プログラムのページ

担当　一松　信

6703. 整級数の連分数展開

一松　信（立教大学理学部）

1. 計算の原理

1.1. 一般に（形式的）整級数

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots \quad (1)$$

で表わされる関数は，次のような連分数に展開できる

$$f(x)=\cfrac{c_0}{1+\cfrac{c_1x}{1+\cfrac{c_2x}{1+\cdots}}} \quad (2)$$

ここに係数 c_n は，次のような**商差法**（quotient-difference algorithm）で求められる[1,2]. 順次

$$\left.\begin{aligned} &q_n^{(1)}=a_{n+1}/a_n,\quad e_n^{(0)}=0,\\ &q_n^{(k+1)}=q_{n+1}^{(k)}e_{n+1}^{(k)}/e_n^{(k)},\\ &e_n^{(k)}=e_{n+1}^{(k-1)}+q_{n+1}^{(k)}-q_n^{(k)} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$(k=1,\ 2,\ \cdots;\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

とおくとき，

$$c_0=a_0,\ c_{2k-1}=-q_0^{(k)},\ c_{2k}=-e_0^{(k)}.$$

（2）は場所をとるので，便宜上これを次のように書くことにする．

$$f(x)=c_0/1+c_1x/1+c_2x/1+\cdots \quad (2')$$

(2′) は異様であるが，/1 で切ったとき，右から / と + とを交互に計算すれば，（2）となる．

1.2. （3）を n が負の添え字にも延長し，$k\geqq 2$ のとき $q_{1-k}^{(k)}=0$ とすると，$q_n^{(k)}$, $e_n^{(k)}$ は $k+n\geqq 1$ の範囲で定義される．このとき，（1）の**逆数** $1/f(x)$（逆関数ではない！）の整級数

$$1/f(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots \quad (4)$$

の係数は，次の式で与えられる[1]．

$$b_0=1/a_0,\ b_1=-b_0\cdot q_0^{(1)},\ b_n=b_{n-1}\cdot e_{2-n}^{(n-1)}. \quad (5)$$

1.3. 連分数（2）が与えられたとき，c_nx で切った有限連分数を整理した有理近似式 $P_n(x)/Q_n(x)$ は，つぎの漸化式で与えられる[3,4]．

$$P_n(x)=p_0^{(n)}+p_1^{(n)}x+\cdots+p_k^{(n)}x^k$$
$$Q_n(x)=q_0^{(n)}+q_1^{(n)}x+\cdots+q_k^{(n)}x^k,$$
$$p_0^{(n)}=c_0\ (n\geqq 0),\ q_0^{(n)}=1\ (n\geqq -1),$$
$$n<2k \text{ のとき } p_k^{(n)}=0,\ n<2k-1 \text{ のとき } q_k^{(n)}=0$$
$$p_k^{(n)}=p_k^{(n-1)}+c_np_{k-1}^{(n-2)},\ q_k^{(n)}=q_k^{(n-1)}+c_nq_{k-1}^{(n-2)}. \quad (6)$$

実際には負の添え字の項は使用せず，

$$p_1^{(n)}=c_0(c_2+\cdots+c_n)\ (n\geqq 2),\ p_1^{(1)}=0 \quad (6')$$
$$q_1^{(n)}=c_1+c_2+\cdots+c_n$$

として出発するほうが便利である．

1.4. 以上の計算は，実質的には有限項しか使っていないから，（1）の収束は関係ない．実際，整級数（1）が収束する x については，（2）は文句なしに収束するが，（1）の収束半径が 0 でも（漸近展開式など），$a_n>0$ で a_n の増加が，大ざっぱにいって，$(2n)!$ よりもおそければ，連分数（2）は，正の実数値 x を除いて収束する．a_n の符号が正負交互の場合には，$-x$ を x におきかえて考える．したがって，この方法は，たとえば

$$1-1!x+2!x^2-3!x^3+4!x^4-\cdots\cdots \quad (7)$$

のような収束しない整級数の総和法に利用できる[5]．ただし，このような場合には，（2）の収束はきわめておそく，実用には何らかの加速法が必要である[6]．

2. プログラムと結果

後記のプログラムは，上記の公式を CDC 6600 SCOPE 2.0 の FORTRAN Ⅳ で書いたものである．この FORTRAN は，たとえばサブルーチンを本プログラムのあとにつけてよいなど，拡張された部分もあるが，他方 HARP などより制限の厳しいところもある．しかし他の計算機用に修正することは容易と思う．

負や0の添え字をさけるため，（3）の $q_n^{(k)}$, $e_n^{(k)}$ がそれぞれ Q(K, N+K−1), E(K, N+K) に相当するように修正してある．a_0, $q_0^{(1)}$, b_0, c_0 は特別に扱い，係数 a_n, b_n は，共通因数 a_0, b_0 をくくりだした形で計算して印刷した（これは単に便宜上にすぎない）．また（6）において現われる係数 $p_k^{(n)}$, $q_k^{(n)}$ には，E, Q を共用してある．

（3）の計算中，分母が 0 になると，この計算は続行できなくなるので，その判定を加えるべきである．しかし当面の目的の諸関数は，幸い $e_n^{(k)}$ がすべて 0 にならないことが理論的に既知のものばかりであったため，この判定を省略してある．

結果は指数関数について実験したものを示す．e^{-x} の整級数の係数および連分数の係数（正しくは $c_0=1$, $c_1=-1, c_2=1/2$; $k\geqq 2$ について $c_{2k-1}=-1/(4k-2)$,

$c_{2k}=1/(4k-2)$; この公式は既知[3]) は，次第に下位に誤差が入ってはいるが，十分満足すべきものといえる．なお有理近似式の精度をみるために，$x=1$ を代入した値を別表に示した．

連分数の結果は (2′) を毎回改行した形に，P_n/Q_n はそれぞれを多項式の形で毎項を改行して印刷してある．n が奇数のとき，$P_n(x)$ の最高べきに 0 が現われるのは，これを消した方がきれいだが，本質的ではないと思う．

プログラムの注意 配列の大きさを 20 にしたのは，

〔プログラム〕

```
      PROGRAM INCGMA(INPUT, OUTPUT)
C     RECIPROCAL AND CONTINUED FRACTION
      EXPANSION
      COMMON  M
      DIMENSION A(20), B(20), C(20), Q(20,20),
      E(20, 20)
C     A ORIGINAL COEF,, B COEF, OF RECIPROCAL,
C     C  COEF, OF CONTINUED FRACTION, Q,E USE
      IN Q-D ALGORITHM
      N= 15
      AO= COEF(0)
C     COEF IS FUNCTION GENERATING COEF, OF POWER
      SERIES
      PRINT 100, N, AO
  100 FORMAT (4H1 N=, I2/
     1 10HO  F(X)=    , E20,11, 8H* (1,0 + )
      W = COEF (1)
      S= W/AO
      A(1)= S
      DO 10 I=1,N
      PRINT 101, A(I), I
  101 FORMAT (10X, E20,11, 4H*X**, I2, 2H +)
      UM= COEF(I+1)
      Q(1,I)= UM/W
      A(I+1)=UM/AO
      W= UM
      E(1,I) = Q(1,I) - S
      S= Q(1,I)
   10 CONTINUE
      I= N+1
      PRINT 102, A(I), I
  102 FORMAT (10X, E20,11, 4H*X**, I2, 7H + ...) /)
      NN=N
      DO 20 J= 2,N
      NN= NN-1
      S= 0,0
      DO 30 I=1,NN
      W= Q(J-1, I)*E(J-1, I+1)/E(J-1,I)
      Q(J,I) = W
      E(J,I) = W - S + E(J-1, I)
      S=W
   30 CONTINUE
   20 CONTINUE
C     QUOTIENT - DIFFERENCE ALGORITHM
  201 BO =1,0/AO
      B(1) = - A(1)
      C(1)= B(1)
      PRINT 103, BO
  103 FORMAT ( 10HO 1/F(X)=   , E20,11, 8H* (1,0 + )
      DO 40  I= 1,N
C     COMPUTATION OF COEF, OF RECIPROCAL B(I)
      B(I+1)=B(I)*E(I,1)
      PRINT 101, B(I), I
      I2=I+I
      IF (N - I2)  40, 210, 220
  220 C(I2+1) = -Q(I+1, I)
  210 C(I2) = -E(I,I)
   40 CONTINUE
      I = N+1
      PRINT 102, B(I), I
      PRINT 104, AO
  104 FORMAT (20HO CONTINUED FRACTION/
     1 10HO  F(X)=  ,E20,11, 5H / 1+ )
      DO 50 I=1,N
      PRINT 105, I,C(I)
  105 FORMAT(1H , I2, 7X, E20,11, 5HX/ 1+ )
   50 CONTINUE
C
C     RATIONAL APPROXIMATION FORMULAS BY TRUNCATED
      CONTINUED FRACTION
      PRINT 111
  111 FORMAT
     1(56H1 RATIONAL APPROXIMATION BY TRUNCATED
      CONTINUED FRACTION
      Q(1,1)= C(1)
      DO 60 J=1,N
      UM=C(J)
      I2 = J/2 +1
      NN= (J+1)/2
      E(J, I2) = 0,0
      Q(J, NN+1) =0,0
      IF (J ,EQ, 1) GO TO 71
      Q(J,1) = Q(J-1, 1) + UM
      E(J,1) = E(J-1, 1)+AO *UM
      IF (J ,EQ, 2) GO TO 71
      DO 70 I= 2,NN
      IF (I ,LT, NN ,OR, I2 ,NE, NN)
     1E(J,I) = E(J-1, I) + E(J-2, I-1)*UM
      Q(J,I) = Q(J-1, I) + Q(J-2, I-1)*UM
   70 CONTINUE
   71 CONTINUE
      PRINT 112, J, AO
  112 FORMAT (4HO I=, I2, 1X, E20,11,
     1  6X, 1H/, 9X, 3H1,0 )
      DO 80  I=1,NN
      PRINT 113, E(J,I), I, Q(J,I), I
  113 FORMAT (7H     + , E20,11, 4H*X**, I2,
     1  5X, 2H+ , E20,11, 4H*X**, I2 )
   80 CONTINUE
   60 CONTINUE
      STOP
      END


      FUNCTION COEF(M)
C     TEST -  EXPONENTIAL FUNCTION
      COEF = 1,0
      IF (M ,LT, 2) GO TO 990
      DO 90 I=2,M
      COEF = COEF/FLOAT(I)
   90 CONTINUE
  990 RETURN
      END
```

〔結　　果〕

```
N=15

 F(X)=       1,00000000000E+00+ (1,0 +
             1,00000000000E+00*X**  1 +
             5,00000000000E-01*X**  2 +
             1,66666666667E-01*X**  3 +
             4,16666666667E-02*X**  4 +
             8,33333333333E-03*X**  5 +
             1,38888888889E-03*X**  6 +
             1,98412698413E-04*X**  7 +
             2,48015873016E-05*X**  8 +
             2,75573192240E-06*X**  9 +
             2,75573192240E-07*X** 10 +
             2,50521083854E-08*X** 11 +
             2,08767569879E-09*X** 12 +
             1,60590438368E-10*X** 13 +
             1,14707455977E-11*X** 14 +
             7,64716373182E-13*X** 15 +
             4.77947733239E-14*X** 16 +  ...)
```

```
1/F(X)=     1,00000000000E+00+ (1,0 +
           -1,00000000000E+00*X** 1 +
            5,00000000000E-01*X** 2 +
           -1,66666666667E-01*X** 3 +
            4,16666666667E-02*X** 4 +
           -8,33333333333E-03*X** 5 +
            1,38888888889E-03*X** 6 +
           -1,98412698412E-04*X** 7 +
            2,48015873015E-05*X** 8 +
           -2,75573192236E-06*X** 9 +
            2,75573192228E-07*X**10 +
           -2,50521083823E-08*X**11 +
            2,08767569806E-09*X**12 +
           -1,60590438211E-10*X**13 +
            1,14707455659E-11*X**14 +
           -7,64716367148E-13*X**15 +
            4,77947722436E-14*X**16 + ...)

CONTINUED FRACTION

 F(X)=      1,00000000000E+00 / 1+
1          -1,00000000000E+00X/ 1+
2           5,00000000000E-01X/ 1+
3          -1,66666666667E-01X/ 1+
4           1,66666666667E-01X/ 1+
5          -1,00000000000E-01X/ 1+
6           9,99999999999E-02X/ 1+
7          -7,14285714287E-02X/ 1+
8           7,14285714289E-02X/ 1+
9          -5,55555555549E-02X/ 1+
10          5,55555555534E-02X/ 1+
11         -4,54545454615E-02X/ 1+
12          4,54545454805E-02X/ 1+
13         -3,84615383851E-02X/ 1+
14          3,84615382435E-02X/ 1+
15         -3,33333337711E-02X/ 1+
```

```
RATIONAL APPROXIMATION BY TRUNCATED CONTINUED FRACTION

I= 1   1,00000000000E+00         /       1.0
   +   0,                 *X** 1    +   -1.00000000000E+00*X** 1

I= 2   1,00000000000E+00         /       1.0
   +   5,00000000000E-01*X** 1     +   -5.00000000000E-01*X** 1

I= 3   1,00000000000E+00         /       1.0
   +   3,33333333333E-01*X** 1     +   -6.66666666667E-01*X** 1
   +   0,                 *X** 2    +    1.66666666667E-01*X** 2

I= 4   1,00000000000E+00         /       1.0
   +   5,00000000000E-01*X** 1     +   -5.00000000000E-01*X** 1
   +   8,33333333333E-02*X** 2     +    8.33333333333E-02*X** 2

I= 5   1,00000000000E+00         /       1.0
   +   4,00000000000E-01*X** 1     +   -6.00000000000E-01*X** 1
   +   5,00000000000E-02*X** 2     +    1.50000000000E-01*X** 2
   +   0,                 *X** 3    +   -1.66666666667E-02*X** 3

I= 6   1,00000000000E+00         /       1.0
   +   5,00000000000E-01*X** 1     +   -5.00000000000E-01*X** 1
   +   1,00000000000E-01*X** 2     +    1.00000000000E-01*X** 2
   +   8,33333333333E-03*X** 3     +   -8.33333333334E-03*X** 3

I= 7   1,00000000000E+00         /       1.0
   +   4,28571428571E-01*X** 1     +   -5.71428571429E-01*X** 1
   +   7,14285714285E-02*X** 2     +    1.42857142857E-01*X** 2
   +   4,76190476189E-03*X** 3     +   -1.90476190476E-02*X** 3
   +   0,                 *X** 4    +    1.19047619048E-03*X** 4

I= 8   1,00000000000E+00         /       1.0
   +   5,00000000000E-01*X** 1     +   -5.00000000000E-01*X** 1
   +   1,07142857143E-01*X** 2     +    1.07142857143E-01*X** 2
   +   1,19047619048E-02*X** 3     +   -1.19047619047E-02*X** 3
   +   5,95238095240E-04*X** 4     +    5.95238095237E-04*X** 4

I= 9   1,00000000000E+00         /       1.0
   +   4,44444444445E-01*X** 1     +   -5.55555555555E-01*X** 1
   +   8,33333333337E-02*X** 2     +    1.38888888888E-01*X** 2
   +   7,93650793658E-03*X** 3     +   -1.98412698412E-02*X** 3
   +   3,30687830694E-04*X** 4     +    1.65343915343E-03*X** 4
   +   0,                 *X** 5    +   -6.61375661369E-05*X** 5
```

実用上 20 項程度でたりると考えたためで，いくつでもよい．Nは項数で，データとして入力したほうがよい．(N+1)≦(配列の大きさ) の必要がある．

COEF(M) は (1) の係数を順次作りだすサブルーチンで，この例では $a_n=1/n!$ (指数関数) にしてあるが，他に平方根，三角関数，対数関数，逆三角関数，Bessel 関数，さらに積分指数関数 ((7) に相当) やガンマ関数の漸近展開など，十数種の関数についてテストし，いずれも満足すべき結果をえた．

以上の計算は，Brookhaven National Laboratory の CDC 6600 によった (問題番号 M 041102; 浮動小数点で仮数部 48 ビット)，このような小さなテストだけだと 1 秒もかからず，少しもったいないが，各種の有理近似式作成の道具として作ってみた．

係数を数値的にではなく，a_n を与える数式にもとづいて，数式として計算できれば，特殊関数の連分数を組織的に求めるのにさらに有用と信ずる．

付表

$e^1=2.7182818285$ の近似値

n	$P_n(1)$	$Q_n(1)$	$P_n(1)/Q_n(1)$
1	1.0000000000	0.	∞
2	1.5000000000	0.5000000000	3.0000000000
3	1.3333333333	0.5000000000	2.6666666667
4	1.5833333333	0.5833333333	2.7142857143
5	1.4500000000	0.5333333333	2.7187500000
6	1.6083333333	0.5916666667	2.7183098591
8	1.6196428571	0.5958333333	2.7182817183
11	1.5562049062	0.5724957912	2.7182818285

参 考 文 献

1) P. Henrici: Some applications of the quotient-difference algorithm Proc. 15th Symp. App, Math., Amer. Math. Soc., 1963, pp. 159〜183.

2) 一松信：商差法について，数学 18 (1966), pp. 106〜109.

3) H.S. Wall: Analytic theory of continued fractions, Van Nostrand, 1948.

4) A.N. Khovanskii (P. Wynn 訳): The application of continued fractions and their generalizations to problems in approximation theory, P. Noordhoff N.V., 1963.

5) F.L. Bauer : Nonlinear sequence transformations, H.L. Garabedian 編, Approximation of functions, Elsevier, 1965. pp. 134〜151.

6) S. Hitotumatu : On a method of acceleration of convergence, to appear.

(昭和 42 年 2 月 6 日受付)