高次代数方程式の根の計算限界について*

山 下 真 一 郎**　　佐 竹 誠 也***

1. まえがき

高次代数方程式の根を求める問題は，古くから，多くの解法が工夫されているが，決定的な解法はまだ発見されていない．それは，解法の工夫によって，演算精度と同じ程度の精度の根が得られるであろうという期待が持たれていることによる．

高次代数方程式の根は，Abel が証明したように，5次以上の方程式が代数的に解けないのであるから一般に，反復法によって求めなければならないが，反復法では，収束の判定を行なう必要がある．高速電子計算機で，人間が一切関与せずに，自動的に根を求める場合，その計算の困難さは，根の収束の判定に集約される．収束の判定を適確に行なうには，計算誤差を定量的に把握しなければならない．

著者は偶然，可変長語の電子計算機 FACOM-231 で解かれた高次方程式の根に混入している誤差が，その演算桁数に関係なく一定であることを発見した．

その理由を探究した結果をここに述べるが，おそらく，実際的に高次代数方程式の決定的解法を提供することになると思う．

2. 方 程 式

一般に高次代数方程式は代数的に解けない．したがって，方程式の根を求めるには

$$f(x)=0 \tag{1}$$

となる x を試行錯誤的に求めねばならない．高次方程式のすべての求根法は，基本的には (1) 式が満たされることで根を決めている．したがって，(1) 式の左辺が，誤差の範囲内で零とみなされれば，もはやそれ以上 $f(x)$ の値を小さくできないし，小さくしても意味がない．これがすなわち $f(x)$ の零の計算限界である．$f(x)$ の値が計算誤差の範囲内に入ってしまうときの x の範囲が，根の不確定領域であって，その領域は，演算桁数が一定ならば，その方程式に関して一定で，それ以上この領域を小さくすることはできない．

以下，n 次の代数方程式を

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$
$$=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1 x + a_0 \tag{2}$$

として，10 進 L 桁で計算することにする．また，実係数で，実根の場合を念頭に議論を進める．

3. 多項式の値の誤差

一般に，計算の各段階で解 y が入力データ $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ によって，$y=F(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ のように表わされるとき，$x_k (k=1, 2, \cdots\cdots, n)$ にそれぞれ Δx_k の誤差があれば，y の誤差 Δy はほぼ

$$\Delta y=\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_k}\cdot \Delta x_k \tag{3}$$

である．この公式は，あらゆる場合に成立する誤差算定の基礎公式である．

(2) 式の場合について考えると，a_k に Δa_k, x に Δx の誤差があるとして，$f(x)$ の誤差 $\Delta f(x)$ は

$$\Delta f(x)=\sum_{k=0}^{n} \Delta a_k x^k + \Delta x f'(x) \tag{4}$$

となる．

(2) 式は，実際は次のように計算する．

$$\left.\begin{array}{l} b_n=a_n \\ b_k=a_k+xb_{k+1} \\ \quad (k=n-1, n-2, \cdots\cdots, 1, 0) \\ f(x)=b_0 \end{array}\right\} \tag{5}$$

したがって，誤差は

$$\left.\begin{array}{l} \Delta b_n=\Delta a_n \\ \Delta b_k=\Delta a_k+\Delta x b_{k+1}+x\Delta b_{k+1} \\ \quad (k=n-1, n-2, \cdots\cdots, 1, 0) \\ \Delta f(x)=\Delta b_0 \end{array}\right\} \tag{6}$$

である．

(4), (6) 式について考えると，Δx の項が根の近くで大きな意味を持つならば，根から少し離れると，関数値が大きく変わるので，$f(x)$ の大きさを一定におさえて，$|\Delta x|$ をより小さくすることができる．すな

---

* On the calculation limit of roots of the algebraie equation, by shin-ichiro Yamashita (Fujitsu Limited) and Seiya Satke (Musashi Institute of Technology)

** 富士通信機製造（株）
*** 武蔵工大

わち根の確定はやさしくなる．したがって，この項が無視できる場合のみを考えればよい．

次に，Δa_k の項であるが，この項の解釈は重要である．この項は係数の変化が根に与える影響の調査に役だつが，ここではそれについては論じない．したがって，$\Delta a_k=0$ であるが，この項で丸め誤差の調整を行なう方が便利である．丸め誤差の大きさは正確に算定するのが困難であるので，計算に参加する要素——特に加算に参加する要素——の最大の値の末尾の大きさと考える．すなわち，Δa_k は $\Delta a_k=0$ のときでも近似的に，$a_k*_{10}{}^{-L}$ と考えればよい．結局，(6) 式は，次の式で計算すればよい．

$$\left.\begin{aligned}&\Delta b_n=|a_n|*_{10}{}^{-L}\\&\Delta b_k=|a_k|*_{10}{}^{-L}+|x*\Delta b_{k+1}|\\&\quad(k=n-1,\ n-2,\ \cdots\cdots,\ 1,\ 0)\\&\Delta f(x)=\Delta b_0\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

これは，次の式と同じである．

$$\Delta f(x)=\sum_{k=0}^{n}|a_kx^k|*_{10}{}^{-L}\qquad(8)$$

4. 多項式の値の精度

多項式の値の正しい桁数は，ほぼ $\log_{10}|f(x)/\Delta f(x)|$ であるから，次のように表わせる．

$$(f(x)\text{ の正しい桁数})=L-\alpha\qquad(9)$$

ここに

$$\alpha=\log_{10}\left\{\sum_{k=0}^{n}|a_kx^k|\Big/\left|\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\right|\right\}\qquad(10)$$

ただし，この α は，(10) 式の右辺に近い整数を取るようにする．$\alpha\geqq0$ である．α が小さいときは $f(x)$ はかなり正しいと解釈する．また，α が L よりも大きいときは L とし，$f(x)$ は1桁も正しくないと解釈する．以下このように桁数の算定では修正を行なうものとする．

この α は，多項式の係数 a_k と変数 x が決まれば，一意的に決まるもので，演算桁数との関係から考えて，**損失桁数**ともいうべきものである．

5. 根の収束判定

高次代数方程式の根を，反復法によって求める時は多項式の値 $f(x)$ を計算して，$f(x)=0$ であるかどうかをテストして根であるかどうかを確認するより方法がない．したがって，もしも $f(x)$ に $\Delta f(x)$ の誤差があれば

$$|f(x)|\leqq|\Delta f(x)|\qquad(11)$$

を満足する x の全領域において，x が真の根であるかどうかを確認する方法がない．すなわち，その領域が現在の演算桁数での根の領域である．

根の収束判定は，関数の誤差を定量的に把握して，(11) 式を満足するかどうかによって行なう．

今までの求根法は，根自身の絶対誤差* あるいは相対誤差** が適当な定数以下になることをもって収束と判定する方法が多かったが，それらの方法は良い方法とはいえない．それは根の絶対精度あるいは相対精度と (11) 式が直接関係がないからであって，(11) 式が満足されているのに，なお根の絶対精度あるいは相対精度が目標値に達しない場合が多いからである．そのような場合にはループの脱出不能とかむだな計算などの事態が生ずる．

(11) 式を書き換えると

$$\left|\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\right|\leqq\sum_{k=0}^{n}|a_kx^k|*_{10}{}^{-L}\qquad(12)$$

となる．

6. 根の精度

$f(x)$ の零の算定限界は

$$M=\sum_{k=0}^{n}|a_kx^k|\qquad(13)$$

とおけば

$$(f(x)\text{ の零の算定限界})=M*_{10}{}^{-L}\qquad(14)$$

である．根の近傍における Newton-Iteration で微係数 $f'(x)$ が1桁でも正しいならば，根の補正量 Δx は

$$\Delta x=-f(x)/f'(x)\qquad(15)$$

であるから，根の補正限界は

$$(\text{根の補正限界})=M*_{10}{}^{-L}/|f'(x)|\qquad(16)$$

となる．したがって，根の正しく求められる桁数は，$\log_{10}|x/\Delta x|$ であるから，次式で表わせる．

$$\begin{aligned}(\text{根の正しく求められる桁数})&=\log_{10}|x/\Delta x|\\&=L-\alpha\end{aligned}\qquad(17)$$

ここに

$$\begin{aligned}\alpha&=\log_{10}|M/(xf'(x))|\\&=\log_{10}\left\{\sum_{k=0}^{n}|a_kx^k|\Big/\left|\sum_{k=1}^{n}ka_kx^k\right|\right\}\end{aligned}\qquad(18)$$

ただし，この α は，(18) 式の右辺に近い整数を取る

---

* ここでいう絶対誤差とは，近似根とある定数との差の絶対値のことである．ある定数とは，たとえば，反復法の一つ前の近似根などである．

** ここでいう相対誤差とは，絶対誤差とある定数との比のことである．ある定数とは，絶対誤差を計算する時の近似根やもう一方の定数または特定の方法で決められた定数などである．その定数は0に選んではいけない．

ようにし，0よりも小さければ，0を取り，このときは精度がよいと解釈する．また，Lよりも大きいときはLとし，1桁の精度もないと解釈する．

(18) 式のαは，根の近傍では,方程式の性質によって定まる定数で，New ton 法による求根における損失桁数である．

従来，微係数が小さければ，精度が悪いことが知られていたが，それは，この式に取り入れられて，定量的に把握されている．また，次数が高ければ，精度が悪いという定説であるが，次数が高くなると，(18)式の M は大きくなる一方であり，$|xf'(x)|$ は小さくなる傾向がある．したがって，次数が高くなればなるほど，αは大きくなる．それは定性的傾向であって，次数については定量的把握ができない．いずれにせよ損失桁数αが方程式を定量的に把握する量である．

高次方程式の数値計算が困難なのは，(17)式で示される限界を無視して精度の高い根を要求するからである．

7. 微係数の値の誤差および精度

多項式の導関数も多項式であるから，その誤差や精度は，多項式の場合と同様に計算できる．微係数の誤差を $\Delta f'(x)$ とすれば，(8) 式にならって

$$\Delta f'(x)=\sum_{k=1}^{n}|ka_kx^{k-1}|*_{10}{}^{-L} \tag{19}$$

である．微係数の精度は (9),(10) 式にならって

$$(f'(x)\ \text{の正しい桁数})=L-\beta \tag{20}$$

$$\beta=\log_{10}\left\{\sum_{k=1}^{n}|ka_kx^k|\Big/\left|\sum_{k=1}^{n}ka_kx^k\right|\right\} \tag{21}$$

となる．この式は，(10)式と同じように解釈する．この算式によって，重根の調査ができる．

8. 計算例

今までに得た結果を計算例で確かめてみよう．

問題 1.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{6}a_kx^k$$

$a_6=+1.0$　　$a_2=+33.77025274$

$a_5=-7.35$　　$a_1=-16.544850588$

$a_4=+22.5085$　　$a_0=+3.37725036$

$a_3=-36.761025$

根：

$x_1=+1.20$　　$x_4=+1.23$

$x_2=+1.21$　　$x_5=+1.24$

$x_3=+1.22$　　$x_6=+1.25$

```
begin comment reallength:=20;
  integer L, I, n;
  Readinteger (L); Readinteger (n);
    begin array A[0: n]; Readarray (A);
      for I:=0 step 1 until n do
      begin Printinteger (n-I); Print (A[I]);
      CRLF; end; LFEED;
        begin integer I, J;
          real eps, x, dx, y, dy, M, N;
          Boolean b;
          eps:=(0.1)↑(L-3);
          for I:=1 step 1 until n do
            begin b:=true;
              Readreal (x);
        REP: y:=dy:=A[0]; M:=N:=abs(y);
          for J:=1 step 1 until n-1 do
              begin y:=x*y+A[J];
                       M:=abs(x*M)+abs(A[J]);
                       dy:=x*dy+y;
                           N:=abs(x*N)+abs(y);
              end;
                y:=x*y+A[n];
                M:=abs(x*M)+abs(A[n]);
      dx:=y/dy;
      Print(x); CRLF; Print(dx); CRLF; Print
      (y); CRLF; Printreal (dy, 5); Printreal
      (M, 5); Printreal(N, 5); Printreal(M/(x*
      dy), 5); CRLF; CRLF; x:=x-dx;
      if abs(y)>M*eps then go to REP;
      if b then begin b:=false; go to REP;
      end;
    LFEED; end;
  end;
 end;
end of program;
```

第1図　FACOM 231 による Newton 法 program（テスト用）

問題1を**第1図**の program によって計算した結果は**第1表**および**第2表**のとおりである．

第2表は，根 1.23 の近くでの New ton-Iteration の全数値である．第1表も，ほとんどこの表と同じ様な傾向を示した．それゆえ，省略表としたわけである．

第 1, 2 表のように，われわれの結果は，根の近傍において，非常に良好である．

第1図の program は，根の近傍の初期値を与えて計算するものであるが，変形 New ton 法，すなわち，1根が求まったら，次数を下げる方法でも同じような結果が得られる．変形 New ton 法の program は**第2図**であるが，この program で計算した結果は**第3**

```
begin comment reallength:=20;
  integer L, I, n;
  Readinteger(L); Readinteger(n);
  begin array A[0: n]; Readarray (A);
    for I:=0 step 1 until n do
    begin Printinteger(n-I); Print(A[I]);
      CRLF; end; LFEED;
      begin integer I, J;
        real eps, x, dx, y, dy, M, N;
        Boolean b;
          x:=0.001;
        eps:=(0.1)↑(L-3);
      for I:=0 step 1 until n-2 do
        begin b:=true;
        REP: y:=dy:=A[0]; M:=N:=abs(y);
          for J:=1 step 1 until n-I-1 do
          begin y:=x*y+A[J];
                M:=abs(x*M)+abs(A[J]);
                dy:=x*dy+y;
                N:=abs(x*N)+abs(y);
          end; y:=x*y+A[n-I];
               M:=abs(x*M)+abs(A(n-I));
      dx=y/dy;
      Print(x); CRLF; Print(dx); CRLF; Print
      (y); CRLF; Printreal(dy, 5); Printreal(M,
      5); Printreal(N, 5); Printreal(M/(x*dy),
      5); CRLF; CRLF; x:=x-dx;
      if abs(y)>M*eps then go to REP;
      if b then begin b:=false; go to REP; end;
      for J:=1 step 1 until n-1-I do
              A[J]:=A[J]+x*A[J-1];
    LFEED; end;
      Print(-A[1]/A[0]); LFED;
    end;
  end;
end of program;
```

第2図 FACOM 231 による変形 New ton 法 Program (テスト用)

表のとおりである. 反復回数とは, 最初の根の初期値を 0.001, 次からは前の根を初期値とした時の Newton-Iteration の回数のことである.

根自身について, 第1表と比較すると, ほとんど同じような結果が得られている.

第3表の x 以外の系列の数値は, その時, その時の方程式に対する情報であって, 原式に対する正しい情報ではない. それゆえ, 原式の根に対してはズレた情報が得られている. 結局, これらの情報は, 収束判定に使われるだけで他には役だたない.

通常は, 第2図のような program が簡単でよいと思われるが, 原方程式の根に対する正しい情報が欲しければ, 得られた根を原式に代入して, 再計算しなければならない.

この問題1は, 近接根を有する典型的な例題であろう. ただし, 近接根とはいっても, これは多分に, 定性的な表現であるから, その使用には注意を用する.

これまで論じてきたように, 方程式の各根には, 固有の極限的な損失桁数が存在するのであるから, 求根の困難さは, このパラメータによって決まるものである. 近接というのは, たまたま, 二つ以上の根がいずれも大きい損失桁数をもって, 求根の際の根の分離を妨げている場合にほかならない.

この例題の場合, すべての根の損失桁数が, ほぼ10桁であるということが, いわゆる近接根を有する典型的な例題とするゆえんである.

問 題 2.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{5} a_k x^k$$

$a_5=+2.00$ $a_4=+8.7810466$

$a_3=-7.646935$ $a_2=-6.655858$

$a_1=+4.7539243$ $a_0=+0.15192601$

根:

$x_1=-0.03068\ 76378\ 22373\ 70036\ 8814$

$x_2=+0.75421\ 25655\ 67909\ 42811\ 1515$

$x_3=+0.75630\ 38715\ 47629\ 17660\ 0569$

$x_4=-0.86740\ 68299\ 66654\ 31021\ 4889$

$x_5=-5.00294\ 52693\ 26510\ 59412\ 8380$

この方程式の根は等間隔ではなく, 通常の問題である. 第 1, 2 図で計算した結果は, それぞれ, **第 4, 5 表**のとおりである.

近接した根は精度も悪く, 収束も遅い. そうでない

第1表 問題1の根の近傍における詳細

真 根	近 似 根 x	$dx\equiv f(x)/f'(x)$	$y\equiv f(x)$	$dy\equiv f'(x)$	M	N	$\|M/(x\cdot dy)\|$	反復回数
1.20	1.1999 99999 90850 67448	-2.0000×10^{-10}	$+2.4000\times10^{-18}$	-1.2000×10^{-8}	203.33	84.721	$1.4120\times10^{+10}$	6
1.21	1.2100 00000 44370 01783	$+9.5833\times10^{-10}$	$+2.3000\times10^{-18}$	$+2.4000\times10^{-9}$	208.41	86.122	$7.1768\times10^{+10}$	5
1.22	1.2199 99998 51908 13213	-1.4166×10^{-9}	$+1.7000\times10^{-18}$	-1.2000×10^{-9}	213.60	87.542	$1.4590\times10^{+11}$	4
1.23	1.2299 99997 56493 46369	-2.0000×10^{-9}	-2.4000×10^{-18}	$+1.2000\times10^{-9}$	218.90	88.983	$1.4830\times10^{+11}$	5
1.24	1.2399 99999 99579 95175	-1.6666×10^{-10}	$+4.0000\times10^{-19}$	-2.4000×10^{-9}	224.30	90.445	$7.5371\times10^{+10}$	5
1.25	1.2499 99999 93459 22409	-8.3333×10^{-12}	-1.0000×10^{-19}	$+1.2000\times10^{-8}$	229.82	91.928	$1.5321\times10^{+10}$	7

第 2 表　問題 1 の根 1.23 の近傍の詳細

真根	近似根 x	$dx\equiv f(x)/f'(x)$	$y\equiv f(x)$	$dy\equiv f'(x)$	M	N	$\|M/(x\cdot dy)\|$
1.23	1.2280 00000 00000 00000	-2.4241×10^{-8}	-2.1288×10^{-12}	$+8.7820\times10^{-10}$	217.83	88.693	$2.0198\times10^{+11}$
	1.2304 24136 42326 19151	$+4.2017\times10^{-4}$	$+5.1499\times10^{-13}$	$+1.2256\times10^{-9}$	219.12	89.045	$1.4529\times10^{+11}$
	1.2300 03965 10253 76505	$+3.9647\times10^{-6}$	$+4.7590\times10^{-15}$	$+1.2003\times10^{-9}$	218.90	88.984	$1.4826\times10^{+11}$
	1.2300 00000 31493 45587	$+2.7500\times10^{-9}$	$+3.3000\times10^{-18}$	$+1.2000\times10^{-9}$	218.90	88.983	$1.4830\times10^{+11}$
	1.2299 99997 56493 46369	-2.0000×10^{-9}	-2.4000×10^{-18}	$+1.2000\times10^{-9}$	218.90	88.983	$1.4830\times10^{+11}$

第 3 表　問題 1 の変形 New ton 法の解

近似根 x	$dx\equiv f(x)/f'(x)$	$y\equiv f(x)$	$dy\equiv f'(x)$	M	N	$\|M/(x\cdot dy)\|$	反復回数
1.2000 00000 03406 86979	-5.0000×10^{-11}	$+6.0000\times10^{-19}$	-1.1999×10^{-8}	203.33	84.721	$1.4120\times10^{+10}$	28
1.2099 99999 57066 85042	0	0	$+2.4000\times10^{-7}$	86.479	35.735	$2.9779\times10^{+8}$	8
1.2200 00000 87725 84230	-1.6666×10^{-14}	$+1.0000\times10^{-19}$	-5.9999×10^{-6}	36.323	14.886	$4.9622\times10^{+6}$	8
1.2299 99999 10346 42479	-4.9999×10^{-16}	-1.0000×10^{-19}	$+2.0000\times10^{-4}$	15.068	6.1255	$6.1256\times10^{+4}$	8
1.2400 00000 45822 79078	0	0	-9.9999×10^{-3}	6.1752	2.4900	$4.9800\times10^{+2}$	8
1.2499 99999 90629 50519							

第 4 表　問題 2 の根の近傍における詳細

近似根 x	$dx\equiv f(x)/f'(x)$	$y\equiv f(x)$	$dy\equiv f'(x)$	M	N	$\|M/(x\cdot dy)\|$
−0.00306 87637 82237 37003 70	0	0	+5.1398	0.30430	5.1552	1.9293
+0.75421 25655 67909 41727	-4.8940×10^{-18}	$+1.5000\times10^{-19}$	−0.0030649	14.133	10.282	611.42
+0.75630 38715 47629 18272	$+3.2486\times10^{-19}$	$+1.0000\times10^{-20}$	+0.0030781	14.230	10.342	611.26
−0.86740 68299 66654 31027	-1.1524×10^{-20}	$+2.1000\times10^{-19}$	−18.222	20.226	20.836	1.2796
−5.0029 45269 32651 05945	-3.6814×10^{-19}	-5.0200×10^{-16}	+1363.6	12917.0	1449.1	1.8935

第 5 表　問題 2 の変形 New ton 法の解

近似根 x	$dx\equiv f(x)/f'(x)$	$y\equiv f(x)$	$dy\equiv f'(x)$	M	N	$\|M/(x\cdot dy)\|$	反復回数
−0.00306 87637 82237 37003 70	0	0	+5.1398	0.30430	5.1552	1.9293	6
+0.75630 38715 47629 17933	-7.6700×10^{-18}	-3.0000×10^{-19}	+0.0039113	18.754	13.396	633.99	14
+0.75421 25655 67909 41775	$+1.0711\times10^{-20}$	$+2.0000\times10^{-19}$	+18.671	13.357	18.671	0.94848	5
−0.86740 68299 66654 31015	$+6.0451\times10^{-20}$	$+5.0000\times10^{-19}$	+8.2710	20.367	11.740	2.8389	7
−5.0029 45269 32651 05940							

根は，精度もよく，収束も速い．いずれにしても，われわれの理論は，良好な結果を示している．

9. あとがき

さらに初期値の問題や収束速度の問題についても論ずるつもりであったが，なお不満な点があったため，次の機会にゆずることにした．われわれがここに得たものは実係数実根の高次代数方程式に対する計算限界であるが，もちろん一般化も可能であり，事実，連立一次方程式や固有値問題に対しても，この考え方が良好な結果をもたらしている．それらについてはまた論ずる機会があろう．

最後に，富士通の岡本彬，鈴木滋両氏がこの問題を熱心に論議されたことを記し，謝意を表する．

（昭和 41 年 2 月 8 日受付）