

多次元線型内挿の一方式について*

伊 理 正 夫**

1. 問題の所在

n 次元ユークリッド空間 R^n の点 $x=(x_1, \dots, x_n)$ (x_i : 実数) は, すべての座標成分 x_i が整数であるとき“格子点”と呼ばれる. R^n の格子点の集合を G と書く. G の与えられた部分集合 G_0 に対して, 全頂点が G_0 に属するような単位(超)立方体を“ G_0 の単位立方体”と呼び, G_0 の単位立方体の和集合を \bar{G}_0 と書くことにする. G_0 の各点 y に対して実数値 $g(y)$ を定める函数が与えられているとき, g を, すべての $y \in G_0$ に対して

$$f(y) = g(y) \tag{1.1}$$

であるような \bar{G}_0 の上の函数 f に拡大することを, R^n における“内挿”と, ここでは呼ぶことにする.

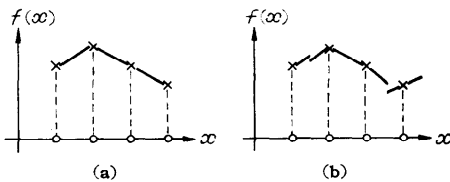
(1.1) の条件以外に, さらにいろいろな副条件を課することによって各種の内挿問題が生じる. 最も簡単な場合は

「 $f(x)$ が断片的に座標 x_i の線型函数である」

$$\tag{1.2}$$

ときであろう.(ここで, 「断片的に」とは「 \bar{G}_0 を適当に有限個の部分集合 S_1, S_2, \dots に分割した場合, その各々の上で」ということを意味するものとする.) $n=1$, すなわち 1 次元の場合には, これはいわゆる「折線内挿」になる. 副条件がそれ以外になければ, $f(x)$ が連続でない, たとえば第 1 図 (b) のような場合も許されることになるので, われわれはさらに「 $f(x)$ が連続である」

$$\tag{1.3}$$



第 1 図

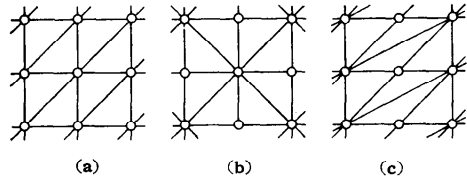
ことをも要請しよう.

第 1 図 (a) に示すように, \circ 印の格子点における函数値 \times だけが与えられた場合, 「折線内挿」といえば, 常識的には, 相隣 \times 印の点の間を線分で直接結んだものを考えるであろう. このような内挿方式の n 次元への拡張は次のようにして特徴づけることができよう.

「各 S_i は $n+1$ 個の G_0 の点を頂点とする単体である」.

$$\tag{1.4}$$

(1.1)~(1.4) により規定される内挿方式は 1 次元の場合には自明であるが, 多次元になるとまださらに自由度が残る. たとえば, 2 次元の場合でも, すでに, 第 2 図 (a)~(c) に例示するように, 単体への分割法がいろいろ考えられる.



第 2 図

実用的観点からして最も重要なのは, 点 $x (\in \bar{G}_0)$ が任意に与えられた場合, x の属する単体(の頂点の組)が簡単な手続で求められることである. それに関係して, 分割はなるべく規則的で, なんらかの意味で一様にするのが自然な要求であろう. このような観点よりすると, 第 2 図 (c) のような分割は(格子点を格子点に移す適当なアフィン変換によって第 2 図 (b) の型の分割に帰着できるというものの)一まず考慮の外に置く方がよい. そこでわれわれは

「各単体 S_i が G_0 の単位立方体に含まれる」

$$\tag{1.5}$$

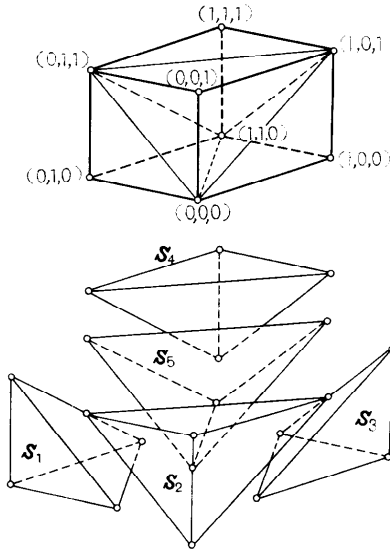
場合のみを考えることにしよう. すなわち, われわれは, まず, G_0 の単位立方体を単体に分割する方法を考えなければならない.

G_0 の一つの単位立方体 C の単体への分割が得られたとしよう. しかし, $n \geq 3$ のときには, その分割を,

* A Method of Multi-dimensional Linear Interpolation, by Masao Iri (Department of Mathematical Engineering and Instrumentation Physics, Faculty of Engineering, Univ. of Tokyo)

** 東京大学工学部

単に各座標軸方向に平行移動することによって \bar{G}_0 全体に延長しただけでは、所望の性質を備えた分割が得られるとは限らない。たとえば、第3図のように、単



第3図

位立方体を、その隅から順に欠いて行くという方針で、

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \{(0, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 0)\}, \\ S_2 &= \{(0, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}, \\ S_3 &= \{(0, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0)\}, \\ S_4 &= \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}, \\ S_5 &= \{(0, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\} \end{aligned} \right\}$$

と分割したものを平行移動したのでは、隣りの単位立方体との境界面に現われる分割の境界線が、その二つの単位立方体に共通でなくなる(例えば、第1座標軸方向に1単位だけ移動したとき、線分 $\overline{(0,0,0)(0,1,1)}$ と $\overline{(1,1,0)(1,0,1)}$ とは重ならない)が、このことは(1.3)が一般には成立しないことを意味する。(もっとも、一つの単位立方体の分割を(1.3)の条件を損わないよう全域に延長することは、その立方体の $2n$ 個の側(超)平面が鏡であるとみなして、それらに関する鏡像を次々ととることにすれば、常に可能ではある。)

また、単位立方体を勝手に単体に分割したのでは、任意の $x = (x_1, \dots, x_n)$ が属する単体を定めるための手続が一般には複雑になるし、また分割された各単体が互いに対等ではなくることがある(第3図の分割

では S_5 以外は互いに合同であるが、 S_5 は他の単体の倍の体積を有している)。

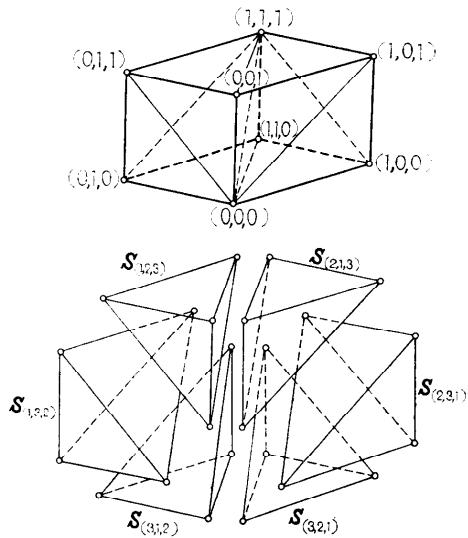
以上の考察から、「折線内挿」という1次元の場合にはあまりにも明らかな概念も、多次元に拡張するとなると、それほど自明ではないことがわかる。次節ではそのような拡張の一方式を提案する。

2. 多次元線型内挿の一方式

単位立方体 $C = \{x = (x_1, \dots, x_n) | 0 \leq x_i \leq 1 \ (i=1, \dots, n)\}$ を単体 $S_1, S_2, \dots, S_{n!}$ に分割する。各単体 S_j は $(1, \dots, n)$ の置換 (i_1, \dots, i_n) と一対一に対応づけられ、順列 (i_1, \dots, i_n) に対応する単体 S_j (これを $S_{(i_1, \dots, i_n)}$ と書くことにする) は次のように定義される。

$$S_{(i_1, \dots, i_n)} = \{x = (x_1, \dots, x_n) | 0 \leq x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq \dots \leq x_{i_n} \leq 1\}. \quad (2.1)$$

これら $n!$ 個の単体が互いに合同であることは明らかであろう。正確に表現すると、この分割は、座標軸の番号のつけかえという変換(対称群をなす)に関して不変である(かつ、任意の二つの単体の一方を他方に移す変換が存在する)という意味での対称性を有している($n=3$ の場合の例を第4図に示す)。



第4図

C 中の点 x がどの単体に属するかは、その座標成分 x_i の大きさの順序を調べるという単純な手続によって知ることができる。

単体 $S_{(i_1, \dots, i_n)}$ の $n+1$ 個の頂点と、 $S_{(i_1, \dots, i_n)}$

の点 x をそれらの一次結合として表現する式は次のようにして得られる。まず、 e_i を第 i 成分のみ 1 で他の成分が皆 0 である単位ベクトルとすると、任意の点

$$x = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in S(i_1, \dots, i_n)$$

は

$$x = \sum_{r=0}^n (x_{i_{r+1}} - x_{i_r}) d_r(i_1, \dots, i_n) \quad (2.2)$$

と書くことができることが容易に確かめられる。ただし、

$$\left. \begin{aligned} d_r(i_1, \dots, i_n) &\equiv \sum_{s=r+1}^n e_{i_s} \quad (r=0, \dots, n-1), \\ d_n(i_1, \dots, i_n) &\equiv (0, 0, \dots, 0), \\ i_{n+1} &\equiv n+1, \quad i_0 \equiv 0, \quad x_{n+1} \equiv 1, \quad x_0 \equiv 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

とする。 $(d_0$ と d_n は順列 (i_1, \dots, i_n) によらないことに注意！)

$$\left. \begin{aligned} x_{i_{r+1}} - x_{i_r} &\geq 0 \quad (r=0, \dots, n), \\ \sum_{r=0}^n (x_{i_{r+1}} - x_{i_r}) &= x_{n+1} - x_0 = 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

であるから、(2.2) は $S(i_1, \dots, i_n)$ の点 x を $d_r(i_1, \dots, i_n)$ ($r=0, \dots, n$) の凸一次結合 (荷重平均) として表現する式になっている。すなわち、これら $n+1$ 個の $d_r(i_1, \dots, i_n)$ が $S(i_1, \dots, i_n)$ の頂点である。二つ以上の単体に同時に属する点 x (すなわち x_i の中に値の等しいものがいくつもあるような点) は、それらのどれに属すると考えても (2.2) の表式は同一のものとなることも明らかである。

単位立方体 C のこのような分割は、

$$x_i - x_j = 0 \quad (2.5)$$

という式で定義される $n(n-1)/2$ 枚の超平面 (i, j は可能なあらゆる組み合わせをとる) によって C を切ることによって得られるともみなせる。分割を平行移動によって全域に延長しても条件 (1.3) が満足されることが、このような見方により直ちに示される。実際そのように延長された分割は

$$x_i - x_j = \text{整数} \quad (i \neq j; i, j=1, \dots, n) \quad (2.6)$$

という超平面と、

$$x_i = \text{整数} \quad (i=1, \dots, n) \quad (2.7)$$

という超平面とによって考えている領域の分割を行なったものと等価である。

以上の考察により、内挿公式

$$\boxed{f(x) = \sum_{r=0}^n (x_{i_{r+1}} - x_{i_r}) g(d_r(i_1, \dots, i_n))} \quad (2.8)$$

$(x \in S(i_1, \dots, i_n) \text{ のとき})$

が得られることはいうまでもない (d_r, x_0, x_{n+1} は

(2.3) のとおり)。

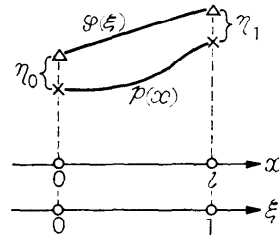
3. 近似度の検討

函数 g が G_0 を含むある領域全体で元来定義されていたものを、格子点 G_0 に制限したものであるときには、その制限された g から (2.8) により作られる内挿函数 f がもとの g とどの程度食い違ひかを検討しておくことが必要であるので、それを試みよう。恒例により、 g は 2 階連続偏微分可能であると仮定する。

まず、区間 $[0, 1]$ で定義された 2 階連続微分可能な 1 変数の函数 $p(x)$ と、区間 $[0, 1]$ での線型函数 $\varphi(\xi)$ とがあって、

$$\left. \begin{aligned} \varphi(0) &= p(0) + \eta_0, \\ \varphi(1) &= p(1) + \eta_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

であったとしよう。このとき



第 5 図

$$\Psi(\xi) = \varphi(\xi) - (\eta_1 \xi + \eta_0(1 - \xi)) \quad (3.2)$$

を考えると

$$\Psi(0) = p(0), \quad \Psi(1) = p(1) \quad (3.3)$$

となるから、よく知られた“Rolle の定理”により、任意の $\xi \in [0, 1]$ に対して

$$\Psi(\xi) - p(I\xi) = -\frac{I^2}{2} p''(x_0) \xi(1 - \xi) \quad (3.4)$$

となるような $x_0 \in (0, 1)$ が存在する。そこで $\varphi(\xi)$ と $p(I\xi)$ との差は

$$\begin{aligned} \eta(I\xi) &\equiv \varphi(\xi) - p(I\xi) = \eta_1 \xi + \eta_0(1 - \xi) \\ &\quad + \frac{I^2}{2} p''(x_0) \xi(1 - \xi) \\ &\quad (x_0 = x_0(\xi) \in (0, 1)) \end{aligned} \quad (3.5)$$

と表わされる。

さて、内挿式 (2.8) の誤差

$$\varepsilon(x) \equiv f(x) - g(x) \quad (3.6)$$

の評価に移ろう。

$$0 \equiv x_0 < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \equiv 1 \quad (3.7)$$

と仮定しても一般性を失なわない。(座標軸番号のつけかえで x_i の大小関係は変えられるし、また、 $0 =$

$x_1 = \dots = x_m$ のときには (2.2), (2.8) から明らか
なように, x_1, \dots, x_m を除いたより低次元の問題に帰
着できるからである. まず, (2.2) は

$$y_{k+1} = \sum_{r=0}^k (x_{r+1} - x_r) d_r^{(1, \dots, n)} / x_{k+1} \quad (k=0, \dots, n) \quad (3.8)$$

とおくことにより,

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= d_0, \quad y_{k+1} = \frac{x_k}{x_{k+1}} y_k + \left(1 - \frac{x_k}{x_{k+1}}\right) d_k^{(1, \dots, n)} \\ x &= y_{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

という漸化形に書きかえられることに注意しよう. こ
こで $0 \leq x_k / x_{k+1} \leq 1$ である.

$$\varepsilon_k \equiv \varepsilon(y_k) \quad (3.10)$$

とおき,

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\xi) &= f(\xi y_k + (1-\xi) d_{k+1}^{(1, \dots, n)}), \\ p(l\xi) &= g(\xi y_k + (1-\xi) d_k^{(1, \dots, n)}), \\ l^2 &= |d_k^{(1, \dots, n)} - y_k|^2 \equiv \sum_{i=1}^k \left(\frac{x_i}{x_k}\right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

を (3.5) に代入すると, (1.1) すなわち $\varepsilon(d_i) = 0$ に
より,

$$\varepsilon_{k+1} = \frac{x_k}{x_{k+1}} \varepsilon_k + \frac{l^2}{2} \frac{x_k}{x_{k+1}} \left(1 - \frac{x_k}{x_{k+1}}\right) p''(l\xi_k) \quad (k=0, 1, \dots, n) \quad (3.12)$$

を得る. いま, 考えている領域内での $g(x)$ のあらゆる
方向への第 2 次導函数の絶対値の最大 (あるいは一
つの上界でもよい) が M であるとする, すなわ
ち, 任意のベクトルを $u = (u_1, \dots, u_n)$ として

$$\left. \begin{aligned} M &= \max_{\substack{u \neq 0 \\ |u|^2 = 1}} \left| \sum_{i,j} u_i u_j \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right|, \\ |u|^2 &= \sum_{i=1}^n u_i^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

とすると, (3.12) は

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{k+1}| &\leq \frac{x_k}{x_{k+1}} |\varepsilon_k| + \frac{1}{2} M \frac{x_k}{x_{k+1}} \left(1 - \frac{x_k}{x_{k+1}}\right) \\ &\quad \times \sum_{i=1}^k \left(\frac{x_i}{x_k}\right)^2 \\ &= \frac{x_k}{x_{k+1}} \left[|\varepsilon_k| + \frac{M}{2} \left(1 - \frac{x_k}{x_{k+1}}\right) \sum_{i=1}^k \left(\frac{x_i}{x_k}\right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

と書きかえられる.

$$\varepsilon_0 = \varepsilon(d_0) = 0 \quad (3.15)$$

であるから,

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{k+1}| &\leq \frac{M}{2} \sum_{i=1}^k \frac{x_i}{x_{k+1}} \left(1 - \frac{x_i}{x_{k+1}}\right) \sum_{j=1}^k \left(\frac{x_j}{x_i}\right)^2 \\ &= \frac{M}{2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{x_{k+1}} \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{i+1}}\right) \sum_{j=1}^k x_j^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{M}{2 x_{k+1}} \sum_{j=1}^k \sum_{i=j}^k x_j^2 \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{i+1}}\right) \\ &= \frac{M}{2 x_{k+1}} \sum_{j=1}^k x_j^2 \left(\frac{1}{x_j} - \frac{1}{x_{k+1}}\right) \\ &= \frac{M}{2} \sum_{j=1}^k \frac{x_j}{x_{k+1}} \left(1 - \frac{x_j}{x_{k+1}}\right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

となり, 特に $k=n$ とおけば

$$\begin{aligned} |\varepsilon(x)| &= |f(x) - g(x)| \\ &= |\varepsilon_{n+1}| \leq \frac{M}{2} \sum_{j=1}^n x_j (1 - x_j) \end{aligned} \quad (3.17)$$

を得る. $0 \leq x_j \leq 1$ に注意すれば,

$$|f(x) - g(x)| \leq \frac{n}{8} M \quad (3.18)$$

なる評価式を得る.

格子間隔が 1 でなく, 一般に座標軸方向により異なる
値 h_1, \dots, h_n をとるときには, (3.11) の第 3 式の
代わりに

$$l^2 = \sum_{i=1}^k \left(\frac{h_i x_i}{x_k}\right)^2 \quad (3.11')$$

をとればよい. それに従って (3.14) が

$$|\varepsilon_{k+1}| \leq \frac{x_k}{x_{k+1}} \left[|\varepsilon_k| + \frac{M}{2} \left(1 - \frac{x_k}{x_{k+1}}\right) \sum_{i=1}^k \left(\frac{h_i x_i}{x_k}\right)^2 \right], \quad (3.14')$$

(3.16) が

$$|\varepsilon_{k+1}| \leq \frac{M}{2} \sum_{j=1}^k h_j^2 \frac{x_j}{x_{k+1}} \left(1 - \frac{x_j}{x_{k+1}}\right) \quad (3.16')$$

でおきかえられ, 結局

$$|f(x) - g(x)| \leq \frac{M}{8} \sum_{j=1}^n h_j^2 \quad (3.18')$$

という評価式を得る.

(3.18), (3.18') という評価式において等号が成立
する場合もある. 実際,

$$g(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (3.19)$$

のとき, 任意の u, x に対して

$$\frac{1}{|u|^2} \sum_{i,j} u_i u_j \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i \partial x_j} = 1 \quad (\equiv M) \quad (3.20)$$

であり, したがって (3.14), (3.14') と (3.16),
(3.16') は ($|\varepsilon_k|$ の代わりに ε_k を用いて) 等号で成
立する. そこで $x_1 = \dots = x_n = 1/2$ とおけば (3.18),
(3.18') も等号で成立する.

4. 公式の一変形

前節で提案した多次元線型内挿公式は“座標軸番号
の置換”という変換に関しては不変性があるが, “座
標軸の方向の逆転”という変換に関しては必ずしも
不変でない. 条件 (1.4) を除けば, 後者の変換に閑

しても不変であるように公式を変形することもできる。たとえば G_0 の格子点の中間に新しい格子点を配置し、それらの点（座標成分が $1/2$ の整数倍になるような点）の全体を \hat{G}_0 とし、 G_0 の単位立方体をその中心（すなわち座標成分がみな $1/2$ の奇数倍の点）を原点であるかのごとくみなして 2^n 個の hyperquadrants に分け、その一つを新たに単位立方体とみて前節の方法にしたがって単体に分割し、その分割を各座標平面に関する鏡影をとることにより全域に延長する。 $\hat{G}_0 - G_0$ の点 y における g の値を、 G_0 の単位立方体の y を含む側面の中で最低次元のもの頂点における g の値の平均値として定めた後、あらためて \hat{G}_0 を与えられた格子点とみなして (2.8) の内挿式を適用することができる。

このような分割法は、はじめに分割する小単位立方体として、たとえばもとの単位立方体の中心からすべての座標成分につき正方向の hyperquadrant にあるものをえらんだ場合、ちょうど、 G_0 の単位立方体のいわゆる“重心分割”になっていることは注目すべきである。

5. 応用など

多次元内挿公式は、多くのパラメタをもつ対象に関

するある量の有限個の測定値から、測定点以外におけるその量の値を推定するという目的など、多くの自明な応用目的を有している。本論文で提案した方法は最も簡単な線型内挿公式であるが、変数の値の大小判別と、数値の荷重平均という形の演算しか含んでいないから、たとえば相似型計算機用の多変数函数発生器なども、この方式に従って可能になるはずである。

なお、この問題は、ふとした機会に、日本電気株式会社の大附辰夫氏より提出されたものである。

(昭和 42 年 3 月 30 日受付)

〔校正の際追加〕原稿提出後、本論文で論じた内挿公式と同一の方式を MIT の部内報告（下記）で Th. E. Stern が論じているということを、大附氏より御教示頂いた。

Stern の目的は、本論文 §5 で触れた“函数発生器”の設計に関係しており、公式などの記述はやや混乱し、近似度の具体的検討はなされていない。しかし、問題の所在の説明は本論文のそれと共通している。

Th. E. Stern: Piecewise-Linear Network Theory. Technical Report 315, Research Laboratory of Electronics, Massachusetts Institute Technology, Cambridge, Massachusetts, 1956.