分方程式を線型多段

公式で解いたときの数値解に含まれる打切誤差のみならず一般的漸近公式を導き、打切誤差の一般的性質を論じる。

第2種 Volterra 型積分方程式については一般の有限ステップのくりかえしをもつ線型多段公式について議論を進め、Milne 法に相当する Simpson 則である種の方程式を解くと、やはり数値的不安定現象を起こすことを示す。また第1種 Volterra 型積分方程式については、微分あるいは部分積分などにより、第2種に帰着させることをせず、そのまま数値解法を行なうと、線型多段公式としては最も簡単な梯形則を用いたときでさえ、数値解には真の解とは無縁な振動する成分を生じ、数値的不安定現象を起こすことをみる。そして、この振動する無縁成分の除去については伊理により提案された平滑子³⁾が有効に働くことを示す。

なお、以下にあげる定理で既知のものあるいは容易に証明できるものは紙数の都合上証明を省略する。

2. 第2種 Volterra 型積分方程式

2.1 解の存在定理

考察の対象にする方程式は、第2種 Volterra 型正規非線型積分方程式

$$y(x) = \int_a^x F(x, t, y(t)) dt + f(x), \quad x \in [a, b]$$

(1)

とする。ここに $a, b (a < b)$ はある与えられた有限な定数、 $f(x)$ および $F(x, t, y)$ はある与えられた関数で、次の条件をみたす。

(A) $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ において定義された x の一価連続関数である。

(B) $F(x, t, y)$ は $a \leq t \leq x \leq b, -\infty < y < \infty$ において定義された x, t, y の一価関数で、 x について連続である。

(C) 任意の x, t, y, y^* について

$$|F(x, t, y) - F(x, t, y^*)| \leq L |y - y^*| \quad (2)$$

* On Numerical Instability in the Solution of the Volterra Integral Equations by Linear Multistep Methods, by Mitsuo Kobayashi (Division of Research in Mathematical and Physical Sciences, Graduate School, University of Tokyo)

昭和39年12月4日情報処理学会第5回全国大会で講演したものをもとにした。

** 東京大学大学院工学系研究科

となる非負定数 L が存在する (Lipschitz 条件).

(D) 任意の x について

$$\left| \int_a^x F(x, t, f(t)) dt \right| \leq M \quad (3)$$

となる非負定数 M が存在する.

定理 1. 函数 $f(x)$ および $F(x, t, y)$ が条件 (A), (B), (C), (D) をみたすとき, 第 2 種 Volterra 形正規非線形積分方程式 (1) は単一連続解をもつ.

(証明) 略. たとえば文献 4) を参照.

条件 (A), (B), (C), (D) を存在定理の条件と呼ぶことにする.

2.2 解法公式

問題は, h をある正定数 (きざみ幅) とし

$$x = x_n = a + nh, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4)$$

における (1) の解 $y(x_n)$ に対応する数値解 y_n を求めることである. (1) で $x = x_n$ とおくと次式をえる.

$$y(x_n) = \int_a^{x_n} F(x_n, t, y(t)) dt + f(x_n) \quad (5)$$

(5) 式の積分の項を, $x_m, m = 0, 1, \dots, n$ における重み係数 $w_{n,m}$ をもつ数値積分公式でおきかえると, (1) 式の数値解を求める公式

$$y_n = S_n[F_{n,0}, F_{n,1}, \dots, F_{n,n}] + f_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (6)$$

がえられる. ここに

$$S_n[F_{n,0}, F_{n,1}, \dots, F_{n,n}] = h \sum_{m=0}^n w_{n,m} F_{n,m}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (7)$$

$$F_{n,m} = F(x_n, x_m, y_m), \quad m = 0, 1, \dots, n; \quad n = 0, 1, \dots, \quad (8)$$

$$f_n = f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (9)$$

である. 重み係数 $w_{n,m}$ については

$$\sup_{n,m} |w_{n,m}| < \infty$$

を仮定しておく

(7) 式より S_n は $F(x, t, y)$ に作用する線形演算子とも考えられる. (6) 式では, n が小さい場合には数値積分公式の分点の数が少ないので, y_n は $y(x_n)$ の良い近似とはならないであろう. そこで, J をある自然数として, $j = 0, 1, \dots, J-1$ については何らかの方法により精度の良い $y(x_j)$ の近似値 Y_j を求めておき, Y_j を出発値として n が J 以上になってから (6) 式を用いる方法も考えられる. この方法は次の公式

$$\begin{cases} y_j = Y_j, & j = 0, 1, \dots, J-1, \\ y_n = S_n[F_{n,0}, \dots, F_{n,n}] + f_n, & n = J, J+1, \dots \end{cases} \quad (10)$$

で定義される. $J=1$ とすれば (10) 式は (6) 式に帰

着する.

2.3 数値解の存在と一意性

公式 (10) は y_n に関する連立方程式と考えられるが, 任意に与えた出発値 $Y_0, Y_1, \dots, Y_{J-1}$ に対して (10) 式の単一解の列 $\{y_n\}$ が存在するであろうか. また, もし存在するならば実際に求め得るであろうか. $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ が既知のときに単一な y_n を求め得れば, 任意に与えた出発値 $Y_0, Y_1, \dots, Y_{J-1}$ に対して (10) 式は単一解の列 $\{y_n\}$ をもつことは明らかである.

$$y = y_n, \quad \phi(y) = h w_{n,n} F(x_n, x_n, y) + h \sum_{m=0}^{n-1} w_{n,m} F_{n,m} + f_n \quad (11)$$

とおくと (10) 式は次のように書ける.

$$y = \phi(y) \quad (12)$$

さて (12) 式で表わされる型の方程式について, 次の漸化式で定義される手続を考える.

$$y^{(k+1)} = \phi(y^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots \quad (13)$$

ここに $y^{(0)}$ は適当な y の第 0 近似とする. このとき次の定理が成立する.

定理 2. $\phi(y)$ は $-\infty < y < \infty$ において定義された y の一価函数であり, 任意の y, y^* に対して

$$|\phi(y) - \phi(y^*)| \leq L' |y - y^*|, \quad 0 \leq L' < 1$$

となる定数 L' が存在するとき, 次の (1), (2) が成立する.

(1) 方程式 (12) は単一解 y をもつ.

(2) 任意の $y^{(0)}$ に対して (13) 式で定義される数列 $\{y^{(k)}\}$ は解 y に収束する.

(証明) 略. たとえば文献 1) pp. 215~217 を参照.

$F(y)$ が (11) 式で定義され, かつ $F(x, t, y)$ が存在定理の条件をみたしているときには

$$L' = h |w_{n,n}| L \leq h W' L$$

が成りたつ. ここに $W' = \sup_n |w_{n,n}|$ とおいた. したがって h を十分小さくすれば $L' < 1$ となり, (11) 式で定義された $F(y)$ は定理 2 の条件をみたす. $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ が既知のときには (10) 式は $y = y_n$ の方程式として (12) 式のように表わされるから, $y^{(0)}$ として適当な y_n の第 0 近似 (たとえば y_{n-1} でもよい) をとれば (13) 式の手続によって y_n を求め得る. すなわち, 公式 (10) によって数値解 y_n を求めることができる.

2.4 数値解法の収束

連立方程式 (10) は h に依存しているし, 出発値 Y_j は普通 h の函数として

$$Y_j = Y_j(h), \quad j=0, 1, \dots, J-1 \quad (14)$$

で与えられるから、 y_n は n に依存すると同時に h にも依存する。出発値 $Y_0, Y_1, \dots, Y_{J-1}$ を適当に与えたとき y_n が積分方程式 (1) の単一連続解すなわち、真の解 $y(x)$ に収束することが望ましいが、ここで収束の意味や様相について基本的と思われる定義および定理を、常微分方程式の場合の Henrici のやり方にならって積分方程式の場合について、以下に述べる。

定義 $y(x)$ を (1) 式の真の解とする。

$$\lim_{h \rightarrow 0} |Y_j(h) - y(a)| = 0, \quad j=0, 1, \dots, J-1 \quad (15)$$

をみたす出発値 (14) 式によって定まる (10) 式のすべての解 y_n について

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x_n = x}} |y_n - y(x)| = 0, \quad x \in [a, b] \quad (16)$$

が成立つとき、公式 (10) で定義された数値解法が収束するという。

次に積分の項を数値積分公式でおきかえたための差について考える。

$$\begin{aligned} L_n[F(x, t, y); h] \\ = S_n[F(x_n, x_0, y(x_0)), \dots, \\ F(x_n, x_n, y(x_n))] \\ - \int_a^{x_n} F(x_n, t, y(t)) dt \end{aligned} \quad (17)$$

とおくと L_n は $F(x, t, y)$ に作用する線形演算子である。一般の数値積分公式においては

$$L_n[F(x, t, y); h] = O(h^p) \quad (18)$$

であり、 p は自然数である。 p が大きいほど数値積分公式の精度は良い。ここで、この p を演算子 L_n のオーダー (order) と呼ぶことにする。また L_n のオーダーが p である数値解法のことを **オーダー p の数値解法** あるいは **数値解法のオーダーが p である** という。さて公式 (10) で定義される数値解法の収束に関する定理の証明に必要な補助定理を述べておこう。

補助定理 1. z_n は次の連立一次方程式

$$\begin{cases} z_j = Z_j, & j=0, 1, \dots, J-1 \\ z_n = h \sum_{m=0}^n v_{n,m} z_m + u_n, & n=J, J+1, \dots \end{cases} \quad (19)$$

の解とする。 Z, U, V をある非負定数として

$$\left. \begin{aligned} |z_j| &\leq Z, & j=0, 1, \dots, J-1 \\ |u_n| &\leq U, & n=J, J+1, \dots, \\ |v_{n,m}| &\leq V, & m=0, 1, \dots, \\ & & n; n=J, J+1, \dots \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$0 \leq h < V^{-1}$ (すべての $n \geq J$ について $v_{n,n} = 0$ が成りたつときは $h < V^{-1}$ の条件は不要である)。

が成立するとき、 z_n に対する次の評価式が成りたつ。

$$|z_n| \leq (U' + JV'Zh) \exp[V'(n-J)h] \\ n=J, J+1, \dots. \quad (21)$$

ここに U', V' は次式で定義される。

$$\left. \begin{aligned} \text{すべての } n \geq J \text{ について } v_{n,n} &= 0 \text{ のとき} \\ U' &= U, \quad V' = V, \\ \text{しからざるるとき } U' &= (1 - Vh)^{-1}U, \\ V' &= (1 - Vh)^{-1}V. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

(証明) (19) 式を変形し、(20) 式の条件に注意し、(22) 式で定義される U', V' を用いると次の不等式が成立する。

$$|z_n| \leq V'h \sum_{m=0}^{n-1} |z_m| + U', \quad n=J, J+1, \dots.$$

この不等式を $|z_n|$ について解くと

$$|z_n| \leq (U' + JV'Zh)(1 + V'h)^{n-J} \\ n=J, J+1, \dots,$$

を得る。ところで $n=J, J+1, \dots$ について

$$(1 + V'h)^{n-J} \leq \exp[V'(n-J)h]$$

であるから (21) の評価式が成立する。〔証明終り〕

定理 3. オーダが正の数値解法 (10) 式は収束する。

(証明) 数値解に含まれる打切誤差を次式で定義する。

$$e_n = y_n - y(x_n), \quad n=0, 1, \dots. \quad (23)$$

(10) 式から (5) 式を引き (17) 式で定義される L_n を用いると

$$e_n = S_n[G'_{n,0}e_0, \dots, G'_{n,n}e_n] \\ + L_n[F(x, t, y); h] \quad (24)$$

を得る。ここに

$$G'_{n,m} = \begin{cases} e_m^{-1}[F(x_n, x_m, y_m) - F(x_n, x_m, y(x_m))], \\ e_m \neq 0, \\ 0, & e_m = 0 \end{cases} \quad (25)$$

とおいた。(24) 式は $L_n[F(x, t, y); h]$ が n ステップ目における局所打切誤差であることを示している。 $F(x, t, y)$ は存在定理の条件を満足しているから $|G'_{n,m}| \leq L$ が成立する。したがって $W = \sup_{n,m} |w_{n,m}|$ とおけば、(24) 式の右辺の e_m 係数について

$$|w_{n,m} G'_{n,m}| \leq WL$$

が成立する。一方 L_n のオーダーは正であるから、 L'' をある非負定数、 $l(h)$ を $h \rightarrow 0$ のとき $l(h) \rightarrow 0$ となる h の非負関数として次式が成りたつ。

$$|L_n[F(x, t, y); h]| \leq L''l(h).$$

また $e_j, j=0, 1, \dots, J-1$ については出発値誤差を

$$d_j = Y_j - y(x_j), \quad j=0, 1, \dots, J-1 \quad (26)$$

とおけば

$$|e_j| = |d_j| \leq |Y_j(h) - y(a)| + |y(x_j) - y(a)|$$

ところで定理 1 より $y(x)$ は連続であるから

$$\lim_{h \rightarrow 0} |y(x_j) - y(a)| = 0$$

したがって (15) 式を考慮すると

$$\lim_{h \rightarrow 0} e_j = \lim_{h \rightarrow 0} d_j = 0$$

となる。そこで (24) 式に補助定理 1 を適用し、 $z_n = e_n$, $U = L''l(h)$, $V = WL$, $Z = d(h) \equiv \max_j |d_j|$, $n = (x_n - a)/h$ とおけば

$$|e_n| \leq (1 - WLh)^{-1} (L''l(h) + JWLhd(h))$$

$$\exp [(1 - WLh)^{-1} WL(x_n - x_J)]$$

を得る。 $\lim_{h \rightarrow 0} d(h) = 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} l(h) = 0$ であるから

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x_n = x}} |e_n| = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x_n = x}} |y_n - y(x)| = 0, \quad x \in [a, b]$$

ゆえに y_n は解 $y(x)$ に収束する。〔証明終り〕

定理 4. L_n のオーダおよび出発値の誤差がそれぞれ

$$L_n[F(x, t, y); h] = O(h^p)$$

$$d(h) = \max_j |d_j| = O(h^q)$$

と与えられるとき、打切誤差 e_n , $n = J, J+1, \dots$ について

$$e_n = O(h^r), \quad r = \min(p, q+1) \quad (27)$$

が成立する。

(証明) 定理 3 の証明から自明である。

2.5 線形多段公式による打切誤差の漸近的性質

公式 (10) で表わされ、通常よく用いられる方法には、たとえば次に示す (1), (2), (3) がある。

(1) 梯形則

$$\begin{cases} y_0 = Y_0 (= f_0) \\ y_n = h \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} F_{n,m+1} + \frac{1}{2} F_{n,m} \right) + f_n, \\ n=1, 2, \dots \end{cases} \quad (28)$$

(2) Simpson 則⁵⁾

$$\begin{cases} y_j = Y_j, \quad j=0, 1, \dots \\ y_n = \begin{cases} h \sum_{m=0}^{n'-1} \left(\frac{1}{3} F_{n,2m+2} + \frac{4}{3} F_{n,2m+1} + \frac{1}{3} F_{n,2m} \right) \\ + f_n, \quad n' = n/2, \quad n=2, 4, \dots, \\ h \sum_{m=0}^{n'-1} \left(\frac{1}{3} F_{n,2m+3} + \frac{4}{3} F_{n,2m+2} + \frac{1}{3} F_{n,2m+1} \right) \\ + h \left(\frac{3}{8} F_{n,3} + \frac{9}{8} F_{n,2} + \frac{9}{8} F_{n,1} + \frac{3}{8} F_{n,0} \right) \\ + f_n, \quad n' = (n-1)/2, \quad n=3, 5, \dots. \end{cases} \end{cases} \quad (29)$$

$$(30)$$

(3) Gregory の公式⁶⁾

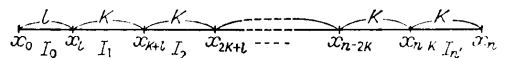
$$\begin{cases} y_j = Y_j, \quad j=0, 1, \\ y_n = h \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} F_{n,m+1} + \frac{1}{2} F_{n,m} \right) \\ - \frac{1}{12} h^2 (F'_{n,n} - F'_{n,0}) + f_n, \\ n=2, 3, \dots \end{cases} \quad (30)$$

ここに $F'_{n,n}$, $F'_{n,0}$ は次式で与えられる。

$$\begin{cases} F'_{n,n} = \frac{1}{2} h^{-1} (3 F_{n,n} - 4 F_{n,n-1} + F_{n,n-2}), \\ F'_{n,0} = \frac{1}{2} h^{-1} (-3 F_{n,2} + 4 F_{n,1} - F_{n,0}). \end{cases}$$

これらの方法は、区間 $I = [x_0, x_n]$ の大部分について S_n をある有限ステップの数値積分公式のくりかえしで構成し、方法 (2), (3) ではさらに区間 I の両端の近傍で適当な補正項をつけ加えたものと考えられる。公式 (10) を用い電子計算機などで計算を実行するときには、数値積分公式の重み係数 $w_{n,m}$ として全く任意のものをを用いることは不可能であり、(1), (2), (3) の方法にも示されているように、区間 I の両端の近傍を除いて $w_{n,m}$ には m の方向に周期性があるのは当然であろう。

本節では、 $f(x)$ および $F(x, t, y)$ がそれぞれ x および x, t, y の十分滑かな函数、すなわち必要な階数連続微分可能な函数であるときに、 $w_{n,m}$ に (区間 I の両端の近傍を除いて) m の方向に K (K は自然数) ステップの周期をもつ線型多段公式を用いて積分方程式 (1) 式を解いたときの数値解に含まれる打切誤差の漸近的な取扱いをする。



用いる数値積分公式 S_n としては

$$l = n \text{ を } K \text{ で割ったときの剰余 } (l=0, 1, \dots, K-1),$$

$$n' = (n-l)/K$$

としたとき、上図のように区間 I を区間 $I_0 = [x_0, x_l]$ および区間 $I_{m+1} = [x_{Km+l}, x_{K(m+1)+l}]$, $m=0, 1, \dots, n'-1$ に分け、区間 I_{m+1} , $m=0, 1, \dots, n'-1$ に対しては重み係数 w_k , $k=0, 1, \dots, K$ ($|w_k| + |w_{k+1}| > 0$) の K ステップの数値積分公式を用い、さらに区間 I の端点 x_n および x_0 の近傍でそれぞれ $K'+1$ 個の係数 $w'_{l,k}$, $k=0, 1, \dots, K'$ および $K''+1$ 個の係数 $w''_{l,k}$, $k=0, 1, \dots, K''$ をもつ補正項を加えることにする。補正項の係数は一般に l によって異なる。補正項がないとき、たとえば梯形則 (28) 式ではその項数を 0、すなわち $K'=K''=-1$ と考えればよい。解

法公式を次式で定義する.

$$\begin{aligned} y_j &= Y_j, \quad j=0, 1, \dots, J-1 \\ y_n &= S_n[F_{n,0}, \dots, F_{n,n}] + f_n, \\ n &= J, J+1, \dots. \end{aligned} \quad (31)$$

ここに S_n は次式で定義される.

$$\begin{aligned} S_n[F_{n,0}, \dots, F_{n,n}] \\ = h \left\{ \sum_{m=0}^{n'-1} \sum_{k=0}^K w_k F_{n,Km+k+l} \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{K'} w_{l,k} F_{n,n-k} + \sum_{k=0}^{K''} w''_{l,k} F_{n,k} \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

(31) 式は (1), (2), (3) の方法を含むかなり一般的な公式である.

さて打切誤差 e_n のみたす方程式を求めよう. (32) 式の S_n から定義される局所打切誤差 $L_n[F(x, t, y); h]$ を求めると, $f(x)$ が十分滑かな函数であるから一般に p をある自然数, $g_l(x)$, $l=0, 1, \dots, K-1$ を x の十分滑かな主要誤差函数として

$$L_n[F(x, t, y); h] = h^p g_l(x_n) + O(h^{p+1}), \quad p \geq 1 \quad (33)$$

と書ける. したがって出発値誤差が

$$d_j = Y_j - y(x_j) = O(h^q), \quad q \geq 1, j=0, 1, \dots, J-1 \quad (34)$$

で与えられるときには定理 4 より $e_n = O(h^r)$, $r = \min(p, q+1)$ となる. このとき (25) 式で定義される $G'_{n,m}$ は

$$G(x, t) = \frac{\partial}{\partial y} F(x, t, y) \Big|_{y=y(t)}, \quad G_{n,m} = G(x_n, x_m) \quad (35)$$

とおくと次式のようになる.

$$G'_{n,m} = G_{n,m} + \begin{cases} O(h^q), & m=0, 1, \dots, J-1, \\ O(h^r), & m=J, J+1, \dots, n. \end{cases} \quad (36)$$

積分方程式が線形のとき, すなわち $F(x, t, y) = K(x, t)y$ と書けるときには $K_{n,m} = K(x_n, x_m)$ とおけば $G'_{n,m} = G_{n,m} = K_{n,m}$ であり $O(h^q)$, $O(h^r)$ の項はない. (33), (36) 式を (24) 式に代入し $2r \geq r+1$, $2q+1 \geq r+1$, $p+1 \geq r+1$ を考慮すると次式を得る.

$$e_n = S_n[G_{n,0e_0}, \dots, G_{n,ne_n}] + h^q g_l(x_n) + O(h^{r+1}). \quad (37)$$

$$s_j = \exp[2\pi ji/K], \quad j=0, 1, \dots, K-1, i = \sqrt{-1} \quad (38)$$

とおき, s_j を用いて e_n を K 個の滑らかな成分に分けてみる. ある x の十分滑らかな函数を $e_j(x)$, $j=0, 1, K-1$ とし

$$\begin{cases} e_j = d_j + r_j, & j=0, 1, \dots, J-1, \\ e_n = \sum_{j=0}^{K-1} s_j^q e_j(x_n) + r_n, & n=J, J+1, \dots \end{cases} \quad (39)$$

とおく. (39) 式を (37) 式に代入し S_n は線形演算子であることに注意すると次式を得る.

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{K-1} s_j^q e_j(x_n) + r_n \\ = S_n[G_{n,0d_0}, \dots, G_{n,J-1}d_{J-1}] \\ + \sum_{j=0}^{K-1} s_j^q G_{n,je_j}(x_J), \dots, \sum_{j=0}^{K-1} s_j^q G_{n,ne_j}(x_n) \\ + S_n[G_{n,0r_0}, \dots, G_{n,n}r_n] + h^p g_l(x_n) \\ + O(h^{r+1}) \\ = \sum_{j=0}^{K-1} S_n[s_j^q G_{n,0e_j}(x_0), \dots, s_j^q G_{n,ne_j}(x_n)] \\ + S_n[G_{n,0r_0}, \dots, G_{n,n}r_n] + h^p g_l(x_n) \\ + D_l G(x_n, a) + O(hD_l) + O(h e_j(x)) \\ + O(h^{r+1}). \end{aligned} \quad (40)$$

ここに D_l は出発値誤差 d_j の線形結合で

$$D_l = S_n[d_0, \dots, d_{J-1}, 0, 0, \dots, 0] = O(h^{q+1}) \quad (41)$$

である. ところで $s_j^K = 1$, $n \equiv l \pmod{K}$ に注意すると

$$\begin{aligned} S_n[s_j^q G_{n,0e_j}(x_0), \dots, s_j^q G_{n,ne_j}(x_n)] \\ = s_j^l \left(\sum_{k=0}^K w_k s_j^k \right) h \sum_{m=0}^{n'-1} G_{n,Km+l} e_j(x_{Km+l}) \\ + O(h e_j(x)) \\ = s_j^l c_j \int_a^{x_n} G(x_n, t) e_j(t) dt + O(h e_j(x)) \end{aligned} \quad (42)$$

を得る. ここに c_j は次式で定義される.

$$c_j = K^{-1} \sum_{k=0}^K w_k s_j^k, \quad j=0, 1, \dots, K-1. \quad (43)$$

したがって (40) 式はさらに次のように変形される.

$$\begin{aligned} r_n = S_n[G_{n,0r_0}, \dots, G_{n,n}r_n] - \sum_{j=0}^{K-1} s_j^l X_j(x_n) \\ + h^p g_l(x_n) + D_l G(x_n, a) + O(h e_j(x)) \\ + O(h^{r+1}). \end{aligned} \quad (44)$$

ここに

$$X_j(x) = e_j(x) - c_j \int_a^x G(x, t) e_j(t) dt \quad (45)$$

とおいた. ここで $X_j(x)$, $j=0, 1, \dots, K-1$ を未知数とする K 元連立 1 次方程式

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{K-1} s_j^l X_j(x) = h^p g_l(x) + D_l G(x, a), \\ l=0, 1, \dots, K-1 \end{aligned} \quad (46)$$

を考える. (46) 式の係数行列式は Vandermonde の行列式で

$$\det(s_j^l) = \prod_{j>k} (s_j - s_k) \neq 0$$

であるから解 $X_j(x)$ が存在する。実際に (46) 式を $X_j(x)$, $j=0, 1, \dots, K-1$ について解くと

$$X_j(x) = h^p G_j(x) + A_j G(x, a) \quad (47)$$

を得る。ここに $G_j(x)$, A_j は次式で定義される。

$$\begin{cases} G_j(x) = K^{-1} \sum_{l=0}^{K-1} s_j^{-l} g_l(x), & j=0, 1, \dots, K-1 \\ A_j = K^{-1} \sum_{l=0}^{K-1} s_j^{-l} D_l = 0(h^{q+1}), \end{cases} \quad (49)$$

$e_j(x)$, $j=0, 1, \dots, K-1$ として積分方程式 (47), すなわち

$$\begin{cases} e_j(x) = c_j \int_a^x G(x, t) e_j(t) dt + h^p G_j(x) \\ \quad + A_j G(x, a), \\ j=0, 1, \dots, K-1 \end{cases} \quad (50)$$

の解を選ぶと $A_j = 0(h^{q+1})$ であるから $e_j(x) = 0(h^r)$ となる。したがって, e_j , $j=0, 1, \dots, J-1$ について $e_j = y_j - y(x_j) = Y_j - y(x_j) = d_j$ であることおよび (40), (45), (46) 式より r_n は次の方程式

$$\begin{cases} r_j = 0, & j=0, 1, \dots, J-1 \\ r_n = S_n[G_{n,0}r_0, \dots, G_{n,n}r_n] + 0(h^{r+1}), \\ n=J, J+1, \dots \end{cases} \quad (51)$$

をみたす。(51) 式に補定理 1 を適用し, $z_n = r_n$, $U = U_0 h^{r+1}$ (U_0 はある非負定数), $V = W''L$ ($W'' = \max_{l,k,k',k''} (w_k, w'_{l,k'}, w''_{l,k''})$), $Z=0$ とおけば $r_n = 0(h^{r+1})$ を得る。

以上より打切誤差の漸近的な性質について次の定理を得る。

定理 5. $f(x)$ および $F(x, t, y)$ がそれぞれ x および x, t, y の十分滑らかな関数であるとき, 線形多段公式 (31) によって積分方程式 (1) を解いたときの数値解に含まれる打切誤差は漸次的に次式で評価される。

$$e_n = \sum_{j=0}^{K-1} s_j^q e_j(x_n) + 0(h^{r+1}), \quad h \rightarrow 0 \quad (52)$$

ここに $s_j = \exp[2\pi j i / K]$, $j=0, 1, \dots, K-1$, $r = \min(p, q+1)$ であり, p, q はそれぞれ (33), (34) 式で与えられ, $e_j(x)$, $j=0, 1, \dots, K-1$ は積分方程式 (50) の解である。

次に (52) 式で表わされる打切誤差の性質について述べておこう。

$$|s_j| = 1, \quad j=0, 1, \dots, K-1$$

であるからある $j=0, 1, \dots, K-1$ について $e_j(x)$ の絶対値が x が増加するとともに増加すると, いわゆる

数値的不安定現象を起こす。

よく用いられる公式 (たとえば前記 (1), (2), (3)) においては $g_l(x)$ は l に依存しない。すなわち

$$g_l(x) = g(x), \quad l=0, 1, \dots, K-1 \quad (53)$$

と書けることが多い。この場合には

$$\begin{aligned} G_j(x) &= (K^{-1} \sum_{l=0}^{K-1} s_j^{-l}) g(x) \\ &= \begin{cases} g(x), & j=0 \\ 0, & j=1, 2, \dots, K-1 \end{cases} \end{aligned} \quad (54)$$

となり, $c_0=1$ であるから (50) 式は次のように表わせる。

$$\begin{cases} e_0(x) = \int_a^x G(x, t) e_0(t) dt + h^p g(x) \\ \quad + A_0 G(x, a) \\ e_j(x) = c_j \int_a^x G(x, t) e_j(t) dt + A_j G(x, a), \\ j=1, 2, \dots, K-1. \end{cases} \quad (55)$$

したがって, $e_j(x)$, $j=1, 2, \dots, K-1$ は出発値誤差の影響のみから生ずる誤差成分であり, 公式 (31) が $K(\geq 2)$ ステップのくりかえしをもつことに起因する。これがいわゆる無縁成分である。 $K=1$ ならばこの成分は生じない。 $e_0(x)$ は出発値誤差および局所打切誤差の主要成分 $h^p g(x)$ の両者の影響によって生じ, いかなる解法公式を使用しても存在し得るいわゆる誤差の主要成分を表わしている。

$g_l(x)$ が l に依存するときには, (50) 式からわかるように局所打切誤差の影響が $e_j(x)$, $j=1, 2, \dots, K-1$ にも入り, 誤差の主要成分, 無縁成分の区別が明確でなくなる。

2.6 常微分方程式との関係

第 2 種 Volterra 型積分方程式は常微分方程式の初期値問題ときわめて深い関係がある。次の常微分方程式の初期値問題を考える。

$$y' = F(x, y), \quad y(a) = Y, \quad x \in [a, b]. \quad (56)$$

(56) 式を K ステップの線型多段公式

$$\begin{cases} y_j = Y_j, & j=0, 1, \dots, K-1 \\ y_{m+K} = y_m + h \sum_{k=0}^{K-1} w_k F_{m+k}, & (F_n = F(x_n, y_n)), \\ m=0, 1, \dots \end{cases} \quad (57)$$

で解いたときの打切誤差 e_n は, 出発値誤差を

$$d_j = Y_j - y(x_j) = 0(h^q), \quad q \geq 1 \quad (58)$$

とすると

$$e_n = \sum_{j=0}^{K-1} s_j^q e_j(x_n) + 0(h^{r+1}) \quad (59)$$

と評価できる。(文献 1) を参照。ここに p (自然数), C を

$$e^{kh} - 1 - h \sum_{k=0}^K w_k s_k^j = \left(\sum_{k=0}^K w_k \right) Ch^{p+1} + O(h^{p+2}),$$

$$s_j = \exp [2 \pi j i / K]$$

で定義すると

$$\begin{cases} e'_0(x) = G(x)e_0(x) + h^p g'(x), & e_0(a) = A'_0 G(a), \\ e'_j(x) = c_j G(x)e_j(x), & e_j(a) = A'_j G(a), \\ j = 1, 2, \dots, K-1, \end{cases} \quad (60)$$

$$G(x) = \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) |_{y=y(x)},$$

$$g(x) = -C \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{p-1} F(t, y(t)) \right]_{t=a}^{t=x},$$

$$c_j = K^{-1} \sum_{k=0}^K w_k s_k^j,$$

$$A'_j = K^{-1} [G(a)]^{-1} \sum_{l=0}^{K-1} s_j^{-l} d_l = O(h^q),$$

$$r' = \min(p, q)$$

である。(60) 式を積分方程式で表わすと次のようになる。

$$\begin{cases} e_0(x) = \int_a^x G(t)e_0(t)dt + h^p g(x) + A'_0 G(a), \\ e_j(x) = c_j \int_a^x G(t)e_j(t)dt + A'_j G(a), \\ j = 1, 2, \dots, K-1. \end{cases} \quad (61)$$

したがって、(59) 式の評価式は (56) 式を積分方程式

$$y(x) = \int_a^x F(t, y(t))dt + Y \quad (62)$$

として公式 (31) で解いたときの打切誤差の評価式と比べると

$$g_l(x) = g(x) = -C \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{p-1} F(t, y(t)) \right]_{t=a}^{t=x},$$

$$l = 0, 1, \dots, K-1 \quad (63)$$

を仮定すれば r' , A'_j が公式 (31) の r , A_j と異なる他は一致している。このことは常微分方程式の数値解法における K ステップ線型多段公式 (57) と積分方程式の数値解法における K ステップ線型多段公式 (31) の間に何らかの関連があることを示唆している。(57) 式は $m=l, K+l, \dots, n'K+l$ ($l=0, 1, \dots, K-1$, $n=n'K+l$) として辺々加えあわせ、 $y_l = Y_l$ を考慮すると次のように書ける。

$$y_n = h \sum_{m=0}^{n'-1} \sum_{k=0}^K w_k F_{K m + k + l} + Y_l. \quad (64)$$

ここでさらに

$$Y_l = h \sum_{k=0}^{K'} w''_{l,k} F_k + Y + t_l, \quad l = 0, 1, \dots, K-1 \quad (65)$$

とおき、(32) 式で定義された S_n を用いると (64) 式は $K' = -1$ として

$$y_n = S_n[F_0, \dots, F_n] + Y + t_l \quad (66)$$

と書ける。ところで (63) 式が成立するためには

$$t_l = d_l + O(h^{p+1})$$

でなければならない。したがって (66) 式は次のようにも書ける。

$$y_n = S_n[F_0, \dots, F_n] + Y + d_l + O(h^{p+1}) \quad (67)$$

(67) 式より次の事柄がわかる。常微分方程式 (56) を K ステップ線型多段公式 (57) で解くことと、それを積分方程式 (62) になおして K ステップ線型多段公式 (31) で解くことはほとんど同じことを意味するが、ただ前者の場合は出発値誤差の影響がステップごとにあらわに現われてくる。このことが r' , A'_j と r , A_j との違いの原因である。実際に打切誤差 e_n のみたす方程式を求めると次式を得る。

$$e_n = S_n[G_0 e_0, \dots, G_n e_n] + h^p g(x_n) + d_l + O(h^{r'+1}),$$

$$G_n = G(x_n). \quad (68)$$

前節と同様に e_n を K 個を成分に分け、(40) 式のように (45) 式に対応する方程式を求めると

$$r_n = S_n[G_0 r_0, \dots, G_n r_n]$$

$$- \sum_{j=0}^{K-1} s_j^l X_j(x_n) + h^p g(x_n) + d_l + O(h^{r'+1}) \quad (69)$$

を得る。ここに

$$X_j(x) = e_j(x) - c_j \int_a^x G(t)e_j(t)dt,$$

$$c_j = K^{-1} \sum_{k=0}^K w_k s_k^j, \quad j = 0, 1, \dots, K-1$$

である。(45) と (69) 式を比べると d_l に $D_l G(a)$ が、 r' に r が対応していることがわかる。また d_l に $D_l G(a)$ を対応させて考えれば、 A'_j と A_j が同じ意味をもつことがわかる。

2.7 例題

梯形則および Simpson 則を用いたときの打切誤差が上記の所論にあうかどうかを、いくつかの例について数値実験を行なって確かめてみた。

(1) 梯形則

公式は (28) 式で与えられる。すなわち (32) 式において

$$K=1, K'=K''=-1, w_0=w_1=1/2, J=1$$

とした場合である。この場合には $l=0$ だけであり、

$$g_0(x) = g_T(x) \equiv \frac{1}{12} \left[\frac{\partial}{\partial t} F(x, t, y(t)) \right]_{t=a}^{t=x}, \quad p=2 \quad (70)$$

である。したがって $e_0(x)$ のみたす方程式は

$$e_0(x) = \int_a^x G(x, t)e_0(t)dt + h^2 g_T(x) + A_0 G(x, a) \quad (71)$$

である。\$J=1\$ であるから出発値は \$Y_0\$ だけでよく、
 $Y_0=f_0=y(x)$ ととれるから $D_0=\frac{1}{2}d_0h=0$ すなわち
 $A_0=0$ にすることができる。以下の例では $A_0=0$ に
 なるようにしてあるから $e_n \sim e_0(x_n)$, $h \rightarrow 0$ である。

〈例1〉 常微分方程式を積分方程式として

解いた例

$$\text{方程式: } y(x) = -\int_0^x y(t)dt + 1.$$

$$\text{真の解: } y(x) = e^{-x}.$$

$e_0(x)$ のみたす方程式は

$$e_0(x) = -\int_0^x e_0(t)dt + \frac{1}{12}h^2(e^{-x}-1).$$

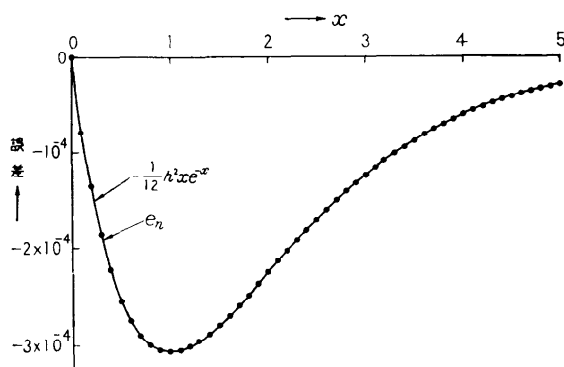
$$e_0(x) = -\frac{1}{12}h^2xe^{-x}.$$

$$\therefore e_n \sim -\frac{1}{12}h^2xe^{-x_n}, \quad h \rightarrow 0. \quad (*)$$

この例は常微分方程式の初期値問題

$$y' = -y, \quad y(0) = 1 \quad (*)$$

を梯形則で解くことに対応している。この場合
 $D_0=0$, $q=\infty$ であるから (*) は常微分方程式
 (*) を梯形則で解いたときの打切誤差の評価式に全く一致している。 $h=0.1$ として計算
 した結果を第1図に示す。



$$\text{方程式: } y(x) = -\int_0^x y(t)dt + 1. \quad \text{真の解: } y(x) = e^{-x}$$

$$\text{出発値誤差: } d_0=0, \quad \text{理論誤差: } -\frac{1}{12}h^2xe^{-x_n}$$

$$\text{きざみ幅: } h=0.1$$

第1図 梯形則による誤差

〈例2〉

$$\text{方程式: } y(x) = -\int_0^x (x-t)y(t)dt + x.$$

$$\text{真の解: } y(x) = \sin x.$$

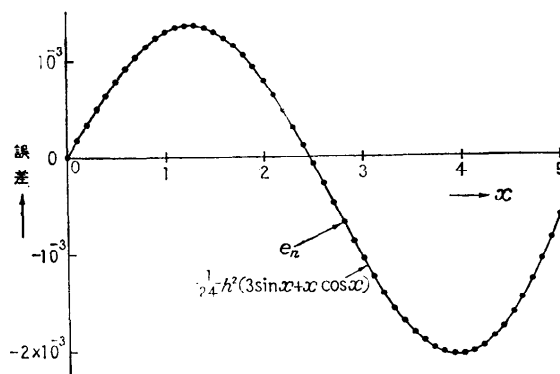
$e_0(x)$ のみたす方程式:

$$e_0(x) = -\int_0^x (x-t)e_0(t)dt + \frac{1}{12}h^2(x + \sin x).$$

$$e_0(x) = \frac{1}{24}h^2(3\sin x + x \cos x)$$

$$\therefore e_n \sim \frac{1}{24}h^2(3\sin x_n + x_n \cos x_n), \quad h \rightarrow 0.$$

$h=0.1$ として計算した結果を第2図に示す。



$$\text{方程式: } y(x) = -\int_0^x (x-t)y(t)dt + x$$

$$\text{真の解: } y(x) = \sin x, \quad \text{出発値誤差: } d_0=0$$

$$\text{理論誤差: } \frac{1}{24}h^2(3\sin x_n + x_n \cos x_n)$$

$$\text{きざみ幅: } h=0.1$$

第2図 梯形則による誤差

〈例1〉, 〈例2〉いずれも計算結果は理論とよい一致を示しているといえよう。

(ii) Simpson 則

公式は (29) 式で与えられる。すなわち
 (32) 式において

$$K=2, \quad K'=-1, \quad K''=3, \quad w_0=w_2=\frac{1}{3},$$

$$w_1=\frac{4}{3}, \quad w''_{0,k}=0, \quad k=0, 1, 2, 3,$$

$$w''_{1,0}=\frac{3}{8}, \quad w''_{1,1}=\frac{9}{8}-\frac{1}{3}, \quad w''_{1,2}=\frac{9}{8}-\frac{4}{3}$$

$$w''_{1,3}=\frac{3}{8}-\frac{1}{3}, \quad J=2$$

とおいた場合である。 n が十分大きいときには

$$g_l(x) = g_s(x) \equiv \frac{1}{180} \left[\frac{\partial^3}{\partial t^3} F(x, t, y(t)) \right]_{t=a}^{t=x},$$

$$l=0, 1, p=4 \quad (72)$$

となる。したがって $e_0(x)$ のみたす方程式は

$$e_0(x) = \int_a^x G(x, t)e_0(t)dt + h^4 g_s(x) + A_0 G(x, a) \quad (73)$$

である。また $s_0=1$, $s_1=-1$ であるから $c_1=-\frac{1}{3}$,
 したがって $e_1(x)$ のみたす方程式は

$$e_1(x) = -\frac{1}{3} \int_a^x G(x, t)e_1(t)dt + A_1 G(x, a) \quad (74)$$

となる。 $J=2$ であるが、 n が小さいときには (72) 式が成立せず、 $g_l(x)$ が l によって異なる。したがって (73), (74) 式によって定義される $e_0(x)$, $e_1(x)$ によって打切誤差の漸近の評価ができるためには、(72) 式が成り立つ最小の n を J' としたとき、 D_0, D_1 が $e_0=d_0, e_1=d_1, e_2, \dots, e_{J'-1}$ の線型結合で構成されと考えねばならない。このため $d_0=d_1=0$ になるよう出発値 Y_0, Y_1 を選べたとしても実際には $A_0 \neq 0, A_1 \neq 0$ となり、無縁成分が励起される。以下の例では $d_0=d_1=0$ に Y_0, Y_1 を選び計算を行なった。

<例 3> 線型の例、方程式は<例 1>と同じである。

$e_0(x)$ のみたす方程式:

$$e_0(x) = -\int_0^x e_0(t) dt + \frac{1}{180} h^4 (e^{-x} - 1) + A_0.$$

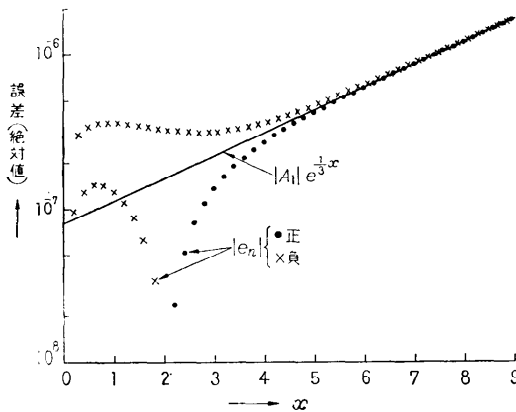
$$e_0(x) = -\frac{1}{180} h^4 x e^{-x} + A_0 e^{-x}.$$

$e_1(x)$ のみたす方程式:

$$e_1(x) = \frac{1}{3} \int_0^x e_1(t) dt + A_1, \quad e_1(x) = A_1 e^{\frac{1}{3}x}.$$

$$\therefore e_n \sim -\frac{1}{180} h^4 x_n e^{-x_n} + A_0 e^{-x_n} + A_1 (-1)^n e^{\frac{1}{3}x_n}.$$

$e_0(x)$ は x を十分大きくすれば 0 に収束するが、 $|e_1(x)|$ は x の増加函数であるから、誤差には x が増加するとともに増加する振動成分が現われ数値的不安定現象を起こす。<例 1>と同様に、この場合は常微分方程式 (*2) をいわゆる Milne 法で解くことに対



方程式: $y(x) = -\int_0^x y(t) dt + 1$
 真の解: $y(x) = e^{-x}$, 出発値誤差: $d_0=d_1=0$
 理論誤差: $-\frac{1}{180} h^4 x e^{-x} + A_0 e^{-x} + A_1 (-1)^n e^{\frac{1}{3}x}$
 きざみ幅: $h=0.1$

第 3 図 Simpson 則による誤差

応している。 $h=0.1$ として計算した結果を第 3 図に示す。

<例 4> 非線型の例

方程式:

$$y(x) = -\int_0^x (1+x-t)[y(t)]^2 dt + 1 + x + \frac{1}{2}x^2.$$

真の解: $y(x)=1$.

$e_0(x)$ のみたす方程式:

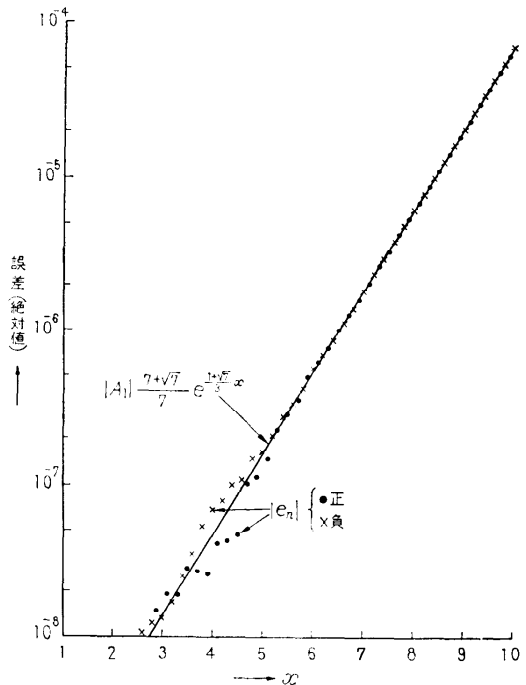
$$e_0(x) = -2 \int_0^x (1+x-t)e_0(t) dt - 2A_0(1+x).$$

$$e_0(x) = -2A_0 e^{-x} \cos x.$$

$e_1(x)$ のみたす方程式:

$$e_1(x) = \frac{2}{3} \int_0^x (1+x-t)e_1(t) dt - 2A_1(1+x).$$

$$e_1(x) = -A_1 \left\{ \frac{7+\sqrt{7}}{7} \exp\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}x\right) + \frac{7-4\sqrt{7}}{7} \exp\left(\frac{1-\sqrt{7}}{3}x\right) \right\}.$$



方程式: $y(x) = -\int_0^x (1+x-t)[y(t)]^2 dt + 1 + x + \frac{1}{2}x^2$
 真の解: $y(x)=1$, 出発値誤差: $d_0=d_1=0$
 理論誤差: $-2A_0 e^{-x} \cos x - A_1 (-1)^n \times \left\{ \frac{7+\sqrt{7}}{7} e^{\frac{1+\sqrt{7}}{3}x} + \frac{7-4\sqrt{7}}{7} e^{\frac{1-\sqrt{7}}{3}x} \right\}$

きざみ幅: $h=0.1$

第 4 図 Simpson 則による誤差

$$\begin{aligned} \therefore e_n \sim & -2A_0 e^{-x_n} \cos x_n - A_1 (-1)^n \\ & \left\{ \frac{7+\sqrt{7}}{7} \exp\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3} x_n\right) \right. \\ & \left. + \frac{7-4\sqrt{7}}{7} \exp\left(\frac{1-\sqrt{7}}{3} x_n\right) \right\}. \end{aligned}$$

$x \rightarrow \infty$ のとき $e_0(x) \rightarrow 0$ であるが、 $e_1(x)$ には x とともに増大する成分 $\exp\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3} x\right)$ が含まれているから、誤差には増大する振動成分が現われ、数値的不安定現象を起こす。 $h=0.1$ として計算した結果を第4図に示す。

3. 第1種 Volterra 型積分方程式

第1種 Volterra 型積分方程式の解法は、第2種 Volterra 型積分方程式に比べて、解析的にも数値的にも困難な問題を多く含んでいる。方程式が線型の場合には、微分あるいは部分積分などの操作により、第2種の方程式に帰着させて解くのが普通である。ここでは第2種の方程式に帰着させずに、積分の項を数値積分公式でおきかえ、そのまま解いたときの数値解に含まれる打切誤差の振舞について、数値積分公式として梯形則を用いた場合についてのみ簡単に考察する。

3.1 解の存在定理

考察の対象にする方程式を第1種 Volterra 型線型積分方程式

$$\int_a^x K(x, t) y(t) dt = f(x), \quad x \in [a, b] \quad (75)$$

とする。ここに $a, b (a < b)$ はある与えられた有限な定数であり、 $f(x)$ および $K(x, t)$ はある与えられた関数で次の条件をみたすものとする。

(E) $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ において定義された x の一価関数で十分滑らかとする。

(F) $K(x, t)$ は $a \leq t \leq x \leq b$ において定義された x, t の一価関数で十分滑らかとする。

(G) 任意の x について

$$|K(x, x)| \geq \epsilon > 0 \quad (76)$$

となる正定数が存在する。

定理 6. 関数 $f(x)$ および $K(x, t)$ が条件 (E), (F), (G) をみたすとき、第1種 Volterra 型線型積分方程式 (75) は十分滑らかな単一解をもつ。

(証明) 略。たとえば文献 4) の pp. 15~76 を参照。

3.2 梯形則による打切誤差の漸近的性質

(75) 式を梯形則で解く公式は次式で与えられる。

$$\begin{cases} y_0 = Y_0, \\ S_n[K_{n,0}y_0, \dots, K_{n,n}y_n] = f_n, \\ n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (77)$$

ここに

$$\begin{aligned} S_n[K_{n,0}y_0, \dots, K_{n,n}y_n] \\ = h \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} K_{n,m+1} y_{m+1} + \frac{1}{2} K_{n,m} y_m \right), \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} K_{n,m} &= K(x_n, x_m), \\ m &= 0, 1, \dots, n; \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (79)$$

とおいた。 h, x_n, f_n, y_n, Y_0 の意味は第2種の方程式のときと同じである。

(76) 式より $K_{n,n} \neq 0, x_n \in [a, b]$ であるから (77) 式によって逐次数値解 y_n を求めることができる。数値解に含まれる打切誤差を、数値解と真の解との差

$$e_n = y_n - y(x_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (80)$$

で定義し、 e_n のみたす方程式を求めると次式を得る。

$$\begin{aligned} S_n[K_{n,0}e_0, \dots, K_{n,n}e_n] &= h^2 g(x_n) \\ &+ h^4 g^*(x_n) + O(h^6), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (81)$$

ここに

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{1}{12} \left[\frac{\partial}{\partial t} (K(x, t) y(t)) \right]_{t=a}^{t=x}, \\ g^*(x) &= \frac{1}{720} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^3 (K(x, t) y(t)) \right]_{t=a}^{t=x} \end{aligned} \quad (82)$$

であり、 $f(x)$ は十分滑らかであるから、 $g(x), g^*(x)$ も十分滑らかな関数である。(81) 式を出発値

$$d_0 \equiv Y_0 - y(x_0) = 0(h^2), \quad q \geq 2 \quad (83)$$

を与えて解いたときの解 e_n の性質を調べる。ここで e_n の漸近的な取り扱いをするために必要な補助定理を証明しよう。

補助定理 2. z_n は次の連立1次方程式

$$\begin{cases} z_0 = Z \\ S_n[K_{n,0}z_0, \dots, K_{n,n}z_n] = h^p a_n, \\ n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (84)$$

の解とする。ここに $S_n, K_{n,m}$ はそれぞれ (78), (79) で定義される。 a_n がある x の十分滑らかな関数 $a(x)$ によって

$$a_n = a_n(x_n) + O(h), \quad h \rightarrow 0, x_n \in [a, b] \quad (85)$$

と表わされ、 Z をある非負定数として

$$|Z_0| \leq Z$$

が成りたつとき、 z_n に対する次の評価式が成立する。

$$\begin{aligned} |z_n| &\leq (U_1 h^p + U_2 h^{p-1} + U_3 Z \\ &+ V Z h) \exp[V(n-1)h], \\ n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (86)$$

ここに U_1, U_2, U_3, V はある非負定数である。

(証明) (84) 式から (84) 式の n を1だけ減じた

式を引き

$$\left. \begin{aligned} b_n &= 2K_{n,n}^{-1}h^{-1}(a_n - a_{n-1}), \quad n=2, 3, \dots, \\ c_{n,n-1} &= K_{n,n}^{-1}h^{-1}(\bar{K}_{n,n} - \bar{K}_{n,n-1} \\ &\quad - \bar{K}_{n,n-1} - \bar{K}_{n-1,n-1}), \\ n &= 2, 3, \dots, \\ c_{n,m} &= -2K_{n,n}^{-1}h^{-1}(K_{n,m} - K_{n-1,m}), \\ m &= 1, 2, \dots, n-2; n=2, 3, \dots, \\ c_{n,0} &= -K_{n,n}^{-1}h^{-1}(K_{n,0} - K_{n-1,0}), \\ n &= 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

とおくと次式を得る.

$$z_n + z_{n-1} = h \sum_{m=0}^{n-1} c_{n,m} z_m + h^p b_n, \quad n=2, 3, \dots \quad (88)$$

(88) 式をさらに変形すると次のようになる.

$$z_n = h \sum_{m=0}^{n-1} v_{n,m} z_m + u_n, \quad n=2, 3, \dots \quad (89)$$

ここに

$$\left\{ \begin{aligned} v_{n,m} &= \sum_{j=0}^{n-m-1} (-1)^j c_{n-j,m}, \quad m=0, 1, \dots, \\ &\quad n-1; n=2, 3, \dots, \\ u_n &= h^p \sum_{j=0}^{n-2} (-1)^j b_{n-j} + (-1)^{n-1} z_1, \\ n &= 2, 3, \dots \end{aligned} \right. \quad (90)$$

とおいた. (89) および (90) 式は $n=2, 3, \dots$ に對して成立する式であるが, (90) 式で $n=1$ とおくと $v_{1,0}=0, u_1=z_1$ となり (89) 式は $n=1$ でも成立している. ところで (87) 式より

$$\left\{ \begin{aligned} b_n &= b(x_n) + O(h), \quad b(x) = 2a'(x)/K(x, x), \\ n &= 2, 3, \dots, \\ c_{n,n-1} &= c^+(x_n) + O(h), \quad c^+(x) = (K_x(x, x) \\ &\quad - K_x(x, x))/K(x, x), \quad n=2, 3, \dots, \\ c_{n,m} &= c(x_n, x_m) + O(h), \quad c(x, t) = -2K_x(x, t)/ \\ &\quad K(x, x), \quad m=1, 2, \dots, n-2; n=2, 3, \\ &\quad \dots, \\ c_{n,0} &= c^-(x) + O(h), \quad c^-(x) = -K_x(x, a)/K(x, x), \\ n &= 2, 3, \dots \end{aligned} \right.$$

が成立し, $K(x, t)$ および $a(x)$ は十分滑らかであるから, $b(x), c^+(x), c(x, t), c(t)$ は十分滑らかである. したがって

$$\begin{aligned} |v_{n,m}| &\leq V, \quad m=0, 1, \dots, n-1; n=1, 2, \dots, \\ |u_n| &\leq U_1 h^p + |K_{1,1}^{-1}(2h^{p-1}a_1 - K_{1,0}Z_0)| \leq U_1 h^p \\ &\quad + U_2 h^{p-1} + U_3 Z, \quad n=1, 2, \dots \end{aligned}$$

をみたすある非負定数 U_1, U_2, U_3, V が存在する.

(89) 式に補助定理 1 を適用し, $J=1, U=U_1 h^p + U_2 h^{p-1} + U_3 Z$ とおけば (86) を得る. [証明終り]

さて e_n がある x の十分滑らかな函数 $e_0(x)$ および $e_1(x)$ によって漸次的に $e_n \sim e_0(x_n) + (-1)^n e_1(x_n)$.

$h \rightarrow 0$ と表わせないか調べてみる.

$$\left\{ \begin{aligned} e_0 &= d_0 + r_0, \\ e_n &= e_0(x_n) + (-1)^n e_1(x_n) + r_n, \\ n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \right. \quad (91)$$

とおき, (91) 式を (81) 式に代入しかなりめんどろな計算を実行すると次式を得る.

$$\begin{aligned} S_n[K_{n,0}r_0, \dots, K_{n,n}r_n] \\ = - \int_a^{x_n} K(x_n, t) e_0(t) dt + h^2 g(x_n) \\ - \frac{1}{4} h^2 (-1)^n \psi(x_n, x_n) \\ + \frac{1}{2} h K_{n,0}[e_0(a) + e_1(a) - d_0] + h^4 a_n \end{aligned} \quad (92)$$

ここに

$$\psi(x, t) = K(x, t) e_1'(t) + K_t(x, t) e_1(t) \quad (93)$$

$$a_n = a(x_n) + O(h^2) \quad (94)$$

$$a(x) = g^*(x) + g^{**}(x) \quad (95)$$

$$\left\{ \begin{aligned} g^{**}(x) &= -\frac{1}{12} h^{-2} \left[\frac{\partial}{\partial t} (K(x, t) e_0(t)) \right]_{t=a}^{t=x} \\ &\quad + \frac{1}{4} h^{-2} \psi(x, a) \end{aligned} \right. \quad (96)$$

とおいた. いま $e_0(x)$ および $e_1(x)$ として, それぞれ積分方程式

$$\int_a^x K(x, t) e_0(t) dt = h^2 g(x) \quad (97)$$

および常微分方程式の初期値問題

$$\left\{ \begin{aligned} \psi(x, x) &= K(x, x) e_1'(x) \\ &\quad + K_t(x, x) e_1(x) = 0, \\ e_1(a) &= d_0 - e_0(a) \end{aligned} \right. \quad (98)$$

の解をとることにする. このとき出発値誤差について $e_0 = d_0$ が成りたつことおよび (92), (97), (98) 式を考慮すると r_n のみたす次の方程式を得る.

$$\left\{ \begin{aligned} r_0 &= 0, \\ S_n[K_{n,0}r_0, \dots, K_{n,n}r_n] &= h^4 a_n, \\ n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \right. \quad (99)$$

ところで (97) 式より $e_0(x) = 0(h^2), d_0 = 0(h^2), q \geq 2$ であるから (98) 式より $e_1(x) = 0(h^2)$, したがって (96) 式より $g^{**}(x) = 0(1)$ が成りたつから a_n は十分滑らかな函数 (95) 式によって (94) 式のように表わされる. そこで (99) 式に補助定理 2 を適用し, $z_n = r_n, Z=0$ とおけば $r_n = 0(h^3)$ を得る. 以上より次の定理を得る.

定理 7. $f(x)$ および $K(x, t)$ がそれぞれ x および x, t の十分滑らかな函数であるとき, 梯形則によ

って積分方程式 (75) を解いたときの数値解に含まれる打ち誤差は漸近的に次式で評価される。

$$e_n = e_0(x_n) + (-1)^n e_1(x_n) + O(h^3), \quad h \rightarrow 0 \quad (100)$$

ここに $e_0(x)$, $e_1(x)$ はそれぞれ (97), (98) 式の解として定義される函数である。

ここで (100) 式で表わされる打ち誤差の性質について、第2種の方程式を梯形則で解いた場合と比較して述べておこう。第2種の方程式の場合には、2.7 節の例題のところで示したように、打ち誤差は滑らかな成分 $e_0(x)$ のみから成るが、第1種の場合には、(100) 式からわかるように、打ち誤差には振動する無縁成分 $(-1)^n e_1(x_n)$ が含まれ、 $|e_1(x)|$ が x の増加函数である場合には、いわゆる数値的不安定現象を起こす。また第2種の場合には $d_0=0$ にとれば理論的には出発値誤差の影響を除くことができるが、第1種の場合には常微分方程式 (98) の初期条件のきめ方に $e_0(a)$ が関与し、一般に $e_0(a) \neq 0$ であるから $d_0=0$ としても $e_1(x)$ の成分が生じることになる。

3.3 例題

<例5> 無縁成分の増大する例

$$\text{方程式: } \int_0^x (1+x-t)y(t)dt = -1+x+e^{-x}.$$

$$\text{真の解: } y(x) = xe^{-x}.$$

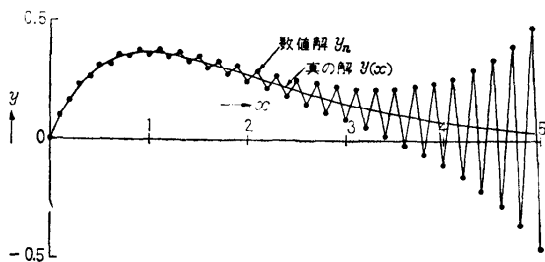
$e_0(x)$ のみたす方程式:

$$\int_0^x (1+x-t)e_0(t)dt = -\frac{1}{12}h^2\{(1-2x)e^{-x} - (1+x)\}.$$

$$e_0(x) = \frac{1}{12}h^2(x-1)(x-4)e^{-x}.$$

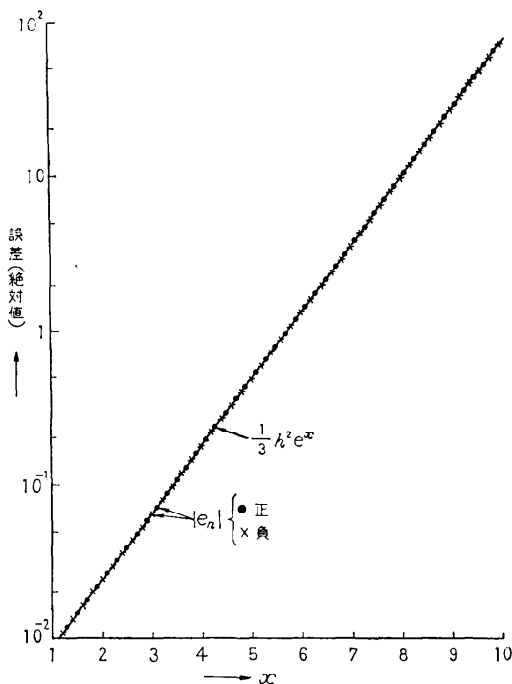
$e_1(x)$ のみたす方程式:

$$e_1'(x) - e_1(x) = 0, \quad e_1(0) = d_0 - \frac{1}{3}h^2.$$



$$\begin{aligned} \text{方程式: } \int_0^x (1+x-t)y(t)dt &= -1+x+e^{-x} \\ \text{真の解: } y(x) &= xe^{-x}, \quad \text{出発値: } Y_0=0 \\ \text{きざみ幅: } h &= 0.1 \end{aligned}$$

第5図 梯形則による数値解



$$\text{方程式: } \int_0^x (1+x-t)y(t)dt = -1+x+e^{-x}$$

$$\text{真の解: } y(x) = xe^{-x}, \quad \text{出発値誤差: } d_0=0$$

$$\text{理論誤差: } \frac{1}{12}h^2(x-1)(x-4)e^{-x} - \frac{1}{3}h^2(-1)^n e^{x_n}$$

$$\text{きざみ幅: } h=0.1$$

第6図 梯形則による誤差

$$e_1(x) = \left(d_0 - \frac{1}{3}h^2\right)e^x$$

$$\therefore e_n \sim \frac{1}{12}h^2(x_n-1)(x_n-4)e^{-x_n}$$

$$+ \left(d_0 - \frac{1}{3}h^2\right)(-1)^n e^{x_n}$$

$|e_0(x)|$ は x が増加するとともに急激に減少するが、 $|e_1(x)|$ は x の増加函数であるから、誤差には増大する振動成分が現われることになる。第5図、第6図に $h=0.1$, $d_0=0$ として計算したときの数値解および誤差を示す。

<例6> 無縁成分の減少する例

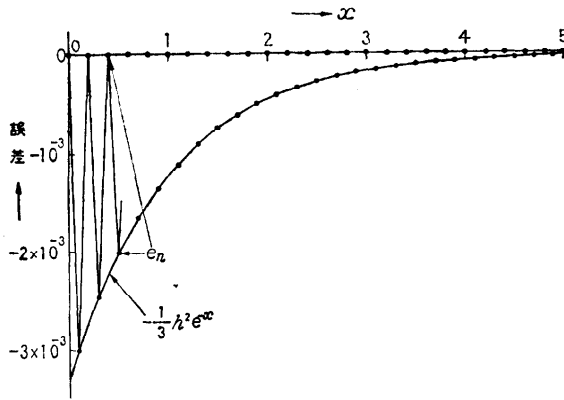
$$\text{方程式: } \int_0^x e^{-x+t}y(t)dt = \frac{1}{3}x^3e^{-x}.$$

$$\text{真の解: } y(x) = x^2e^{-x}.$$

$e_0(x)$ のみたす方程式:

$$e_0(x) = -\frac{1}{6}h^2e^{-x}.$$

$e_1(x)$ のみたす方程式:



方程式: $\int_0^x e^{-x+t} y(t) dt = \frac{1}{3} x^2 e^{-x}$, 真の解: $y(x) = x^2 e^{-x}$

出発値誤差: $d_0 = 0$

理論誤差: $-\frac{1}{6} h^2 (1 - (-1)^n) e^{-x_n}$

きざみ幅: $h = 0.1$

第7図 梯形則による誤差

$$e_1(x) = \left(d_0 + \frac{1}{6} h^2\right) e^{-x}.$$

$$\therefore e_n \sim -\frac{1}{6} h^2 e^{-x_n} + \left(d_0 + \frac{1}{6} h^2\right) (-1)^n e^{-x_n}.$$

$h = 0.1, d_0 = 0$ として計算した結果を第7図に示す.

3.4 平滑子による無縁成分の除去

平滑子の理論⁹⁾を上記の無縁成分の除去へ応用する一方法を述べる.

打ち切誤差を $e_n = e_0 + e_1$ と分け, $e_n \sim e_0(x_n)$, $h \rightarrow 0$ とすれば

$$e_1 \sim (-1)^n e_1(x_n), \quad h \rightarrow 0 \quad (101)$$

である. したがって e_n は無縁成分を表わし, 次の一次同次方程式の解である.

$$\begin{cases} e_0 = d_0 - e_0(a), \\ S_n[K_{n,0}e_0, \dots, K_{n,n}e_n] = 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (102)$$

以下 e_n についてのみ考察するが, 混同のない限り e_n の真下の添字 1 は省略することにする.

(77) 式をみたす数列 $\{y_n\}$ にある線形演算子 $\bar{Y}$ を作用させ演算

$$\bar{y}_n = \bar{Y}y_n \quad (103)$$

によって新しい数列 $\{\bar{y}_n\}$ を作る. (77) 式の計算が第 n ステップに来たとき, y_{n-j} , $j = 0, 1, \dots, J-1$ の代わりに $\bar{y}_{n-j}$, $j = 0, 1, \dots, J-1$ を用いて次のステップの計算をすることにする. このとき第 n ステップまでの無縁成分のみたす方程式は (102) 式である

が, 次のステップに含まれる無縁成分は

$$S_{n+1}[K_{n+1,0}e_0, \dots, K_{n+1,n-J}e_{n-J}, K_{n+1,n-J+1}\bar{e}_{n-J+1}, \dots, K_{n+1,n}\bar{e}_n, K_{n+1,n+1}e_{n+1}] = 0 \quad (104)$$

をみたす. ここに

$\bar{e}_n = \bar{y}_n$ に含まれる無縁成分

である. (104) 式を変形すると次式を得る.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} h K_{n+1,n+1} e_{n+1} + h K_{n+1,n} \left(\bar{e}_n - \frac{1}{2} e_n \right) \\ & + h \sum_{j=1}^{J-1} K_{n+1,n-j} (\bar{e}_{n-j} - e_{n-j}) \\ & + h \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} K_{m+1,m+1} e_{m+1} + \frac{1}{2} K_{n+1,m} e_m \right) = 0 \end{aligned} \quad (105)$$

ところで $K(x, t)$ が十分滑らかであり, e_m ,

$m = 0, 1, \dots, n$ については (101) および

(102) 式が成立することを考慮すると

$$h \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} K_{n+1,m+1} e_{m+1} + \frac{1}{2} K_{n+1,m} e_m \right) = 0 (h^2 e_n)$$

を得る. したがって (105) 式より

$$\begin{aligned} e_{n+1} = & -2 K_{n+1,n+1}^{-1} \left\{ K_{n+1,n} \left(\bar{e}_n - \frac{1}{2} e_n \right) \right. \\ & \left. + \sum_{j=0}^{J-1} K_{n+1,n-j} (\bar{e}_{n-j} - e_{n-j}) \right\} + 0(h e_n) \end{aligned} \quad (106)$$

を得る. (106) 式は, 第 n ステップまでの無縁成分が次のステップへ及ぼす影響の仕方を示している. (106) 式の右辺の初項は演算 $\bar{Y}$ による項であるから, この項を小さくするように $\bar{Y}$ をきめれば, y_{n+1} に含まれる無縁成分の影響を高々 $O(h e_n)$ にとどめることができる.

$$\bar{y}_{n-j} = y_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, J-1 \quad (107)$$

にとれば $\bar{e}_{n-j} = e_{n-j}$, $j = 1, 2, \dots, J-1$ となるので $\sum_{j=0}^{J-1} K_{n+1,n-j} (\bar{e}_{n-j} - e_{n-j}) = 0$ となる. そこで, y_n に含まれる無縁成分を h^{M-1} のオーダーまで除去し, 有効成分は $h^N (N \geq 2)$ のオーダーまで保存する平滑子を $\bar{Y}$ とし

$$\bar{y}_n = \bar{Y}y_n, \quad \bar{e}_n = \bar{y}_n \text{ に含まれる無縁成分}$$

とおくと, $\bar{e}_n = 0(h^M e_n)$ であるから, いま $\bar{y}_n$ を

$$\bar{y}_n = \frac{1}{2} (\bar{y}_n + y_n) \quad (108)$$

と定義し, $\bar{Y}$ を (107) および (108) で定義すれば

$$\bar{e}_n = \frac{1}{2} e_n + 0(h^M e_n) \quad (109)$$

が成立する. したがって $M \geq 1$ であれば, (106) お

よび (109) 式より

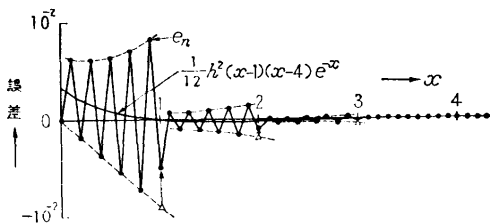
$$e_{n+1} = 0(h e_n)$$

となる。以上から、計算途中で無縁成分が目立って来たときには、無縁成分を $h^{M-1} (M \geq 1)$ のオーダーまで除去する平滑子 $\bar{Y}$ を用いて $\bar{y}_n$ を作り、 y_n の代わりに (108) 式で定義される $\bar{y}_n$ を用いて次のステップへ計算を進めれば、無縁成分による数値解の擾乱を (次のステップに移るときに無縁成分による誤差がおおよそ h 倍になる程度に) 防げることがわかる。

上記の所論を確かめるために〈例 5〉に対して平滑を行なった結果を第 8 図に示す。平滑子としては

$$\bar{y}_n = \bar{Y} y_n \equiv \frac{1}{16} (11 y_n + 12 y_{n-1} - 6 y_{n-2} - 4 y_{n-3} + 3 y_{n-4})$$

を用いた。これは $M=N=2$ であり、常微分方程式の数値解法において、中点則などによって生じる不安定現象を除去するための平滑子そのものである。第 8 図では、よく振動が抑えられる様子がわかる。なお平滑操作は 10 ステップごとに行なった。



平滑子: $\bar{y}_n = \frac{1}{2}(y_n + \bar{y}_n)$ を y_n の代わりに用いる。

$$\bar{y}_n = \frac{1}{16} (11 y_n + 12 y_{n-1} - 6 y_{n-2} - 4 y_{n-3} + 3 y_{n-4})$$

平滑区間: 10 ステップ
きざみ幅: $h=0.1$

第 8 図 平滑子による無縁成分の除去

4. あとがき

以上で、Volterra 型積分方程式の線型多段公式による数値解に含まれる打切誤差の漸近的性質を明らかにし、数値例をあげて理論と計算結果とがかなり良い一致を示すことをみた。

第 2 種の方程式については、ある種の方程式を Simpson 則で解くと数値的不安定現象を起こすことがわかった。

また第 1 種では、梯形則でさえも不安定現象を起こ

すが、この不安定現象は平滑子によって除去が可能である。第 1 種については梯形則の場合だけを取り扱い、一般の K ステップ線型多段公式を用いた場合についてはここでは割したが、この場合には第 2 種に比べて非常に複雑になり、たとえば Simpson 則を用いた場合でも数値解は本質的に収束せず強い不安定現象を起こすようである。第 1 種の方程式は第 2 種に帰着することが容易なときはそうしてから数値的に処理するのが良いように思われる。

第 1 種の方程式を一般の線型多段公式で解いた場合、第 2 種の方程式の不安定成分の除去、丸め誤差などについては機会を改めて報告したい。

最後に、この研究をまとめるにあたり、終始懇切な御助言、御指導をいただいた東京大学の森口繁一教授、伊理正夫助教授に心から感謝いたします。

参考文献

- 1) Henrici, P.: Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1962.
- 2) Noble, B.: The Numerical Solution of Nonlinear Integral Equations and Related Topics. Nonlinear Integral Equations (P.M. Anselone, ed.), Madison, The University of Wisconsin Press, 1964, pp. 215~318.
- 3) 伊理正夫: 常微分方程式の数値解法における不安定現象に対する一対策——平滑子の理論, 設計公式および使用例. 情報処理, 4 巻, 5 号 (1963), 249~260 頁.
- 4) Tricomi, F.G.: Integral Equations, Interscience Publishers, Inc., New York, 1957.
- 5) Landet, M., and H. Oulés: Surl'intégration numérique des équations intégrales du type de Volterra. Symposium on the numerical treatment of ordinary differential equations, integral and integro-differential equations, Proceedings of the Rome Symposium (20-24 September 1960) Organized by the Provisional International Computation Centre, Birkhäuser Verlag Basel, 1960.
- 6) 三浦大亮: Volterra 形積分方程式の解法. 情報処理, 5 巻, 4 号 (1964), 216~218 頁 (プログラムのページ 6406.).
- 7) 小林光夫: Volterra 形積分方程式のある数値解に含まれる誤差の理論的および実験的検討. 情報処理学会, 昭和 39 年度第 5 回全国大会講演予講集, 57~58 頁.

(昭和 40 年 7 月 19 日受付)