

B-03

階層グラフの直交描画における線分座標決定

Determination of the Coordinates of the Line Segments in an Orthogonal Drawing of a Hierarchical Graph

荒木 徹也[†] 増田 澄男[†] 山口 一章[†]
 Tetsuya Araki Sumio Masuda Kazuaki Yamaguchi

1. まえがき

グラフの階層描画は、作業工程図、科目間関係図、有向グラフなどの描画に広く用いられている。階層グラフの代表的な描画アルゴリズムとして、Sugiyama ら [1, 2] の方法が知られている。この方法は、まず、連続していない階層の 2 頂点を結ぶ辺（長辺と呼ぶ）のそれぞれに対して、それがまたぐ階層ごとにダミー頂点と呼ぶ仮の頂点を追加する。そして、各階層における頂点（ダミー頂点を含む）の配置順序と各頂点の座標を決定した後、各辺を描く。各階層上の頂点の配置順序の決定に関してはこれまでに多くのアルゴリズムが提案されており [3]、代表的な発見的手法として重心法 [1, 2] などが知られている。頂点の座標決定法に関してもいくつかの研究があり、優先度法 [1, 2] や動的計画法を用いる方法 [4] などが知られている。

各長辺上にダミー頂点を導入することにより、グラフ中の各辺は、連続した 2 階層の頂点間を結ぶことになる。Sugiyama らの方法は、頂点座標の決定後、各辺を直線で描くが、このような描画を直線描画と呼ぶ。図 1(b) は、同図 (a) のグラフの直線描画の例であり、黒丸で示した五つの頂点がダミー頂点である。

もとの階層グラフに長辺が多くある場合、ダミー頂点の個数が多くなり、それに伴って描画幅も大きくなるが、一般に、階層描画の描画幅は小さいことが望ましい [2, 3]。そこで、文献 [5] は、ダミー頂点の共有化と呼ぶ処理を行うことにより、ダミー頂点数や辺数を少なくし、描画をより簡潔でコンパクトなものにする方法を提案した。図 1(c) は、同図 (a) のグラフに対してダミー頂点の共有化処理を行った後、直線描画を求めたものである。

直線描画は、グラフが密になると辺交差数が非常に多くなり、グラフの構造が把握しづらくなることもある。このような場合に描画を簡単にするための一つの方法として、本研究では、グラフの各辺を垂直・水平線分からなる経路として描く直交描画に注目する。図 1(d) は、ダミー頂点の共有化処理を行った後、直交描画を求めたものである（図中、ダミー頂点より小さい黒丸は辺の分岐点を示している）。

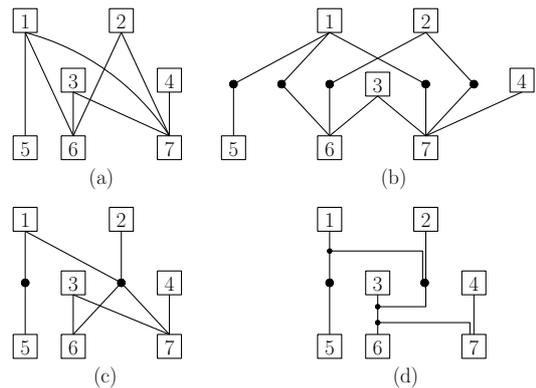


図 1 階層描画の例

グラフのある階層の頂点のある集合 S とすぐ下の階層の頂点のある集合 S' について、 SUS' から誘導される部分グラフが完全 2 部グラフをなしているものとする。本研究では、直交描画をする際、そのような部分グラフを 1 本の高階辺とみなし、それを辺交差なしで描くことができるものとする。このことにより、直交描画では、直線描画に比べ、一般に辺交差数を大きく削減することができる。

筆者らは、これまで、階層グラフの直交描画アルゴリズムに関する研究を行ってきた [6] ~ [8]。本稿では、その研究の一部として、直交描画における線分の座標決定法を提案する。

階層グラフの直交描画を求める方法は、これまでもいくつか提案されている [9] ~ [11]。これらのうち、文献 [9] は、異なる辺の水平線分が一部を共有することを禁止しており、文献 [10] は、高階辺がもつ上階層の頂点数 $|S|$ が 1 に限るという制限を設けている。また、文献 [11] は、 $|S| \geq 2$ となることを許しているが、各高階辺の描画に用い得る水平線分の本数を 1 以下に制限している。本研究ではこれらのような制限を設けておらず、直交描画中に現れる線分の集合が従来の方法とは大きく異なったものになる。

以下、まず 2. においていくつかの定義を行い、3. において直交描画アルゴリズム全体の概略を示す。4. では直交描画における各線分の座標の決定方法について述べ、5. では計算機実験の結果を示す。最後に 6. において、本稿の結果をまとめ、今後の課題について述べる。

[†] 神戸大学, Kobe University

2. 諸定義

$G = (V, E)$ を単純な階層グラフとする．頂点集合 V は，階層 V_1, V_2, \dots, V_h に分割されており，各辺 $(v, w) \in E$ に対して， v, w は異なる階層に属するものとする． h を G の階層数と呼ぶ．また， $i = 1, 2, \dots, h-1$ について，階層 V_i と V_{i+1} は隣接しているという．本研究では，階層描画を行う際，平面上に距離 $Dist$ ごとに引いた h 本の水平線を考え，各 V_i の頂点を上から i 番目の水平線上に配置するものとする．

1. で述べたように，階層描画では，非隣接階層の頂点間の辺に対して，ダミー頂点と呼ぶ頂点を導入する．ダミー頂点に対し， G に元から存在する頂点のことを実頂点と呼ぶ．これ以降，特に断らない限り，頂点といえば実頂点とダミー頂点の両方を意味する．描画の際には，各実頂点は一辺の長さが W_R の正方形で描き，各ダミー頂点は直径が W_D の円で描くものとする．ここで， W_R, W_D はいずれも 1 未満の値とする．各頂点 v の x 座標 $x(v)$ は整数値に限るものとし， v が実頂点，ダミー頂点のいずれである場合についても，正方形あるいは円の中心の座標が $x(v)$ に等しくなるようにするものとする．

本研究で求める直交描画 \tilde{G} は，次の描画条件を満たしたものである．

(描画条件) G において辺 (v, w) ($v \in V_i, w \in V_j, i < j$) が存在するとき且つそのときに限り， \tilde{G} において， v から w への経路で，以下の制約 (i), (ii) を満たすものが存在する．

- (i) 水平線分は左右どちらの方向にたどってもよい．
- (ii) 垂直線分は上から下の方向にのみたどってよい．

グラフのある階層の頂点のある集合 S とすぐ下の階層の頂点のある集合 S' に対し， $S \cup S'$ から誘導される部分グラフが完全 2 部グラフをなすとき，本研究では， $S \cup S'$ の頂点を含む高階辺 e を考え，それを辺交差なしに描くことを許す． e のその描画は， S, S' のそれぞれの頂点を垂直線分と (高々) 1 本の水平線分を用いてつなぎ，それらの水平線分間を垂直線分で接続したものとする．図 2 参照．以降では，高階辺 e を，それが含む頂点の集合 $S \cup S'$ で表すことがある．

高階辺の描画において， S の頂点をつなぐための水平線分を上水平線分と呼び， S' の頂点をつなぐための水平線分を下水平線分と呼ぶ．図 2(a) 右の例では， l が上水平線分であり， L が下水平線分である．図 2(b) の例では， $|S| = 1$ であり，上水平線分を作っていない．

1. で述べたように，直交描画アルゴリズムに関するこれまでの研究のうち，文献 [9] は，異なる辺の水平線分が一部を共有することを禁止しており，文献 [10] は，高階辺がもつ上階層の頂点数 $|S|$ が 1 に限るという制限を設けている．また，文献 [11] は，各高階辺の描画に用い

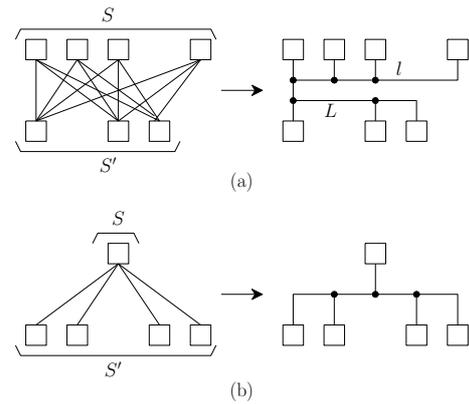


図 2 高階辺の描画

得る水平線分の本数を 1 以下に制限している．したがって，これらの文献の方法では，図 2(a) 右のような描画は許されない．

$|S|, |S'|$ が共に 2 以上の高階辺でも，図 3(a) のように，水平線分を 1 本だけ用いて描画することが可能である．しかし，すべての高階辺に対してそのようにすると，直交描画中に長い水平線分が多く発生し，辺交差数がかなり多くなる場合がある．図 3 参照．そこで本研究では，各高階辺に対して上下水平線分の使用を許している．

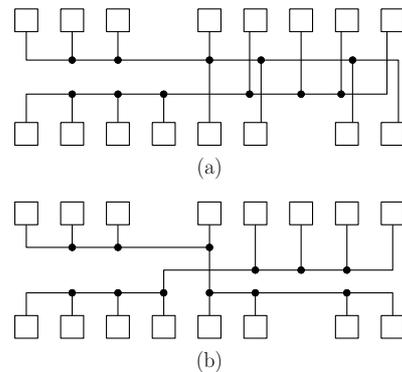


図 3 上下水平線分の使用により辺交差数が減少する例

高階辺から作られる任意の水平線分では，その左右の端点は，その高階辺に含まれるある頂点に垂直線分で接続される．水平線分 l の左端点が頂点 v に接続されるとき， $x(v)$ を l の左仮座標と呼ぶ．同様に，右端点が頂点 w に接続されるとき， $x(w)$ を l の右仮座標と呼ぶ．ある 2 階層グラフの直交描画の例を図 4 に示す．ここで，例えば水平線分 L_2 の左仮座標は 1 であり，右仮座標は 7 である．このように，実際に水平線分 l を描画するとき，左右端点の x 座標 (実座標と呼ぶ) は左右仮座標に一致するとは限らない．

水平線分 l に対し，左仮座標を $left(l)$ ，右仮座標を $right(l)$ と表す． l の線分長を $right(l) - left(l)$ と定義する．さらに，开区間 $(left(l), right(l))$ を OI_l ，閉区間 $[left(l), right(l)]$ を CI_l と書くことにする．2 本の水平

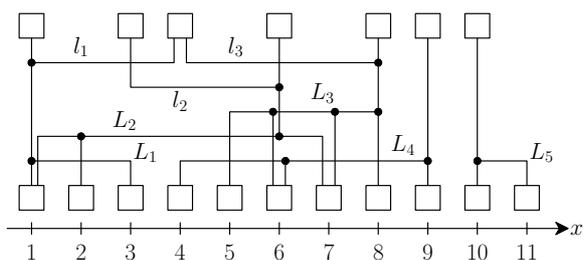


図4 2階層グラフの直交描画の例

線分 l, l' に対し、以下のいずれかの条件が成立するとき、 l と l' は互いに重なっているということにする。

- l と l' は異なる高階辺の水平線分であり、 $O_{I_l} \cap O_{I_{l'}} \neq \emptyset$ である。
- l と l' は同じ高階辺の上下水平線分であり、 $CI_l \cap CI_{l'} \neq \emptyset$ である。

直交描画を行う際、同じ高階辺の下水平線分を上水平線分より上に描くと、明らかに前述の描画条件に違反することになる。本研究では、水平線分の上下関係に関して、次の二つの制約を設けることにする。

制約1: 同じ高階辺が上下水平線分をもつ場合、上水平線分を下水平線分より上に配置する。

制約2: 異なる高階辺の上水平線分 l と下水平線分 l' が重なっているならば、 l を l' より上に描く。

図4の描画例では、8本の水平線分を五つのグループ $\{l_1, l_3\}, \{l_2\}, \{L_3\}, \{L_2\}, \{L_1, L_4, L_5\}$ に分割し、同一のグループの水平線分に同じ y 座標を与えている。このような各グループのことを水平線分群と呼ぶ。同一水平線分群に含まれる任意の2本の水平線分は、互いに重なりあうことはできない。隣接する2階層の間に k 本の水平線分群を作るとき、連続する水平線分群間の距離は階層間距離 $Dist$ を $k+1$ 等分した値とする。この値が小さすぎると描画が見づらくなるため、水平線分群数は大きくしすぎないことが望ましい。

最後に、有向グラフに関するいくつかの定義をする。任意の有向グラフ $G' = (V', E')$ とその任意の頂点 v に対して、 v から出る辺を (v の) 射出辺と呼び、その集合を $E_G^+(v)$ と表す。また、 v に入る辺を射入辺と呼び、その集合を $E_G^-(v)$ と表す。 $|E_G^+(v)|, |E_G^-(v)|$ なる値を、それぞれ、 v の出次数、入次数と呼ぶ。出次数0の頂点をシンク、入次数0の頂点をソースと呼ぶ。頂点の任意の集合 $V'' \subseteq V'$ に対して、 G' から V'' のすべての頂点 (とそれらに接続する辺) を削除して得られるグラフを $G' - V''$ と表す。辺の任意の集合 $E'' \subseteq E'$ に対して、 G' から E'' のすべての辺を削除して得られるグラフを $G' - E''$ と表す。

3. 直交描画アルゴリズムの概略

階層グラフ G が与えられたとき、直交描画を求めるアルゴリズムの概略を以下に示す。

第1段階: ダミー頂点を決定する。

第2段階: 高階辺の集合を決定する。

第3段階: 各階層における頂点の配置順序を決定する。

第4段階: 各頂点の座標を決定する。

第5段階: 各高階辺の各線分の座標を決定し、辺の描画を行うことにより、直交描画を得る。

第1段階では、グラフ G に対し、ダミー頂点の共有化を行う文献 [5] の方法を実行することにより、ダミー頂点数が比較的少ない階層グラフを求める。得られたグラフを $G^* = (V^*, E^*)$ と表し、その階層を上から順に $V_1^*, V_2^*, \dots, V_h^*$ と表すことにする。

第2段階では、各整数 $i = 1, 2, \dots, h-1$ について、 V_i^* と V_{i+1}^* の頂点を結ぶ高階辺の集合を決定する。辺の交差数を少なく抑えるためには、 G^* の各隣接階層間において、できるだけ辺の多い完全2部グラフを見つけ、それを高階辺にすることが望ましいが、2部グラフにおいて、辺数最大の完全2部部分グラフを見つける問題は一般にNP困難である [12]。そこで、本研究では、辺数ができるだけ大きい完全2部部分グラフを発見的手法により見つけ、対応する高階辺を設けた後、その部分グラフの辺を G^* から削除するという処理を繰り返すことにより高階辺の集合を決定している (詳細は省略する)。

第3段階では、 G^* に対して、重心法 [1, 2] をまず実行し、その後、文献 [13] の手法を実行して、各階層における頂点順序を定めている。これらは辺交差数が少ない直線描画を求めるための頂点順序決定法であるが、これらの方法を実行した後、適切な頂点座標決定法 (例えば、優先度法 [1, 2] や動的計画法を用いる方法 [4]) を実行することによって、互いに隣接する頂点間の距離が比較的短い頂点配置が得られる。このことは直交描画においても望ましいと考えられるので、現在のところはこのようにしている。

筆者らは文献 [8] において、各階層上の頂点の配置順序が定められた階層グラフとその頂点の初期配置が与えられたときに、直交描画における水平線分長の総和を小さくすることを目的として、頂点配置を改善する方法を提案している。第4段階では、まず文献 [4] の方法を用いて頂点の初期配置を定めた後、文献 [8] の方法を実行して、各頂点の座標を決定する。

以上、第1~4段階を実行する方法について簡単に述べた。第5段階を実行するためのアルゴリズムは次章で提案する。

4. 高階辺の線分の座標決定

本章では、グラフ $G^* = (V^*, E^*)$ の各頂点の座標が決定されているものとして、各高階辺の線分の座標を決定する方法を提案する。以下、まず 4.1 において提案法の概略を示し、その各ステップについて 4.2 以降で説明する。

4.1 概略

グラフ G^* において、隣接する 2 階層 V_i^* と V_{i+1}^* の間を結ぶ高階辺の集合を E_i と表すことにする。提案法は、 $i = 1, 2, \dots, h-1$ の順に、 E_i に対して以下の処理を行うものである。

ステップ 1: 高階辺の集合 E_i に関して、描画中で用いる水平線分の集合と、各水平線分の左右仮座標を決定する。

ステップ 2: E_i に属する各高階辺に対し、上水平線分と下水平線分を結ぶ垂直線分に仮の x 座標を割り当てる。

ステップ 3: 水平線分の集合を水平線分群に分割し、各水平線分群に属する水平線分と同じ y 座標を割り当てる。

ステップ 4: 各水平線分の左右の端点の実座標を決定し、垂直線分を加えて、 V_i^* と V_{i+1}^* の間の描画を完成する。

各ステップの実行方法について、次節以降で述べる。

4.2 ステップ 1

ステップ 1 では、 E_i に属する各高階辺 e に対して水平線分の決定を行う。 e が含む頂点のうち、上階層 V_i^* 上にあるものの集合を S 、下階層 V_{i+1}^* 上にあるものの集合を S' とする。以下では、高階辺 e を集合 $S \cup S'$ により表すことがある。

各高階辺 $e = S \cup S' \in E_i$ について、 S の頂点をつなぐ上水平線分 l と S' の頂点をつなぐ下水平線分 L を作る。ただし $|S| = 1$ であれば、便宜上 l は長さ 0 の水平線分とする。同様に、 $|S'| = 1$ であれば L は長さ 0 の線分とする。 S に属する頂点のうち最も左にあるものの x 座標を l の左仮座標 $left(l)$ とし、最も右にある頂点の x 座標を右仮座標 $right(l)$ とする。 L の左右仮座標も同様に定める。長さ 0 の水平線分については、左右の仮座標が同じ値になる。このとき、もし l と L が互いに重なっていないならば、即ち、 $CL_l \cap CL_L = \emptyset$ であれば、以下のように延長を行う（水平線分の左右仮座標の更新も行う）。

- l の長さが 0 であれば、 S に属する頂点の x 座標まで L を延長する。図 5(a) に例を示す。
- l の長さが 0 でなければ、 L の近いほうの端点の仮座標まで、 l を延長する。図 5(b) に例を示す。

この処理により、同じ高階辺の上下水平線分は必ず重なることになる。

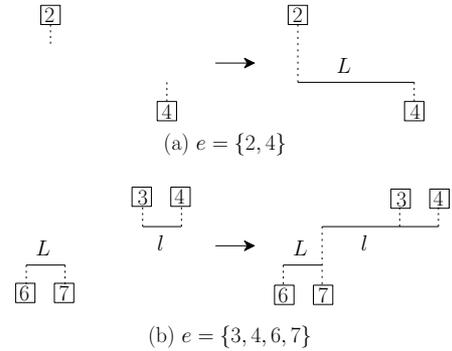


図 5 水平線分の延長

4.3 ステップ 2

ステップ 2 では、各高階辺 $e \in E_i$ に対し、上水平線分 l と下水平線分 L を結ぶ垂直線分に仮の x 座標の割り当てを行う。 l と L の左右仮座標はステップ 1 で求めている。垂直線分の仮の x 座標は、それらの左右仮座標の中から、以下の単純な規則にしたがって定める。

- l の左仮座標が L の左右いずれかの仮座標に等しいとき、垂直線分の仮の x 座標を $left(l)$ とする。図 6(a), (b) 参照。
- (i) の条件を満たさず、且つ l の右仮座標が L の左右いずれかの仮座標に等しいとき、垂直線分の仮の x 座標を $right(l)$ とする。図 6(c), (d) 参照。
- (i), (ii) の条件を満たさず、且つ L の右仮座標を l が含むとき、垂直線分の仮の x 座標を $right(L)$ とする。図 6(e) 参照。
- (i)~(iii) の条件を満たさず、且つ L の左仮座標を l が含むとき、垂直線分の仮の x 座標を $left(L)$ とする。図 6(e) 参照。
- (i)~(iv) の条件を満たさないとき、上下水平線分の右仮座標の小さい方の値を、垂直線分の仮の x 座標とする。図 6(g) 参照。

以上の処理の終了後、長さ 0 の水平線分をすべて削除する。残った上水平線分すべてからなる集合を US_i 、下水平線分すべてからなる集合を LS_i とする。

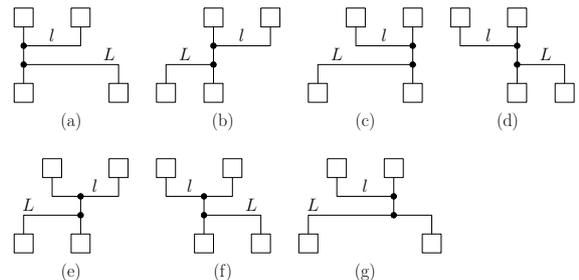


図 6 上下水平線分の接続

4.4 ステップ3

ステップ3では、水平線分の集合を水平線分群に分割する．さらに、水平線分群の(上から下への)順序を定めた後、それらに y 座標を割り当てる．水平線分群の順序を定める際には、2. で述べた制約 1, 2 にしたがうものとする．

直交描画法に関するこれまでの研究には、水平線分の配置を決める際に、水平線分群数を少なくすることを目指したもの [9] と、辺交差数を少なくすることを目指したもの [10, 11] がある．ただし、これらはいずれも、高階辺に関して前述のような制限を設けた場合のものである．文献 [11] は、各高階辺がもつ上階層の頂点数が 1 に制限されている場合でさえ、辺交差数を最小とするように水平線分の配置を定める問題が NP 困難であることを示している．本研究では、辺交差数をより重視し、辺交差数ができるだけ小さくなる配置のうち、水平線分群数が少なくなるものを求めるための発見的手法を提案する．

文献 [9] が示している水平線分配置法は、本質的に、各水平線分を区間と見なして、区間グラフ [14] の彩色問題を解くものである．また、文献 [10] は、交差数を最小とする問題を、区間グラフをもとにしたある有向グラフの帰還辺集合 [15, 16] を求める問題として定式化している(ただし、文献 [10] は、その問題を解くための具体的な方法について、十分な説明を与えていない)．本研究でも、区間グラフをもとにした有向グラフのある帰還辺集合を求める問題として定式化を行う．以下、4.4.1 でその定式化について述べた後、4.4.2 で水平線分配置法を示す．

4.4.1 問題の定式化

水平線分の集合 $US_i \cup LS_i$ から、以下のようにして、頂点に重みを付けた有向グラフ H を作成する． H の頂点は水平線分と一対一に対応する．簡単のため、 H の各頂点に対応する水平線分と同じ記号で表すことにする．

$$\begin{aligned} H &= (V_H, E_H), \\ V_H &= V_H^U \cup V_H^L, \\ E_H &= E_H^U \cup E_H^L \cup E_H^B. \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} V_H^U &= \{l \mid l \in US_i\}, \\ V_H^L &= \{L \mid L \in LS_i\}, \\ E_H^U &= \{(l \rightarrow l'), (l' \rightarrow l) \mid l, l' \in US_i \text{ かつ} \\ &\quad l \text{ と } l' \text{ は互いに重なっている}\}, \\ E_H^L &= \{(L \rightarrow L'), (L' \rightarrow L) \mid L, L' \in LS_i \text{ かつ} \\ &\quad L \text{ と } L' \text{ は互いに重なっている}\}, \\ E_H^B &= \{(l \rightarrow L) \mid l \in US_i, L \in LS_i \text{ かつ} \\ &\quad l \text{ と } L \text{ は互いに重なっている}\}. \end{aligned}$$

である．グラフ H には、 $(l \rightarrow l'), (l' \rightarrow l)$ のように、同

じ 2 頂点の間を結ぶ逆方向の有向辺の対が含まれるが、このような対のことを逆並行辺対と呼ぶことにする． H の部分グラフ $(V_H^U, E_H^U), (V_H^L, E_H^L)$ は、それぞれ、区間集合 $\{OI_l \mid l \in US_i\}, \{OI_L \mid L \in LS_i\}$ に対する区間グラフの各辺を逆並行辺対で置き換えたものである．また E_H^B は、前述の制約 1, 2 にしたがって、水平線分間の上下関係を制限するためのものである．例として、図 7(a) の水平線分の集合に対するグラフ H を同図 (b) に示す．この図では、 E_H^B の各辺を破線で示している．

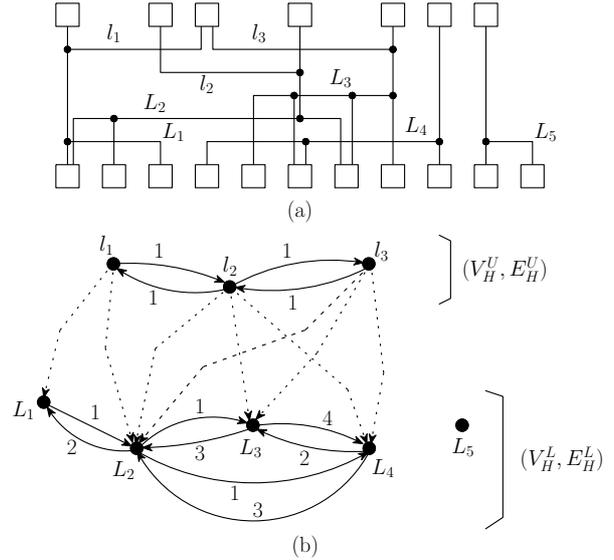


図7 グラフ H の例

H の各辺に、以下のようにして重みを与える．まず、 E_H^B の辺の重みはすべて 0 とする(図 7(b) では E_H^B の辺の重みは省略している)． E_H^U の各辺 $(l \rightarrow l')$ については、 l を l' より上に置いたとき、水平線分 l, l' 及びそれらに接続する垂直線分が作る交差の個数を重みとして与える． l と l' が上階層 V_i^* の同じ頂点 v につながっている場合、 v に接続する垂直線分の x 座標の大小は、交差の個数が小さくなるように一時的に定めるものとする． E_H^L の各辺についても同様である．例えば図 7(a) の L_1 と L_2 に注目すると、これらはいずれも下階層の左端の頂点につながっている． L_2 を L_1 より上に置く場合、 L_1, L_2 の左端点のいずれの x 座標をより大きくしても交差の個数は 2 であるから、辺 $(L_2 \rightarrow L_1)$ の重みは 2 となる．一方、 L_1 を L_2 より上に置く場合、 L_1 の左端点を L_2 の左端点より左に置いたときの交差は 1 箇所、右に置いたときの交差は 2 箇所である．よって、辺 $(L_1 \rightarrow L_2)$ の重みは 1 となる．

有向グラフの帰還辺集合のうち、辺数が最小のものを最小帰還辺集合と呼ぶ．さらに、最小帰還辺集合のうち、辺の重みの総和が最大のを最大重み最小帰還辺集合と呼ぶことにする．ステップ3では、以下の問題を発見的手法により解く．

[問題] H の最大重み最小帰還辺集合 X のうち、グラフ $H - X$ における最長道（通過する辺の本数が最大の有向道）の長さが最小となるものを求めよ。

図 7(b) のグラフ H の場合、この問題の解の一つは $X = \{(l_2 \rightarrow l_1), (l_2 \rightarrow l_3), (L_2 \rightarrow L_1), (L_3 \rightarrow L_2), (L_3 \rightarrow L_4), (L_4 \rightarrow L_2)\}$ である。この X に対するグラフ $H - X$ を図 8(a) に示す。このグラフに残った辺の重みの総和は 7 であり、最長道長は 4 である。残った辺の向きにしたがい、4.4.2 で述べる方法によって、水平線分の上から下への順序と y 座標を定めることにより、図 8(b) のように、辺交差数が 7、水平線分群数が (最長道長) + 1 = 5 の直交描画を得ることができる。

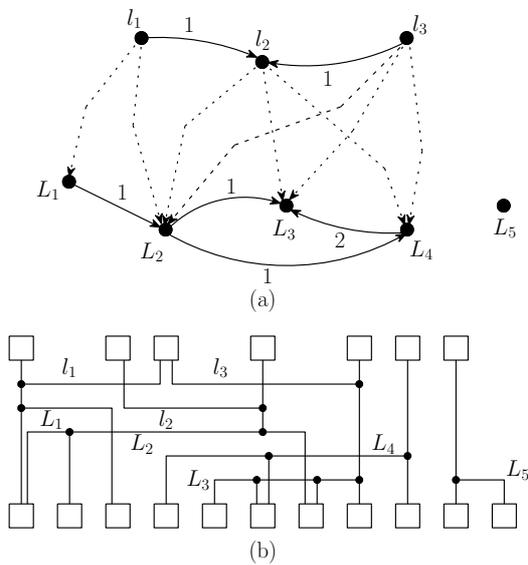


図 8 グラフ $H - X$ の例と直交描画

4.4.2 水平線分配置法

以下では、4.4.1 で示した問題に対する発見的手法 (MWFAS と呼ぶ) を提案した後、水平線分の順序と y 座標を決める方法について述べる。

任意の有向グラフ $G' = (V', E')$ と辺の任意の集合 $E'' \subseteq E'$ に対して、 E'' の各辺の向きを逆向きにして得られる集合 $\{(u, v) \mid (v, u) \in E''\}$ を $Rev(E'')$ と表す。寺本ら [17] は、有向グラフ $G' = (V', E')$ が与えられたときに、要素数ができるだけ少ない帰還辺集合 F で、 $(V', E' - F \cup Rev(F))$ の最長道長ができるだけ小さいものを求めるアルゴリズムを示している。MWFAS はこのアルゴリズムをもとにしたものであり、グラフ $H - X$ の最長道長を小さく抑えるために、文献 [17] と同じ工夫を用いている。

4.4.1 で定義したグラフ H に関して、次の補題が成立する。

[補題 1] グラフ H の任意の最小帰還辺集合 X に関して、次の (i), (ii) が成立する。

(i) $X \cap E_H^B = \emptyset$.

(ii) X は、各逆並行辺対からちょうど 1 本の辺を含む。

(証明) H には V_H^L の頂点から V_H^U の頂点に向かう辺がないので、(i) は明らかである。任意の逆並行辺対 $p = \{(l \rightarrow l'), (l' \rightarrow l)\}$ に対して、 X は p 中の辺を少なくとも 1 本は含む。 X が p の両方の辺を含むものと仮定する。グラフ $H - X$ はアサイクリックである。このグラフが l から l' への有向道をもつ場合、 $H - X$ に辺 $(l \rightarrow l')$ を加えてもアサイクリックであるから、 $X - \{(l \rightarrow l')\}$ が H の帰還辺集合になる。逆に、 $H - X$ が l から l' への有向道をもたない場合には、 $X - \{(l' \rightarrow l)\}$ が H の帰還辺集合になる。いずれの場合も X が最小帰還辺集合であることに矛盾するから、 X は p 中の辺をちょうど 1 本含む。 \square

方法 MWFAS は、最初、帰還辺集合 X を空集合とし、それに辺を加えていく。それと共に、 X に加えないことを決定した辺を、別の集合 E^X に加えていく。最初は $E^X = E_H^B$ とし、ある辺 $(l \rightarrow l') \in E_H^U \cup E_H^L$ を X に加えたときに $(l' \rightarrow l)$ を E^X に加えるが、このようにしてよいことは補題 1(i), (ii) による。

MWFAS は、 X に加える辺を決定するために、あるグラフ H' の頂点で、後述する条件を満たすもの v^* を選択する。そして、 $E_{H'}^-(v^*)$ の辺を X に加え、 $E_{H'}^+(v^*)$ の辺を E^X に加える。 H' は最初 $H - E_H^B$ としておき (図 7(b) における頂点 L_5 のように) 孤立点をもつ場合にはそれを削除する。そして、 v^* に関する処理が終わるごとに $H' \leftarrow H' - \{v^*\}$ とし、孤立点ができれば削除する。

頂点 v^* の射入辺すべてを X に加えることになるので、 X の辺の重みの総和を大きくするために、重みの大きな射入辺が多い頂点を v^* にすることが望ましい。そこで、 H' の各頂点に対して (射入辺の重みの総和) - (射出辺の重みの総和) を計算し、この値が最大の頂点 (重み差最大点と呼ぶ) の集合 D を求める。そして、その中から v^* を選択する。

この選択を行う際には、グラフ (V_H, E^X) の最長道長、及び各頂点を含む有向道の長さの最大値をできるだけ増やさないことを考える。そのために、文献 [17] と同様に、以下の工夫をする。各頂点 v に対して二つの値 f_v, b_v を求める。 f_v を F ランク、 b_v を B ランクと呼び、 $f_v + b_v$ を v のランク和と呼ぶ。また、全頂点のランク和のうちの最大値を最大ランク和と呼ぶ。MWFAS 実行中の各時点のグラフ (V_H, E^X) において、 f_v はソースから v への有向道の長さの最大値であり、 b_v は v からシンクへの有向道の長さの最大値である。 (V_H, E^X) において、各頂点 v のランク和は、 v を通る有向道の長さの最大値であり、最大ランク和は最大道長である。各頂点の F ランク及び B ランクの計算及び更新は、文献 [17] に述べられている方法により行う。

D の中から v^* を選択する方法は、各頂点 $v \in D$ について、それを v^* とした後の最大ランク和を計算し、その値が最小となる頂点の集合 D' を求める。そして、 D' の中で F ランクが最小の頂点のうち、B ランクが最大のものを v^* とするというものである。

以下に、方法 MWFAS の概略を示す (F ランク及び B ランクの計算に関する部分は省略している)。この記述において、deliv とは、 H' からすべての孤立点を削除する手続きである。

```
begin
   $X \leftarrow \emptyset$ ;  $E^X \leftarrow E_H^B$ ;
   $H' \leftarrow H - E_H^B$ ; deliv;
  while  $H' \neq (\emptyset, \emptyset)$  do
    begin
       $D \leftarrow H'$  中の重み差最大点すべてからなる集合;
      上述の方法により、 $D$  の頂点の中から  $v^*$  を選択する;
       $X \leftarrow X \cup E_{H'}^-(v^*)$ ;
       $E^X \leftarrow E^X \cup E_{H'}^+(v^*)$ ;
       $H' \leftarrow H' - \{v^*\}$ ; deliv;
    end;
  end;
```

図9 方法 MWFAS の概略

この方法の実行終了時の (V_H, E^X) における最大ランク和に 1 を加えた値を k とする。以下、水平線分を k 個の水平線分群に分割する方法を説明する。同じ F ランクをもつ頂点の間に辺が存在しないから、対応する水平線分は互いに重なっておらず、同じ水平線分群に加えることができる。同じ B ランクをもつ頂点についても同様である。上水平線分は上階層 V_i^* に、下水平線分は下階層 V_{i+1}^* に近く置いた方が垂直線分の長さが短くなって望ましい。そこで、各上水平線分 l については、上から $f_l + 1$ 番目の水平線分群に加え、各下水平線分 L については、下から $b_L + 1$ 番目の水平線分群に加える。このようにして水平線分群に分割した後、2. で述べたようにして、各水平線分に y 座標を割り当てる。

4.5 ステップ 4

ステップ 4 では、各頂点に接続する垂直線分の (左から右への) 順序を定め、 x 座標を決定する。ステップ 3 までは、各水平線分 l に対して左右の仮座標のみを定めていたが、ステップ 4 において、 l の左右の端点の実座標が決まることになる。さらに、各高階辺の上下水平線分をつなぐための垂直線分に対しても、最終的な x 座標が決まることになる (その垂直線分を、上下水平線分のどの端点に接続させるかをステップ 2 で決めていたため)。以上により、 V_i^* と V_{i+1}^* の間の描画を完成する。

上階層 V_i^* 上の各頂点 v について、 v につなぐ垂直線分を、それに接続する水平線分 l により、以下の三つのタイプのいずれかに分類する。

タイプ 1: l の右仮座標が $x(v)$ に等しい。

タイプ 2: l の左仮座標が $x(v)$ に等しい。

タイプ 3: タイプ 1, 2 以外。

v に垂直線分を接続する際、図 10 の例のように、左から、タイプ 1, タイプ 3, タイプ 2 の順につないでいく。ただし、タイプ 1 の垂直線分が複数ある場合、それらの順序は、水平線分と不必要に交差しないように、接続する水平線分の y 座標の順にしたがって決定する。タイプ 2 の線分が複数ある場合も同様である。一方、タイプ 3 の線分が複数ある場合、それらの順序は任意とする。このようにして垂直線分の順序を決めた後、頂点の幅 (実頂点は W_R , ダミー頂点は W_D) の範囲内で、垂直線分間の距離が等間隔になるように、 x 座標を決定する。ただし、 v と同じ x 座標をもつ頂点 w が下階層 V_{i+1}^* に存在し、かつ v と w を含む垂直線分がある場合には、その x 座標が $x(v)$ に一致するようにする。

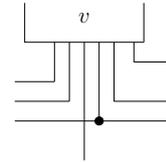


図10 頂点への垂直線分の接続

下階層上の各頂点 v についても、接続する垂直線分の順序と x 座標を、上と同様に決定する。ただし、上階層の頂点に接続する垂直線分と重なることのないよう x 座標を調整することがある (詳細は省略する)。

5. 計算機実験

ランダムに作成した階層グラフ $G = (V, E)$ を用いて計算機実験を行った。 G の階層数 h , 頂点数 $|V|$, 辺数 $|E|$ の組合せは $(h, |V|, |E|) = (2, 20, 20), (2, 20, 40), (4, 40, 40), (4, 40, 80)$ の 4 通りとし、それぞれの組合せについて 200 個のグラフを用意した。実行した方法は以下の四つである。

提案法: 3. で述べた直交描画アルゴリズムの第 5 段階において、4. で述べた方法を実行するもの。

方法 1: 直交描画アルゴリズムの第 1~4 段階を実行した後、各辺を直線で描く方法。

方法 2: 第 5 段階のステップ 3 以外は提案法と同じであるが、ステップ 3 では (文献 [9] と同様) 区間グラフの彩色アルゴリズムを用いて、水平線分を水平線分群に分割する方法 (詳細は省略する)。

方法 3: 第 5 段階のステップ 3 以外は提案法と同じであるが、ステップ 3 では、 v^* を決定する際、重み差最大頂点の中から任意に選ぶもの。

実験項目は、最終的に得られた描画における辺交差数、総水平線分群数 (方法 1 を除く)、及び実行時間 (第 1

段階の開始から描画を得るまでの時間)である。実験に使用した計算機のCPUはIntel Core i7 2600K, OSはLinux 2.6, プログラミング言語はJava 5.0である。

実験結果を表1に示す。表中の各数値は200個のグラフに対する平均値である。

表1 実験結果

| h | $ V $ | $ E $ | 手法 | 辺交差数 | 水平線分群数 | 時間 [ms] |
|-----|-------|-------|-----|--------|--------|---------|
| 2 | 20 | 20 | 方法1 | 12.78 | -- | 3.97 |
| | | | 方法2 | 9.07 | 2.78 | 4.23 |
| | | | 方法3 | 7.18 | 3.34 | 4.87 |
| | | | 提案法 | 7.18 | 3.18 | 4.97 |
| 2 | 20 | 40 | 方法1 | 150.87 | -- | 4.44 |
| | | | 方法2 | 53.94 | 7.38 | 5.23 |
| | | | 方法3 | 42.54 | 8.77 | 7.06 |
| | | | 提案法 | 42.48 | 8.41 | 10.63 |
| 4 | 40 | 40 | 方法1 | 16.34 | -- | 23.00 |
| | | | 方法2 | 15.11 | 9.52 | 24.72 |
| | | | 方法3 | 12.76 | 10.10 | 24.73 |
| | | | 提案法 | 12.76 | 9.86 | 25.69 |
| 4 | 40 | 80 | 方法1 | 164.99 | -- | 43.38 |
| | | | 方法2 | 135.88 | 23.29 | 45.06 |
| | | | 方法3 | 110.88 | 27.74 | 46.14 |
| | | | 提案法 | 110.74 | 26.53 | 49.00 |

提案法は、方法1, 2に比べて辺交差数を減らすことができ、グラフがより密になるにつれてその差が大きくなっている。方法2は水平線分群数を減らすことを目的とした方法であるため、提案法による描画の水平線分群数は方法2には及ばない。しかし、方法3による描画の水平線分群数より値が若干小さくなっていることから、 (V_H, E^X) の最長道長を考慮して v^* を選択する処理に効果があったことが分かる。

6. あとがき

本稿では、階層グラフの直交描画アルゴリズムの枠組みを示し、各頂点の座標が決定された後に各高階辺を垂直・水平線分を用いて描く方法を提案した。この方法は、辺交差数を少なくすることを主な目的としたものであるが、水平線分群数を少なく抑えるための工夫もしている。

4.で提案した方法のステップ4の終了後に、各高階辺の上水平線分と下水平線分をつなぐ垂直線分の位置を調整することによって、辺交差数をさらに減らし得る可能性がある。また、同じ高階辺の上下水平線分が同じ y 座標をもつことを許し、可能な場合にそのような水平線分の移動をすることによって、水平線分群数を減らし得る可能性もある。このような後処理について、現在検討中である。また、3.で示した直交描画アルゴリズムの第1, 2, 4段階を実行する方法についても、検討を続けている。今後は、第3段階(各階層における頂点の配置順序の決

定)に関して、直交描画により適した方法を構築していきたいと考えている。

謝辞 本研究の一部は科学研究費補助金(課題番号: 24500040)の援助を受けて行ったものである。

参考文献

- [1] 杉山公造, グラフ自動描画法とその応用 - ビジュアルヒューマンインターフェース, 計測自動制御学会, 1993.
- [2] K. Sugiyama, S. Tagawa, and M. Toda, "Methods for visual understanding of hierarchical system structures," IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics, vol.SMC-11, no.2, pp.109-125, 1981.
- [3] O. Bastert and C. Matuszewski, "Layered drawings of digraphs," Drawing Graphs (M. Kaufman and D. Wagner eds.), Lecture Notes in Computer Science, vol.2025, pp.87-120, Springer, Berlin, 2001.
- [4] 荒木徹也, 増田澄男, 山口一章, "階層グラフ描画における頂点座標決定アルゴリズム," 電子情報通信学会論文誌(A), Vol.J94-A, No.12, pp.960-973, 2011.
- [5] 荒木徹也, 増田澄男, 山口一章, "階層グラフ描画におけるダミー頂点の共有," 電子情報通信学会論文誌(A), Vol.J94-A, No.12, pp.950-959, 2011.
- [6] 荒木徹也, 増田澄男, 山口一章, "階層グラフ描画アルゴリズムにおける辺の形状の決定法," 平成20年電気関係学会関西支部連合大会, G10-9, 2008.
- [7] 荒木徹也, 増田澄男, 山口一章, "グラフの階層的直交描画アルゴリズムの改良," 平成21年電気関係学会関西支部連合大会, G10-10, 2009.
- [8] 荒木徹也, 山口一章, 増田澄男 "グラフの階層直交描画における頂点座標決定アルゴリズム," 平成23年度情報処理学会関西支部支部大会講演論文集, B-02, 2011.
- [9] G. Sander, "A fast heuristic for hierarchical manhattan layout," Proc. Symp. on Graph Drawing (GD'95), Lecture Notes in Computer Science, vol.1027, pp.447-458, Springer, Berlin, 1996.
- [10] G. Sander, "Layout of directed hypergraphs with orthogonal hyperedges," Proc. 11th Int'l Symp. on Graph Drawing (GD2003), Lecture Notes in Computer Science, vol.2912, pp.381-386, Springer, Berlin, 2004.
- [11] T. Eschbach, W. Günther, and B. Becker, "Orthogonal hypergraph drawing for improved visibility," Journal of Graph Algorithms and Applications, vol.10,no.2, pp.141-157, 2006.
- [12] R. Peeters, "The maximum edge biclique problem is NP-complete," Discrete Applied Mathematics, vol.131, pp.651-654, 2003.
- [13] 田守健太郎, 山口一章, 増田澄男, "局所探索法による階層的描画の辺交差数削減," 電子情報通信学会論文誌(A), vol.J92-A, no.1, pp.55-61, 2009.
- [14] U.L. Gupta, D.T. Lee, and J.Y.-T. Leung, "Efficient algorithms for interval graphs and circular-arc graph," Networks, vol.12, pp.459-467, 1982.
- [15] M.R. Garey and D.S. Johnson, Computers and Intractability - A Guide to the Theory of NP-Completeness, Freeman, New York, NY, 1979.
- [16] P. Eades, X. Lin and W.F. Smyth, "A fast and effective heuristic for the feedback arc set problem," Information Processing Letters, vol.47, pp.319-323, 1993.
- [17] 寺本正幸, 増田澄男, 山口一章, "有向グラフ描画アルゴリズムにおける閉路削除法の改良," 電子情報通信学会論文誌(A), vol.J92-A, no.6, pp.434-439, 2009.