

## プログラムのページ

担当一松信

## 6606. ある行列の固有値に対する数値実験

中島勝也(早稲田大学理工学部)

野中隆一(久保田鉄工所)

$n$ 次正方行列 $A$ は、対角要素の上下各斜1列が1でその他のすべての要素は0であるような3重対角行列としよう。すなわち

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

さてその行列は

$$S = (s_{ij}),$$

$$s_{ij} = \sin \frac{i \times j \times \pi}{n+1}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

なる行列で相似変換をすると、対角行列になる。

$$SAS^{-1} = A,$$

$$A = \langle \lambda_i \rangle = \langle \lambda_i \delta_{ij} \rangle, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

$$\lambda_i = 2 \cos \frac{i \times \pi}{n+1}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

3角法の公式

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^n \sin \frac{p \times q \times \pi}{n+1} \cdot \sin \frac{p \times q \times \pi}{n+1} \\ &= \frac{n+1}{2} \times \delta_{q,r} = \begin{cases} \frac{n+1}{2} \cdots \cdots q=r \\ 0 \cdots \cdots q \neq r \end{cases} \end{aligned}$$

により $S$ 逆行列 $S^{-1}$ は

$$S^{-1} = \frac{2}{n+1} S$$

と定まり、これにより

$$A = \frac{2}{n+1} SAS$$

となるのだが、このことをたしかめたのが第1図のプログラムの結果である第1表および第2表である。

さて、この行列の固有多項式は、つぎの漸化式

$$p_n(x) = x p_{n-1}(x) - p_{n-2}(x)$$

と初期条件

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x$$

で与えられるチェビシェフ多項式で、根は区間 $(-2, 2)$ 内にあり、すべて単根である。 $|x| < 2$ のとき

$$x = 2 \cos \theta$$

```

DIMENSION A(50,50), B(50,50), IA(50)
READ(5,100)N
100 FORMAT(14)
PI=3.14159265
DO 10 L=1, N
DO 20 M=1, N
A(L,M)=0.0
20 CONTINUE
10 CONTINUE
DO 30 L=2, N
A(L,L-1)=1.0
A(L-1,L)=1.0
30 CONTINUE
WRITE(6,102)
102 FORMAT(1H1,3X,1HI,8X,6HLAMBDA)
DO 40 L=1, N
RAMBDA=2.0*cos((PI*FLOAT(L))/FLOAT(N+1))
WRITE(6,104)L, RAMBDA
104 FORMAT(1H,14,F14.6)
40 CONTINUE
WRITE(6,110)
110 FORMAT(1H ,///)
DO 50 L=1, N
DO 60 M=1, N
SUM=0.0
DO 70 K=1, N
SUM=SUM+SIN((PI*FLOAT(L*K))/FLOAT(N+1))*A(K,M)
70 CONTINUE
B(L,M)=SUM
60 CONTINUE
50 CONTINUE
DO 80 L=1, N
DO 90 M=1, N
SUM=0.0
DO 95 K=1, N
SUM=SUM+B(L,K)*SIN((PI*FLOAT(K*M))/FLOAT(N+1))
95 CONTINUE
A(L,M)=(2.0/FLOAT(N+1))*SUM
90 CONTINUE
80 CONTINUE
DO 34 L=1, N
DO 34 M=1, N
34 IA(M)=IFIX(A(L,M)*1.0E6+0.5)
WRITE(6,210)(IA(M), M=1, N)
210 FORMAT(15I8)
35 CONTINUE
STOP
END

```

第1図

とおくと

$$p_n(x) = (\sin(n+1)\theta) / \sin \theta$$

となる。したがって、 $\theta$ の値が

第1表 λ(i)

I	LAMBDA
1	1.961571
2	1.847759
3	1.662940
4	1.414214
5	1.111141
6	0.765368
7	0.390181
8	0.000000
9	-0.390180
10	-0.765366
11	-1.111139
12	-1.414213
13	-1.662939
14	-1.847759
15	-1.961571

真にその目的に叶うように運営されている。利用者に対するサービスは、すべてに公平で親切である。

利用者は広範囲にわたり、41年3月までは準備期間として無料であったために多数の利用者が集まった。そのためとくに計算時間の短かい(2分以内)ものを優先して処理する処置もとられ、運営は弾力的になされている。計算機の性能も良く、コンパイラ HARP 5020 もよくできているため、コンパイル時間、演算時間とも非常に早く、はじめのがトータル 17 秒、次のが 20 秒であった。第2図にプログラム、第3表に計算結果の一部分を示す。

終りに東京大学大型計算センターを管理、運営して

第2表 A\*10<sup>6</sup>

1961571	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1847759	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1662940	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1414214	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1111141	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	765367	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	390181	0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0	-390180	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	1	-765366	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	-1111139	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	-1414212	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1662938	0	2
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1847755	-3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	-3	-1961564

$$\theta_k = k\pi / (n+1), k=1, 2, \dots, n$$

に対応する x の値

$$x_k = 2 \cos(k\pi / (n+1))$$

がその根となる。

このことを数値的にたしかめてみよう。100 次の多項式の計算結果からいえることは、多項式の値を計算する時に、いかに誤差が拡大されて伝播するかということについて、たびたび警告されていることを、じかに体験することができる。(2進)32 bit の浮動小数点計算で、0 となるべき値が 3.5/1000 に近くなることが見られる。これは計算尺度の誤差である。これに反して、倍長計算の結果のすばらしさは目を見張らせるものがある。まさに小数点以下 0 が 11 以上続くのである。

プログラムは FORTRAN IV タイプの HARP 5020 で書いてあり、東京大学大型計算センターの HITAC 5020 を使用した。同センターは、全国の大学、研究所の研究者の共同利用のために設けられたものであって、

```

DIMENSION P(1000), S(1000)
DOUBLE PRECISION P, PI
READ(5, 100)N
100 FORMAT(I4)
SPI=3.14159265
PI=3.1415926535897932
WRITE(6, 150)
150 FORMAT(1H 1, 3X, 1HN, 5X, 9H, X, SINGLE,
2X, 12HPN(X) SINGLE, 13X, 9HX, DOUBL
1E, 13X, 14HPN(X) DOUBLE)
DO 5 K=1, N
S(1)=1.0
P(1)=1.0
S(2)=2.0*COS((SPI*FLOAT(K))/FLOAT(N+1))
P(2)=2.0*DCOS((PI*FLOAT(K))/FLOAT(N+1))
DO 10 I=2, N
S(I+1)=S(2)*S(I)*-S(I-1)
P(I+1)=P(2)*P(I)-P(I-1)
10 CONTINUE
WRITE(6, 200)K, S(2), S(N+1), P(2), P(N+1)
200 FORMAT(1H I, 4, 5X, F 9, 6, 2X, F 12.5, 5X, F 20.
15, 4X F 20.15)
5 CONTINUE
STOP
END
    
```

第2図

第 3 表

N	X SINGLE	PN(X) SINGLE	X DOUBLE	PN(X) DOUBLE
1	1.999032	-0.00348	1.999032564583976	-0.00000000005944
2	1.996131	0.00011	1.996131194267189	0.00000000000542
3	1.991299	-0.00011	1.991298695938037	-0.00000000000432
4	1.984540	-0.00002	1.984539744726553	-0.00000000000057
5	1.975861	-0.00011	1.975860879481513	-0.00000000000020
6	1.965271	-0.00003	1.965270496444527	0.00000000000052
7	1.952779	-0.00003	1.952778841127214	-0.00000000000060
8	1.938398	-0.00011	1.938397998399332	0.00000000000078
9	1.922142	0.00010	1.922141880797449	-0.00000000000016
10	1.904026	-0.00003	1.904026215065460	0.00000000000008
.....	.....	.....	.....	.....
31	1.140065	0.00007	1.140064516427565	0.00000000000003
32	1.088409	-0.00004	1.088408365512055	0.00000000000006
33	1.035699	0.00001	1.035699249796651	-0.00000000000000
34	0.981989	-0.00005	0.981988161946644	0.00000000000001
35	0.927328	0.00004	0.927327063970655	-0.00000000000004
36	0.871769	-0.00002	0.871768836950742	-0.00000000000004
37	0.815368	0.00005	0.815367229883378	0.00000000000000
38	0.758177	-0.00004	0.758176807680759	-0.00000000000003
39	0.700254	0.00007	0.700252898382781	0.00000000000000
40	0.641652	-0.00005	0.641651539630735	-0.00000000000009
.....	.....	.....	.....	.....
61	-0.641651	0.00004	-0.641651539630735	0.00000000000028
62	-0.700253	-0.00002	-0.700252898382781	-0.00000000000035
63	-0.758176	0.00003	-0.758176807680758	0.00000000000030
64	-0.815376	-0.00004	-0.815367229883377	-0.00000000000047
65	-0.871768	0.00005	-0.871768836950741	0.00000000000044
66	-0.927327	-0.00003	-0.927327063970654	-0.00000000000040
67	-0.981987	0.00006	-0.981988161946643	0.00000000000064
68	-1.035699	-0.00004	-1.035699249796650	-0.00000000000062
69	-1.088408	0.00003	-1.088408365512054	0.00000000000054
70	-1.140064	-0.00007	-1.140064516427565	-0.00000000000030
.....	.....	.....	.....	.....
91	-1.904026	0.00010	-1.904026215065459	0.000000000000248
92	-1.922142	-0.00006	-1.922141880797449	-0.000000000000307
93	-1.938398	0.00030	-1.938397998399332	0.000000000000266
94	-1.952779	-0.00028	-1.952778841127214	-0.000000000000293
95	-1.965270	0.00034	-1.965270496444527	0.040000000000384
96	-1.975861	-0.00060	-1.975860879481513	-0.000000000000447
97	-1.984540	-0.00002	-1.984539744726553	0.000000000000574
98	-1.991299	-0.00011	-1.991298695938037	-0.000000000000982
99	-1.996131	0.00011	-1.996131194267189	0.000000000001993
100	-1.999032	-0.00348	-1.999032564583976	-0.000000000004304

おられる方々に深甚の敬意と謝意を表します。

参考文献：中島，小野瀬，野中，和田：長方形のチ

リクレ問題の計算に有用な多項式について，第7回プログラミングシンポジウム報告集（1966）D 4-17.