ハザードのない最簡論理回路の設計*

福村晃夫**　稲垣康善**　香村　求**

あらまし

論理演算回路の高速，高信頼化を計るために，素子のおくれのばらつきによって起こる過渡誤り出力（ハザード）を取り除くことが要求される．本論文では，McCluskey によって示された P セット，S セットを用いてハザードを解析し，ハザードのない最簡回路を求める手順を covering の問題，整数解（0，1 解）の線形計画問題に帰着できた．さらにハザードのない条件は同族変換に対して不変であることを示すとともに，冗長入力のある3変数および，冗長入力のない4変数の同族類のすべての代表関数に対してハザードのない最簡形を与え，これを表にまとめた．また同時に，同族類の個数，代表関数を求める方法，および代表関数を用いて回路を設計する手順を冗長入力のある場合について拡張した．

1. はしがき

情報処理システムにおいては演算速度と信頼性の向上がつねに要求されるが，この要求をはばむものとして，論理演算素子の動作時間のばらつきによる過渡誤り出力の可能性，すなわち，ハザードの存在がすでに Huffman[1], McCluskey[2] らによって指摘されている．このハザードを抑えるためには，十分長い周期の同期パルスを用いる必要があり，このことが同期回路の演算速度を制限する．また非同期順序回路においては，組み合わせ回路の部分にハザードが存在すると状態推移を誤まる可能性が生ずる．そこで，ここでは最小数の冗長素子を許容したハザードのない論理回路を設計し，十分の信頼性を保ちつつ演算速度を向上することを考える．

本論文では，はじめにハザードの定義，存在条件を述べ，さらにハザードの存在しない最簡な積和2段回路の設計手順を示した．また同族変換によってハザードの存在しない条件がかわらないことを証明し，冗長入力のある場合の3変数，冗長入力のない場合の4変数関数のハザードのない最簡な積和形代表関数を，表にして示した．これに伴って冗長入力のある場合の代表関数の個数と，代表関数の選び方，代表関数を用いた設計のしかたが示される．

2. ハザード

この節では，文献[2]に与えられているハザードの種類，定義，存在条件を以下の記述の便宜のために簡単に述べる．

2.1. ハザード

ハザードは，一口にいえば，入力状態が変化したとき，過渡出力が誤まる可能性である．ふつう論理回路は論理関数であらわすことができるが，これは2値信号（信号の値，すなわち，状態が0または1だけでその途中の状態はない）と，零遅延（すべての素子，接点は同時に動作し遅れはない）の二つの仮定のもとに記述されている．しかし実際の回路では信号は完全な2値ではなく，また動作時間（遅延）も無視できない．ハザードはこれらの事実を考慮したときにはじめて解析できる．ここでは，1入力変化の組み合わせ回路におけるハザードについて考える．

2.2. P(S) セット，1（0）セット

回路の過渡状態を記述するのに接点回路網では，入出力端子間を閉（開）路にする道をすべてかきあげる方法がある．

〔定義1〕 同じリレーで制御される接点に添字 1，2,…をつけて，各々を区別し，添字のついた文字（接点）の集合において，それらに対応する接点が閉じ（開い）ているときはいつも閉（開）路を作り，そのうち，一つでも開く（閉じる）と閉（開）路を作らない添字のついた文字の集合を回路の P(S) セットという．

AND-OR ゲート回路では，同じ入力でもそれらが異なる素子に入るときには添字をつけて区別し，入力の組み合わせで1出力を出すものを P セット，0出力を出すものを S セットとする．したがって，以後ゲー

---

* Minimization of Hazard-Free Switching Circuits, by Teruo Fukumura, Yasuyoshi Inagaki and Motomu Kohmura (Faculty of Engineering, Nagoya University)

** 名古屋大学工学部

ト回路と，接点回路を区別しないで取り扱う．これは，同じリレーで制御される接点の動作のバラツキを考慮することと等価である．

〔定義2〕 P(S) セットの文字の集合から添字を取り除き，同一文字は一つの文字にまとめて作った文字の集合を 1 (0) セットと呼ぶ．

〔定義3〕 1 (0) セットのうち相補文字（同じ文字が一方で肯定，他方で否定となっているもの）をふくまないような文字の集合を安定 1 (0) セット，相補文字を1対だけふくんでいるような文字の集合を不安定 1 (0) セットとよぶ．

2.3. ハザードの種類・定義・存在条件

2.3.1. 静的ハザード

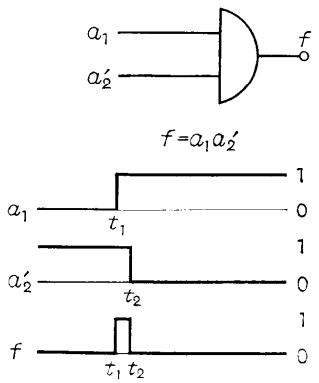
〔定義4〕 入力変化前の出力と，変化後の出力がともに 1 (0) で，その過渡状態において 0 (1) 出力をだすようなハザードを静的 1 (0) ハザードという．

この静的ハザードは，その存在条件によって二つにわけられる．

（1） 不安定セットによる静的ハザード

不安定 1 (0) セットによる静的 0 (1) ハザードは，不安定 1 (0) セット $\{\alpha^*, \beta^*, \cdots\cdots, w, w'\}$† が存在し，これをおおう 1 (0) セット，いいかえれば，$\alpha^*, \cdots\cdots, \beta^*$ の1部分からできた 1 (0) セットが存在しないとき，しかもそのときに限って存在する．

このハザードは，$ww'=0$ が過渡的には，必ずしも成立しない可能性のあることによって起こる．**第1図**にその例を示す．図の回路は，a の変化前も変化後も出力は 0 であるが，$a=0$ から $a=1$ に変化したとき



第1図　不安定セットによる静的0ハザードの例

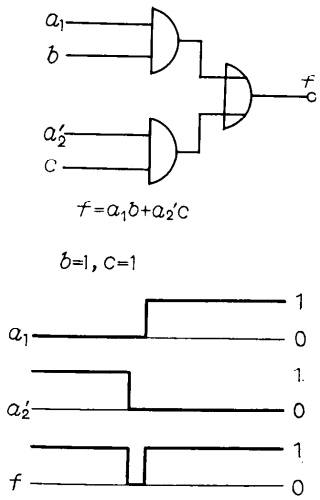
† α^* は α または α' をあらわす，また，α', w' はそれぞれ α, w の否定を示す．

a_1 の応答が時刻 t_1 におこり，a_2 の応答が少し遅れて t_2 に起こったとすると，出力 f は，時刻 t_1 と t_2 の間では誤り出力1を出す．これが不安定セットによる静的0ハザードである．

（2） 二つの安定セット間におこる静的ハザード

このハザードは，二つの安定セット $\{\alpha^*, \cdots\cdots, \beta^*; w\}$ と，$\{\lambda^*, \cdots\cdots, \theta^*; w'\}$ が存在し，この対になった安定 1 セットの両方をおおう 1 (0) セットが存在しないとき，しかもそのときに限って存在する．

このハザードは，$w+w'=1$ が常にはなりたたないことによる†．**第2図**に例を示す．図の回路において，



第2図　二つの安定セットによる静的1ハザードの例

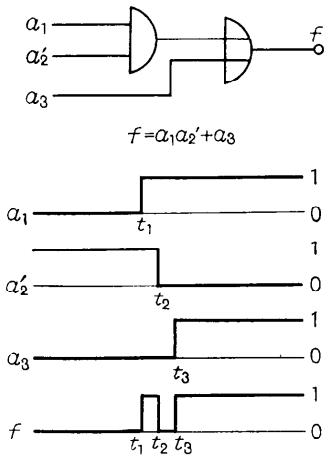
$b=1$, $c=1$ とすれば a に無関係に $f=1$ である．このとき a が0から1に変化すれば，a_2' の応答が t_1 に，a_1 の応答が $t_2(>t_1)$ に起こると t_1, t_2 の間に誤り出力0を出す．これが静的1ハザードである．

2.3.2. 動的ハザード

〔定義5〕 入力変化前の出力が 0 (1) で，変化後の出力が 1 (0) とするとき，過渡出力が，はじめ1 (0)，つづいて 0 (1) が出て，はじめて 1 (0) に安定するようなハザードを動的 1 (0) ハザードという．

動的ハザードは，機構的には静的0ハザードと，静的1ハザードとの組合わせであるといえる．安定0出力から安定1出力にかわるとき不安定1セットによって不安定1出力を出し，ついで不安定0セットによって不安定0出力を出し，さらに安定1セットに移って

† ＋は論理和をあらわす．



第3図 動的ハザードの例

安定1出力を出して安定する．**第3図**にその例を示す．動的ハザードの本質は $a+aa'$ が過渡的には a にならない点にある．第3図の回路において，出力 f は定常的には $a=0$ で0，$a=1$ で1である．いま a が0から1へ変化したとしよう．そのときの変化に各入力 a_1，a_2，a_3 によって異なる遅れがあり，a_1 が時刻 t_1 で0から1へ，a_2' が時刻 $t_2(>t_1)$ で1から0へ，さらに a_3 が時刻 $t_3(>t_2)$ で0から1に変化すると，f の出力は t_1 で1，t_2 で0，t_3 で1となって安定する．

回路を AND-OR の2段回路とした場合には，$a\bar{a}$，$a+a\bar{a}$ などという項は入ってこないので，不安定セットによる静的ハザード，および動的ハザードは存在しないが，安定セット間のハザードは，第3吸収律 $ab+\bar{a}c+bc=ab+\bar{a}c$ を使って論理式を簡約した場合に起こってくる．また多段の論理回路では，不安定セットによる静的ハザード，動的ハザードは起こりうるが，回路が与えられてその回路からハザードを除去することはここでは扱わないで，はじめからハザードのない最簡 AND-OR 2段回路を設計する方法を述べる．

3. ハザードの存在しない最簡組み合わせ回路の設計

この節では，1入力変化の最簡な AND-OR ゲート回路または直並列接点回路を設計する手順を示そう．

3.1. ハザードのない条件

前節で明らかにされたように

（1） 不安定セットが存在しない

（2） 1出力をだす隣接入力状態があればそれらをおおう1セットが存在する

という条件（1）（2）が静的ハザードも，動的ハザードも存在しない条件である．

3.2. 条件（2）を満す1セットおよびそれらを覆う主項を求める手順

以下，出力1を出す入力状態と冗長入力が最小項表示で与えられたとき，ハザードのない最簡な2段 AND-OR 回路を設計することを問題にする．回路合成では，出力1を出す最小項を1セットとすれば，それらはすべて安定セットであるから，**3.1.** の条件（1）は考慮せず，条件（2）を満す1セットを作り，つづいて，それらをおおう主項を導くことだけを考える．以下に，これらのことを計算機で行なうのに便利な系統的な方法を示そう．

一般に n 変数論理関数を積和形式であらわせば

$$f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)=\sum_e f(e)x_1^{e_1}x_2^{e_2}\cdots x_n^{e_n}, \qquad (1)$$

ただし，$e_i\in\{0, 1, 2\}$ とし，$x_i^{e_i}$ をつぎのように約束する．

$$x_i^{e_i}=\begin{cases} e_i=0 \text{ のとき } x_i' \text{（否定）} \\ e_i=1 \text{ のとき } x_i \\ e_i=2 \text{ のとき } 1 \end{cases}$$

また，$f(e)$ はベクトル $e=(e_1, e_2, \cdots\cdots, e_n)$ の関数で，論理積 $x_1^{e_1}x_2^{e_2}\cdots x_n^{e_n}$ が，積和形式に展開された式の中に含まれていれば1，そうでなければ0である．このようにベクトル e は一つの論理積を定めるが，幾何学的には n 次元超立方体の頂点，辺，面，立方体などをきめる．そこで，e を cube とよぶことにする．

〔定義6〕 cube e の，$e_i=2$ である座標の個数をその次元数という．また，次元数 k の cube を k-cube という．

〔定義7〕 二つの cube $a=(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)$，$b=(b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n)$，$a_i, b_i\in\{0, 1, 2\}$ にたいして，$a\circ b$ をつぎのように定義する．

$$a\circ b=(a_1\circ b_1, \cdots\cdots, a_n\circ b_n) \qquad (2)$$

ただし，$a_i\circ b_i$ は**第1表**で定義されている．

第1表 $\circ$ 演算

b_i \ a_i	0	1	2
0	0	y	y
1	y	1	y
2	y	y	2

〔定義8〕 二つの cube a, b にたいして定義される $a \circ b$ に含まれる y の個数を $\#_y(a \circ b)$ とし，もし $\#_y(a \circ b) = 1$ であればこの y を 2 にかきかえて得られるベクトルを cube $a*b$ と定義する．

$\#_y(a \circ b) \geq 2$ のときには，cube $a*b$ は存在しない．

〔定義9〕 二つの cube a, b において，$a_i = b_i$，あるいは，$a_i \neq b_i$ かつ $a_i = 2$ の関係のいずれかがすべての i について成り立てば，a は b を包含するという．

上の定義から，cube $a*b$ は，cube a, b を包含する次元数が1だけ高い cube であることが知られる．したがって，つぎの手順 A, B によって，求めるすべての1セットおよび主項が得られる．

手順A　条件（2）を満たす1セットを作る手順

（1） 与えられた出力1をだす入力状態の最小項表示を，（1）式で用いたベクトルで表わす．これは 0-cube である．

（2） 各 0-cube の間に＊演算をおこない 1-cube を作る．この 1-cube が隣接した入力状態をおおう1セットである．

（3） 0-cube のうちどの 1-cube にも包含されない 0 cube と，（2）でできた 1-cube をかきだす．

手順B　主項を作る手順

（1） 与えられた出力1をだす入力状態と，冗長の入力状態をあわせた最小項を，（1）式で用いたベクトルであらわす．

（2） 各 k-cube の間で＊演算をおこない，$(k+1)$-cube を作る．ただし，$k=0$ からはじめる．

（3） $(k+1)$-cube の個数が 0 でなければ，この $(k+1)$-cube を用いて（2）の操作をおこなう．0ならば次へ進む．

（4） 作られた各 k-cube のうち，どの $(k+1)$-cube にも包含されていない cube をとり出す．

この主項を作る手順は，McCluskey の方法[3] と，0, 1, 2 の記法，および包含関係を定めた点を除いて本質的にかわるところはないが，計算機プログラムにはかなり便利になっている．

3.3. ハザードのない最簡回路の設計手順

ハザードのない最簡回路を求めることは，**3.2.** の手順Aで得られた 0-cube と，1-cube を包含する最小個数，または最小文字数の主項の組を，手順Bで得られた主項の中から選ぶという最小被覆の問題に帰着される．さらにこの最小被覆の問題は，つぎのように 0, 1 解をもつ線形計画問題として定式化される．

（1） 線形計画法による定式化

手順Aで求められた 0-cube と，1-cube を $c_1, \cdots\cdots, c_m$ とし，手順Bで得られた主項をあらわす cube を $r_1, \cdots\cdots, r_n$ とする．このとき，$a_{ij}(i=1, \cdots\cdots, n, j=1, \cdots\cdots, m)$ を r_i が c_j を包含するとき 1，そうでないとき 0 である定数とし，$z_j(j=1, \cdots\cdots, m)$ を r_j が求める主項のくみにとりいれられるとき 1，そうでないとき0となる変数とすれば，問題はつぎのように定式化される．すなわち

手順C

制約条件式

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \geq 1 \quad (i=1, \cdots\cdots, m) \qquad (3)$$

のもとで，目的関数

（1） $y = 1 + \sum_{j=1}^{n} z_j$，(AND, OR ゲートの総数)　(4)

（2） $y = \sum_{j=1}^{n} w_j z_j + \sum_{j=1}^{n} z_j$，(ダイオードの総数)　(5)

を最小にする z_j（0 または 1，$j=1, \cdots\cdots, n$）を求める．

ただし，$w_j = N - d_j$ であって，d_j は cube r_j の次元数，Nは入力変数の個数とする．

目的関数（4）式の第 1 項は，最終段の OR 素子の数，第2項は AND 素子の数，また目的関数（5）式の第1項は AND 論理演算を行なうのに必要なダイオードの数で，w_j は一つの AND 回路に入る入力線（ダイオード）の数，第 2 項は OR 論理演算に用いられるダイオードの総数である．

このようにして手順 A, B, C を用いれば，目的関数（4）式，または，（5）式が最小という意味で最簡なハザードのない回路を求めることができる．

（2） 制約条件式と変数の削減

整数解の L.P. についてはいろいろと研究されていて，たとえば Gomory,[4] Balas[5] の方法を用いて解くことができるが，変数の数，制約条件式の数は少ない方が解くにも容易である．そこで，前節で定式化した線形計画問題の制約条件式と変数の削減がのぞまれる．そのために，つぎの三つの性質を用いることができる．

性質（1） $a_{ij_1} = 1, a_{ij} = 0 \ (j \neq j_1)$ ならば，$z_{j_1} = 1$．したがって $a_{kj_1} = 1$ である条件式は考慮する必要はない．これは i 番目の条件式が

$$z_{j_1} \geq 1 \qquad (6)$$

したがって $z_{j_1} = 1$ であることによって，z_{j_1} をふく

むすべての条件式が満たされることから明らかである．

性質（2） 第 i_1, i_2 番目の条件式に対して $a_{i_1 j}=1$ のときつねに $a_{i_2 j}=1$ ならば，i_2 番目の条件式は考慮しなくてもよい．これは，i_1 番目の制約条件式が満たされていれば必らず i_2 番目の式が満たされていることを示しており，明らかである．

性質（3） z_{j_1} と z_{j_2} の係数について $a_{ij_1}=1$ のときつねに $a_{ij_2}=1$ ならば，$z_{j_1}=0$ である．

このような場合の制約条件式をかくと

$$z_{j_1}+z_{j_2}+\sum_{j\neq j_1, j_2} a_{ij}z_j \geqq 1 \qquad (7)$$

$$z_{j_2}+\sum_{j\neq j_1, j_2} a_{ij}z_j \geqq 1 \qquad (8)$$

$$\sum_{j\neq j_1, j_2} a_{ij}z_j \geqq 1 \qquad (9)$$

の三つの型に分けられる．j_1, j_2 をふくまない $\sum_{j\neq j_1, j_2}$ の項だけで（7）～（9）式が満たされていれば $z_{j_1}=z_{j_2}=0$．（9）式はなりたつが（7），（8）式が $\sum$ の部分では満たされていないとき，（8）式を満たすためには $z_{j_2}=1$ としなければならない．そうすれば（7）式はなりたっているから $z_{j_1}=0$.

これらの性質は，それぞれ a_{ij} を要素とする $m\times n$ 行列において，1をレ印にし，0をとり除いて得られる主項表における（1）必須項，（2）column dominance，（3）row dominance と対応している．

なお，主項表を簡約して，もうこれ以上簡約できなくなった cyclic table に対して従来考えられてきたいろいろな方法，たとえば，Quine[6] による試行錯誤法，McCluskey[3] による改良した試行錯誤法，Roth[7] による topological な解法，Gimpel[8]，McCluskey[8] らによる Boolean Representation の方法などは，本質的にはすべて試行錯誤（または，しらみつぶし）法で，系統的に解を求めることが困難である．しかし，上に明らかにしたように L.P. を用いれば，目的関数最小の意味での最簡なハザードのない論理回路を求めることができる．

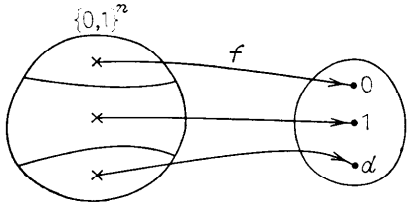
4. 同族変換と同族類の個数

この節では，ハザードのない最簡論理回路を関数の同族類ごとに設計する準備として，ハザードが存在しないように設計された回路（論理関数）に同族変換を施してもやはりハザードが存在しないことをまず示し，ついで冗長入力のある場合もふくめた同族類の個数を求め，さらにその代表関数を決める方法について述べる．

4.1. 同族変換とハザード

n 変数論理関数 $f(x_1, \cdots\cdots, x_n)$ にたいする三つの変換（1）変数の否定，（2）変数の置換，（3）関数の否定を同族変換という．同族変換を有限回施すことによってたがいに移ることのできる関数の間の関係を R とすれば，この関係 R は論理関数の集合の上の同値関係であり，Rによって論理関数全体を同値類にわけることができる．同じ同値類にふくまれる論理関数は同族関数といわれる．

冗長入力（組み合わせ禁止）のある n 変数論理関数は，**第4図**のように n 次直積空間 $\{0,1\}^n$ から，$\{0, 1, d\}$ の空間への多対1写像である．このことは，n 次元超立方体の 2^n 個の各頂点に 0, 1, d の値をわりあてることと同じ意味である．



第4図 冗長入力のある理論関数 f の対応関係

n 次元超立方体の上で同族変換を考えてみると，変数の否定，置換によって頂点間のハミングの距離は不変であることから，0, 1, d をわりあてられた図形（n 次元超立方体の一部分）が合同であれば同族である．また関数の否定にたいしては，0をわりあてられた頂点に1を，1をわりあてられた頂点に0をわりあて，d はそのままとしたときに合同になれば同族である．

この同族変換とハザードについてつぎの定理が成立する．

〔定理1〕 ハザードが存在しないように設計された回路（論理関数）に同族変換を施してもやはりハザードは存在しない（証明略）．

同族変換は，変数の名前のつけかたの変換，および0と1の変換の組み合わせにほかならず，変数の置換によっては，1 (0) セットの要素の名前が変わり，変数の否定によっては，1 (0) セットの対応する要素が否定されるだけであり，また，関数の否定によっては，1 (0) セットの要素が否定された形で 0 (1) セットの要素になる．したがって，変数の置換，否定については明らかに，また関数の否定については1セットと

0セットが双対な関係にあることに注意すればただちに，同族変換によってハザードが新しく生じないことが知られる．

定理1を考慮すれば，同族類の代表関数のハザードのない最簡形が知られれば，それに同族変換を施すことによってそれと同族な任意の関数のハザードのない最簡形が求められる．したがって，一般に 2^{2^n} 個の n 変数論理関数のすべてでなく，各同族類の代表関数のハザードのない最簡形を求めておけば，同族変換を行なうことによって任意のハザードのない最簡形が得られる．

4.2. 冗長入力のある場合の同族類の個数

同値関係 R によって類別される類の個数を知ることは，実際に代表関数を求めるうえで興味深い問題である．冗長入力のない場合にたいしては，群論を用いてすでに種々の結果[10]が得られている．ここではとくに冗長入力のある場合にたいする考察が冗長入力のない場合とほとんど同じ議論ですすめられるが，以下に明らかにされるように，冗長入力のない場合にたいする結果は，冗長入力のある場合の特別の場合であることが知られる．

変数の否定，置換による同族変換に対して，つぎの定理が成立する[10]．

〔定理2〕 サイクルインデックス多項式 Z_{G_n} は次式であらわされる．

$$Z_{G_n}=Z_{C_2^n\otimes S_n}=\frac{1}{n!2^n}\sum_{(j)}\frac{n!2^n}{\prod_{j=1}^{n} j_i!(2i)^{j_i}}\times_{i=1}^{n}\Big(\prod_{m\mid i} f_m^{e(m)}+\prod_{\substack{m\mid 2i\\ m\nmid i}} f_m^{g(m)}\Big)^{\times j_i} \tag{10}$$

$\sum_{(j)}$ は n の分割すべてに対してとり，$e(k)$, $g(2k)$ は

$$e(k)=\frac{1}{k}\sum_{m\mid k}2^m\mu\Big(\frac{k}{m}\Big) \tag{11}$$

$$g(2k)=\frac{1}{2k}\sum_{\substack{m\mid 2k\\ m\nmid k}}2^{\frac{m}{2}}\mu\Big(\frac{2k}{m}\Big) \tag{12}$$

ただし，$\mu(a)$ は Möbius 関数†．ここで×演算は

$$f_p^{i_p}\times f_q^{i_q}=f_{<p.q>}^{i_p.i_q(p,q)} \tag{13}$$

ただし，(p, q) は G. C. M.，$<p, q>$ は L.C.M. また

$$f_m^{\times j_i}=\overbrace{f_m\times f_m\times\cdots\cdots\times f_m}^{j_i} \tag{14}$$

ここで，C_2^n は n 変数の否定の群で，要素を 0，1，単位元を 0，とし，演算 ⊕（環和，mod 2 の加法）が定義される群 C_2 の n 次直積としてあらわされる．この変数の否定による変換　$i\in C_2^n$ は，n 変数論理関数を $f(x_1, \cdots\cdots, x_n)$ とすると

$$i\cdot f(x_1, \cdots\cdots, x_n)=(i_1, \cdots\cdots, i_n)\cdot f(x_1, \cdots\cdots, x_n)=f(x_1^{i_1}, \cdots\cdots, x_n^{i_n}) \tag{15}$$

ここで

$$x_j^{i_j}=\begin{cases}x_j & i_j=0 \text{ のとき}\\ x_{j'} & i_j=1 \text{ のとき}\end{cases}$$

また，S_n は n 変数の置換の群で n 次の対称群，f_i は多項式の不定元である．ポリアの定理[11]によれば，f_i に $\Psi(x_1^i, \cdots\cdots, x_r^i)$ を代入すれば，代表関数の個数をかぞえる級数（母関数）が得られる．ここで，$\Psi(x_1, \cdots\cdots, x_r)$ は figure counting 級数で，

$$\Psi(x_1, \cdots\cdots, x_r)=\sum_{i=1}^{r}\varphi_i x_i \tag{16}$$

とあらわされ，φ_i は，値域 R を r 個の互いに素な部分集合にわけたときの R_i の要素の数である．

冗長入力のある論理関数の場合には，値域 R を三つの部分集合 R_0, R_1, R_d とすると，それぞれの要素の数は1であるから，$\Psi(x_0, x_1, x_d)=x_0+x_1+x_d$，これを (10) 式に代入すると，$x_0^{n-k-l}x_1^k x_d^l$ の係数が，1に写像される頂点が k 個で，d に写像される頂点が l 個である関数の類の個数をあらわす母関数が得られる．また類の総数は，(10) 式で $f_i=3$（冗長のない場合は2）とおけば得られる．

3変数関数について計算した結果を (17) 式，(18) 式に示す．そのサイクルインデックス多項式は

$$Z_{G_3}=\frac{1}{48}(f_1^8+6f_1^4f_2^2+8f_1^2f_3^2+12f_4^2+13f_2^4+8f_2f_6) \tag{17}$$

代表関数の個数をかぞえる母関数は

$$\begin{aligned}Z_{G_3}=&x_1^8+x_1^7x_d+3x_1^6x_d^2+3x_1^5x_d^3+6x_1^4x_d^4\\&+3x_1^3x_d^5+3x_1^2x_d^6+x_1x_d^7+x_d^8+x_0x_1^7\\&+3x_0x_1^6x_d+6x_0x_1^5x_d^2+10x_0x_1^4x_d^3\\&+10x_0x_1^3x_d+6x_0x_1^2x_d^5+3x_0x_1x_d^6\\&+x_0x_d^7+3x_0x_1^6+6x_0^2x_1^5x_d+16x_0^2x_1^4x_d^2\\&+17x_0^2x_1^3x_d^3+16x_0^2x_1^2x_d^4+6x_0^2x_1x_d^5\\&+3x_0^2x_d^6+3x_0^3x_1^5+10x_0^3x_1^4x_d+3x_0^3x_d^5\\&+6x_0^4x_1^4+10x_0^4x_1^3x_d+16x_0^4x_1^2x_d^2\\&+10x_0^4x_1x_d^3+6x_0^4x_d^4+3x_0^6x_1^2\\&+3x_0^6x_1x_d+3x_0^6x_d^2+x_0^7x_1+x_0^7x_d+x_0^8\end{aligned} \tag{18}$$

† Möbius 関数 $\mu(a)=\begin{cases}0 & a\text{が1と異なる平方数でわり切れるとき}\\ (-1)^k & a\text{が1と異なる平方数でわり切れないとき，ただし}k\text{は}a\text{の素な約数の個数}\end{cases}$

第2表 同族変換による類の個数

	冗長入力のない場合			冗長入力のある場合		
n	総 数	変数の否定・置換	関数の否定もいれる	総 数	変数の否定・置換	関数の否定もいれる
2	16	6	4	81	21	13
3	256	22	14	6,561	267	155
4	65,536	402	238	43,046,721	132,102	6万程度
5	4,294,967,296	1,228,158	60万程度	—	—	—

(注) 冗長入力のない場合の資料は文献 (10) を引用した

関数の否定も考慮した場合の類の数は，次の定理によって求められる．

〔定理3〕 関数の否定を考えないときの類の数を N, 1 に写像される頂点の数と，0 に写像される頂点の数の等しい類の数を M とすると，関数の否定を考えたときの類の総数は

$$\frac{M+N}{2} \tag{19}$$

この場合，代表関数として，0に写像される頂点の数が1に写像される頂点の数より多いものをとるとする．

冗長入力のある場合，およびない場合の類の個数を，変数の数が 2～5 の場合について**第2表**に示す．

4.3. 冗長入力のある場合の Invariant と代表関数のきめ方

同族類の個数は，**4.2.** で求められたが，ここでは同族類であることを表わす量 (invariant) を定め，それから類の代表関数を定める方法について述べる．

関数 f の重み $w_1(f)$, $w_d(f)$ を，それぞれ，1 に写像される頂点の数，および，1に写像される頂点の数と d に写像される頂点の数の和とし，関数 f と n 個の変数とを辞書的順序で環和して得られる関数の重みの系列

$$\{w_d(f),\ w_d(f\oplus x_1),\ \cdots\cdots,\ w_d(f\oplus x_n),\ w_d(f\oplus x_1\oplus x_2),\cdots\cdots,w_d(f\oplus x_{n-1}\oplus x_n),\cdots\cdots,\ w_d(f\oplus x_1\oplus\cdots\cdots\oplus x_n),\ w_1(f),\ w_1(f\oplus x_1),\cdots\cdots,\ w_1(f\oplus x_1\oplus x_2),\ \cdots\cdots,\ w_1(f\oplus x_1\oplus\cdots\cdots\oplus x_n)\} \tag{20}$$

を計算し，この系列を，10 進数としてみたとき最小になる系列（最小系列という）にするように，次の手順で変換する．

〔最小系列を求める手順〕

（1） $w_1(f)+w_d(f)>2^n$ のときは 0 に写像された頂点を1に，1に写像された頂点を0に，d はそのままにして重みを計算し直す．この操作は関数を否定することに対応している．

（2） $w_d(f\oplus x_i)>2^{n-1}$ ならば x_i の関係している重みをすべて 2^n-w におきかえる．また $w_d(f\oplus x_i)=2^{n-1}$ のときは，x_i の関係している重みを 2^n-w にかえてみて，この系列を 10 進数としてみたとき小さくなればこの変換を行なう．これは変数の否定に対応している．

（3） $w_d(f\oplus x_i)$ と $w_d(f\oplus x_j)$ を変換して（ただし x_i, x_j をふくむすべての重みについて）系列が小さくなれば交換する．これは変数の置換に対応している．

（4） w_d について最小系列が得られたら，これを動かさない範囲で w_1 に（2），（3）の変換を行ない最小系列を得る．

この得られた最小系列を関数 f の invariant と呼ぶ．関数 f の重みの系列がすでに最小系列のとき，関数 f を正規形という．正規形の関数を代表関数にえらぶ．

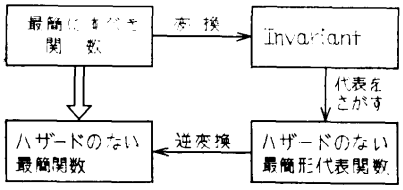
5. 代表関数と Invariant を用いたハザードのない最簡論理回路の設計

5.1. 設計手順

ハザードのない最簡形にした n 変数関数の代表関数と，その invariant の表が与えられているとする．任意の n 変数関数のハザードのない最簡回路を得るには次の手順による．

（1） 与えられた関数の重みの系列を計算する．

（2） **4.2.** で述べた変換をして invariant を得る．この場合用いた変換を順に記述しておく．



第5図 代表関数と Invariant を用いた設計手順

（3） この invariant と等しい invariant をもった代表関数をみつけ，そのハザードのない最簡形に（2）で記述した変換の逆変換をする．（1），（2），（3）の手順で任意の関数のハザードのない最簡形が得られる．

この手順を図式的に示すと，**第5図**のようになる．

第3表　冗長入力のある3変数代表関数の Invariant とハザードのない最簡形

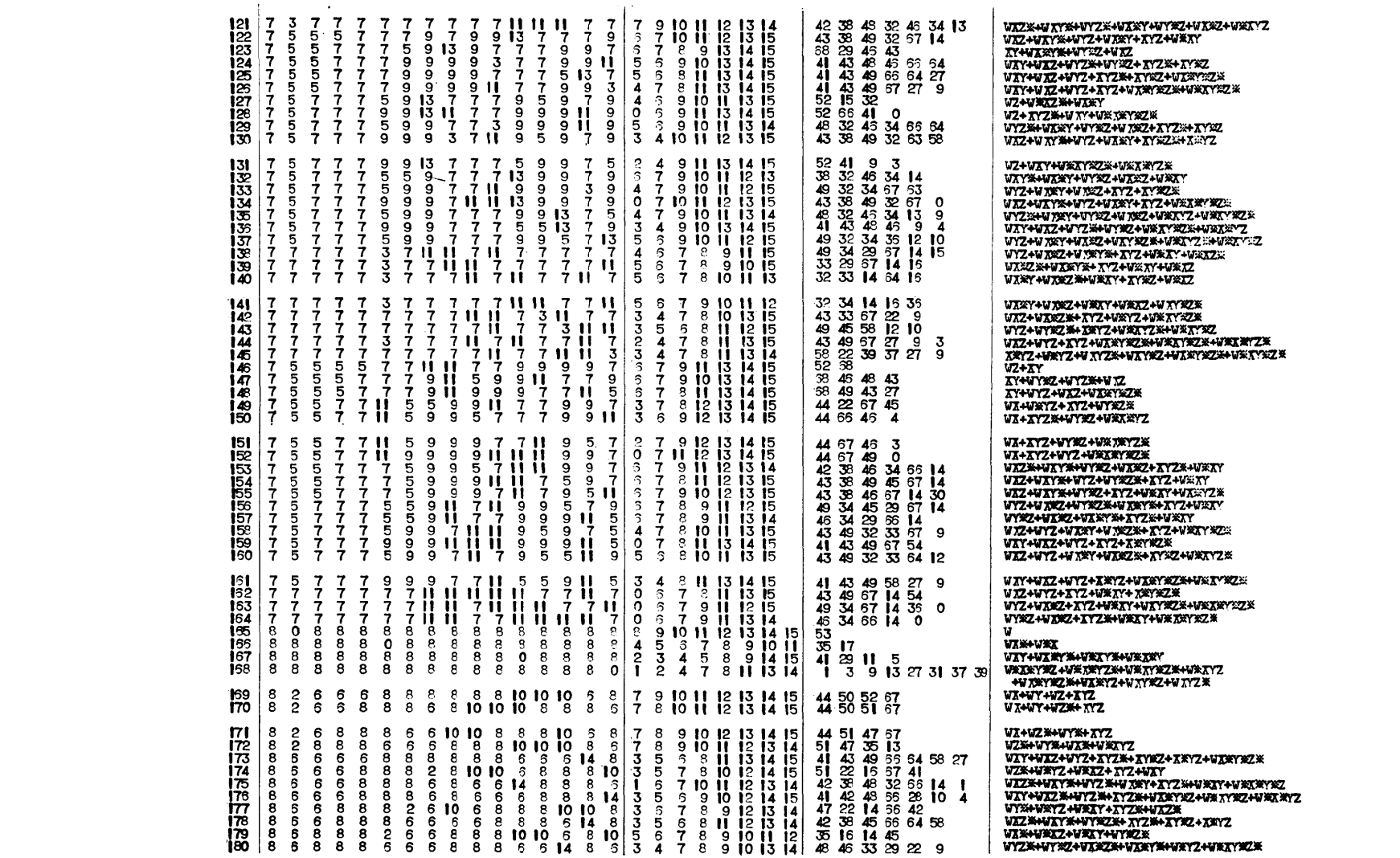
No.	Invariant		1-頂点	d-頂点	関数
1	04444444	04444444	–	–	0
2	13335553	04444444	–	7	0
3	22246444	04444444	–	67	0
4	22444426	04444444	–	56	0
5	24442264	04444444	–	34	0
6	31335535	04444444	–	567	0
7	33333373	04444444	–	347	0
8	33333337	04444444	–	357	0
9	40444444	04444444	–	4567	0
10	44440444	04444444	–	2345	0
11	44444440	04444444	–	1247	0
12	42224446	04444444	–	3567	0
13	42244264	04444444	–	3457	0
14	42442246	04444444	–	3456	0
15	53335557	04444444	–	03567	0
16	53331553	04444444	–	23457	0
17	51333355	04444444	–	34567	0
18	64442224	04444444	–	123456	0
19	62442442	04444444	–	124567	0
20	62242444	04444444	–	234567	0
21	73333335	04444444	–	1234567	0
22	84444444	04444444	–	01234567	0
23	13335553	13335553	7	–	XYZ
24	22246444	13335553	7	6	XY
25	22444426	13335335	6	5	XYZ※
26	24442264	13353353	4	3	X※Z※
27	31335535	13353335	6	57	XY
28	31335535	13335553	7	56	XY,XZ
29	33333373	13335553	7	34	YZ
30	33333373	13553353	4	37	X※Z※
31	33333373	15333355	3	47	YZ
32	33333337	13353335	6	35	XYZ※
33	40444444	13335553	7	456	X
34	44440444	13533535	5	234	X※
35	44444440	13335553	7	124	XYZ
36	42224446	13353335	6	357	XY
37	42224446	13335553	7	356	XY,YZ,XZ
38	42244264	13335553	7	346	XY,YZ
39	42244264	13553353	4	367	XZ※
40	42442244	13353335	6	345	XZ※
41	42442244	15333355	3	456	X※Z
42	42442244	13553353	4	356	X※
43	53335557	13335553	7	0356	XY,YZ,XZ
44	53335557	13353335	6	0357	XY
45	53335557	15555555	0	3567	X※Y※Z※
46	53331553	13335553	7	2345	YZ,XZ
47	53331553	13533535	5	2347	XY※,XZ
48	53331553	13553353	4	2367	X※
49	51333355	13335553	7	3456	Y
50	51333355	13353335	6	3457	X
51	51333355	13553353	4	3567	X
52	51333355	15333355	3	4567	YZ
53	64442224	13353335	6	12345	YZ※,XZ※
54	62444422	13335553	7	12456	X,Y
55	62444422	13353335	6	12457	X
56	62444422	15353533	2	14567	YZ※
57	62244444	13335553	7	23456	X,Y
58	62244444	13553353	5	23457	X
59	73333333	13335553	7	123456	X,Y,Z
60	73333333	13353335	6	123457	X,Y
61	73333333	13533355	4	123567	X
62	22246444	22245444	67	–	XY
63	22444426	22444426	56	–	XYZ※+XY※Z
64	24442264	24442264	34	–	XY
65	31335535	22246444	67	5	XY
66	31335535	22444426	56	7	XY+XZ
67	33333373	24442264	34	7	YZ+XY※Z※
68	33333373	24224464	37	4	YZ
69	33333373	22444462	47	3	YZ+XY※Z※
70	33333337	22444426	56	3	X※Z+XYZ※
71	40444444	22245444	67	45	X
72	40444444	22444426	56	47	X
73	44440444	25242444	23	45	X※Y
74	44440444	24442264	34	25	X※Y+XY※
75	44440444	24422446	35	24	X※Y+XY※
76	44444440	22444422	47	12	XYZ+XY※Z※
77	42224446	22245444	67	35	XY
78	42224446	22444426	56	37	XY+XZ
79	42244264	22422444	37	46	YZ
80	42244264	24442264	34	67	YZ+XZ※
81	42244264	22246444	67	34	XY
82	42244264	22444462	47	36	YZ+XZ※,XY+XZ※
83	42442246	24244246	36	45	X※YZ+XZ※
84	42442246	24442264	34	56	X※YZ+XZ※,X※YZ+XY※
85	42442245	22454244	46	35	XZ※
86	42442246	22444426	56	34	XY※+XZ※
87	51333355	22444426	56	347	Y
88	51333355	24244246	36	457	X+YZ
89	51333355	24224464	37	456	YZ
90	51333355	22246444	67	345	X
91	51333355	22444462	47	356	X
92	51333355	22464244	46	357	Y
93	51333355	24442264	34	567	X+YZ
94	53331553	22424644	57	234	YZ
95	53331553	22444462	47	235	XZ+XY※,XY※+YZ
96	53331553	24422446	35	247	X※Y+XY※,X※Y+XZ,YZ+XZ,XY※+YZ
97	53331553	24442264	34	257	X※Y+XY※,XZ+XY※
98	53331553	22642444	45	237	YZ※
99	53331553	24462442	24	357	X※Y+XY※
100	53335557	24465446	06	357	X※YZ※+XY
101	53335557	22444426	56	037	XY+XZ
102	53335557	24446654	07	356	X※YZ※+YZ,X※YZ※+XY,X※YZ※+XZ
103	53335557	22245444	67	035	XY
104	64442224	22444426	56	1234	XZ※+XY※,YZ※+XY※
105	64442224	22464244	46	1235	XZ※
106	64442224	24442264	34	1256	X※Y+XY※,X※Y+XZ※,X※Z+XZ※,X※Z+XY※
107	62444422	26444422	12	4567	YZ※+Y※Z
108	62444422	24246442	27	1456	YZ※+X
109	62444422	24264424	26	1457	YZ※
110	62444422	24442624	25	1437	YZ※+X
111	62444422	22245444	67	1245	X
112	62444422	22444426	56	1247	X
113	62444422	22444462	47	1256	Y
114	62242444	22642444	45	2367	Y
115	62242444	24422446	35	2467	X+Y
116	62242444	24442264	34	2567	X+Y
117	62242444	22424644	57	2345	Y
118	62242444	22444426	56	2347	Y
119	62242444	22245444	67	2345	X
120	31335535	31335535	567	–	XY+XZ
121	33333373	33333373	347	–	X※Z※+YZ
122	33333337	33333337	357	–	X※YZ+XYZ※+XY※Z
123	40444444	31335535	5067	4	X
124	44440444	33551533	2467	3	X※Y+XY※
125	44444440	33353551	2467	1	X※YZ※+XY※Z※+X※Z
126	42224446	31335535	5367	3	XY+XZ
127	42224446	33333337	3567	7	YZ+XY+XZ
128	42244264	33333373	3467	6	YZ+XZ※
129	42244264	31355353	4667	3	XY+XZ※
130	42442246	33353155	3467	5	X※YZ+XZ※
131	42442246	31553335	4567	3	XY※+XZ※
132	42442246	33333337	3567	4	X※YZ+XZ※+XY※
133	51333355	33333373	3467	5	Y+XY
134	51333355	31355353	3567	45	X+YZ
135	51333355	31553335	4567	37	Y
136	51333355	33353155	3457	57	X+YZ
137	51333355	33333337	3567	47	X+YZ
138	51333355	33135355	3567	45	X+YZ
139	51333355	31335535	5677	34	X
140	53331553	33551533	2457	37	X※Y+XY※
141	53331553	33531355	3457	27	Y※Y+XY※,XY※+YZ
142	53331553	33353551	2467	35	X※Y+XY※+YZ,X※Y+XY※+XZ
143	53331553	33333373	3467	25	YZ+Y※Z
144	53331553	31533553	4567	23	XY※+XZ
145	53331553	33313555	3567	24	YZ+XZ
146	53335557	31335535	5677	03	XY+XZ
147	53335557	33357555	0677	35	XY+X※Y※Z※
148	53335557	33333337	3567	07	YZ+XY+XZ
149	53335557	33555537	0567	37	X※Y※Z※+XY+XZ
150	40444444	40444444	4567	–	X
151	44440444	44440444	2345	–	XY※+X※Y
152	44444440	44444440	1247	–	X※YZ+X※YZ※+XY※Z※+XYZ
153	42224446	42224446	3567	–	XY+YZ+XZ
154	42244264	42244264	3467	–	XY+YZ+XZ※
155	42442246	42442246	3456	–	X※YZ+XZ※+XY※

（注） 1. 1 頂点，d-頂点は 2 進表示を 10 進化した数で示してある．
2. 関数 W※ は W の否定を，XYZ は X,Y,Z の論理積，＋は論理和を表わす．

第4表　冗長入力のない4変数代表関数の Invariant と，ハザードのない最簡形

No.	Invariant	1-頂点	関数の10進表示	関数
1	0 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	NULL	-	0
2	1 7 7 7 7 9 9 9 9 9 9 7 7 7 7 9	15	40	WXYZ
3	2 6 6 6 8 10 10 8 10 8 8 5 8 8 8 8	14 15	41	WXY
4	2 6 6 8 8 10 8 8 8 8 6 8 8 10 10 6	13 14	37 39	WXY※Z+WXYZ※
5	2 6 8 8 8 8 8 8 6 5 10 10 10 6 8 8	11 12	31 33	WX※YZ+WXY※Z※
6	2 8 8 8 8 6 6 9 10 10 10 7 8 8 8 6	7 8	13 27	WX※YZ+WX※Y※Z※
7	3 5 5 7 7 11 9 9 9 7 7 7 9 9 9 7	13 14 15	41 43	WXY+WXZ
8	3 5 7 7 7 9 9 9 7 7 11 9 9 5 7 9	11 12 15	49 33	WYZ+WXY※Z※
9	3 5 7 7 7 9 9 7 7 7 9 9 9 11 5	11 13 14	31 37 39	WX※YZ+WXY※Z+WXYZ※
10	3 7 7 7 7 7 7 11 11 11 7 7 7 7 7	7 8 15	37 27	XYZ+WX※Y※Z※
11	3 7 7 7 7 7 7 11 11 7 7 7 7 7 7 11	5 9 15	12 28 40	W※XYZ※+WX※Y※Z+WXYZ
12	3 7 7 7 7 7 7 8 7 8 11 11 11 7 7 7	7 11 12	13 31 33	W※XYZ+WX※YZ+WXY※Z※
13	4 4 4 8 8 12 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	12 13 14 15	44	WX
14	4 4 8 8 8 8 8 8 8 4 8 8 12 8 8 8	10 11 12 13	33 32	WXY※+WX※Y
15	4 4 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 12	9 10 12 15	28 30 33 40	WX※Y※Z+WX※YZ※+WXY※Z※+WXYZ
16	4 8 8 8 8 4 4 8 8 12 8 8 8 8 8 8	6 7 8 9	29 14	WX※Y※+W※XY
17	4 8 8 8 8 4 8 8 8 8 8 4 8 8 8 8	5 6 9 10	10 12 28 30	W※XY※Z+W※XYZ※+WX※Y※Z+WXY※Z※
18	4 8 8 8 8 4 8 8 8 8 8 8 8 8 4 12	5 6 8 11	10 12 27 31	W※XY※Z+W※XYZ※+WX※Y※Z※+WX※YZ
19	4 4 6 6 6 10 10 10 8 8 8 8 8 8 10 6	11 13 14 15	41 43 49	WXY+WXZ+WYZ
20	4 4 6 6 8 10 10 8 8 6 10 8 10 6 8 8	11 12 14 15	41 42 49	WXY+WXZ※+WYZ
21	4 4 6 8 8 10 8 8 6 6 8 10 10 8 10 6	11 12 13 14	42 32 31	WXZ※+WXY※+WX※YZ
22	4 6 6 6 6 8 8 8 8 8 8 12 10 10 6 6 8	7 11 12 15	49 37 36	WYZ+XYZ+WXY※Z※
23	4 6 6 6 6 8 8 8 8 8 8 10 10 10 10 4	7 11 13 14	13 31 37 39	W※XYZ+WX※YZ+WXY※Z+WXYZ※
24	4 6 6 6 8 8 8 8 6 12 10 10 6 8 8 8 6	7 8 14 15	41 37 27	WXY+XYZ+WX※Y※Z※
25	4 5 6 6 8 8 8 8 6 8 6 10 10 12 8 8 6	7 11 12 14	42 31 13	WXZ※+WX※YZ+W※XYZ
26	4 5 5 8 8 12 6 6 6 6 8 8 8 10 10 8	3 12 13 14	42 33 4	WXZ※+WXY※+W※Y※YZ
27	4 6 6 8 8 8 8 6 6 10 10 12 8 8 8 6 6 8	7 8 12 15	45 37	WY※Z※+XYZ
28	4 6 6 8 8 8 8 6 6 6 10 10 8 12 8 10 6 8	7 10 12 13	38 30 13	WXY※+WX※YZ※+W※XYZ
29	4 6 6 8 8 8 8 6 6 6 10 10 8 8 8 10 10 4	7 8 13 14	13 27 37 39	W※XYZ+WX※Y※Z※+WXY※Z+WXYZ※
30	4 6 8 8 8 6 6 6 8 8 12 10 10 6 8 6	7 8 11 12	45 31 13	WY※Z※+WX※Y+W※XYZ
31	4 6 8 8 8 6 6 6 8 8 8 10 10 10 4 10	7 9 10 12	13 28 30 36	W※XYZ+WX※Y※Z+WX※YZ※+WXY※Z※
32	5 3 5 7 7 11 9 9 7 7 9 9 9 7 9 7	11 12 13 14 15	44 49	WX+WYZ
33	5 3 7 7 7 9 9 9 9 5 9 9 11 7 7 7 9	10 11 12 13 15	43 38 49 32	WXZ+WXY※+WYZ+WX※Y
34	5 3 7 7 7 9 9 9 9 9 9 9 7 7 7 11 5	8 11 13 14 15	41 43 49 27	WXY+WXZ+WYZ+WX※Y※Z※
35	5 5 5 7 7 13 7 7 7 7 9 7 7 7 9 9 9	3 12 13 14 15	44 4	WX+W※XYZ
36	5 5 5 7 7 7 7 7 7 9 9 13 9 9 5 7 7	7 8 11 12 15	49 45 67	WYZ+WY※Z※+XYZ
37	5 5 5 7 7 7 7 7 7 5 9 9 13 9 9 7 7 7	7 10 11 12 13	38 32 13	WXY※+WX※Y+W※XYZ
38	5 5 7 7 7 7 7 7 7 9 9 9 9 9 9 9 3 11	7 9 10 12 15	37 36 30 28	XYZ+WXY※Z※+WX※YZ※+WY※Y※Z
39	5 5 7 7 7 7 7 7 7 9 9 9 9 9 9 11 3	7 8 11 13 14	13 27 31 37 39	W※XYZ+WX※Y※Z※+WX※YZ+WXY※Z+WXYZ※
40	5 7 7 7 7 5 5 9 13 9 9 9 7 7 7 7 9	6 7 8 9 15	29 67 14	WX※Y※+XYZ+W※XY
41	5 7 7 7 7 5 9 9 9 9 13 7 7 7 7 5	4 7 8 11 15	49 67 27 9	WYZ+XYZ+WX※Y※Z※+W※XY※Z※
42	5 7 7 7 7 9 9 9 9 9 9 13 11 11 7 7 9	0 7 11 12 15	49 37 36 0	WYZ+XYZ+WXY※Z※+W※Y※Y※Z※
43	5 7 7 7 7 5 9 9 9 9 9 9 7 7 3 11 9	5 6 8 11 15	49 27 12 10	WYZ+WX※Y※Z※+W※XYZ※+W※XY※Z
44	5 7 7 7 7 5 9 9 9 9 9 5 7 7 7 7 13	5 6 9 10 15	10 12 28 30 40	W※XY※Z+W※XY※Z※+WX※Y※Z+WXY※Z※+WXYZ
45	5 5 5 5 5 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 5	7 11 13 14 15	41 43 49 37	WXY+WXZ+WYZ+XYZ
46	5 5 5 5 7 9 9 7 9 7 11 9 9 11 7 9 7 7	7 11 12 14 15	41 42 49 37	WXY+WXZ※+WYZ+XYZ
47	5 5 5 7 7 7 9 7 11 11 7 5 7 7 7 9 9 9	6 9 13 14 15	41 43 46 66	WXY+WXZ+WY※Z+XYZ※
48	5 5 5 7 7 7 9 7 7 11 11 9 7 7 7 9 9 5	7 8 13 14 15	41 43 67 27	WXY+WXZ+XYZ+WX※Y※Z※
49	5 5 5 7 7 7 9 7 7 7 7 9 11 11 7 9 5 9 5	7 10 12 13 15	43 38 67 30	WXZ+WXY※+XYZ+WX※YZ※
50	5 5 5 7 7 9 7 7 7 7 7 9 11 11 9 9 9 5	7 11 12 13 14	42 38 31 13	WXZ※+WXY※+W※XYZ+W※XYZ
51	5 5 7 7 7 11 11 11 9 9 9 9 9 9 9 11 7	0 11 13 14 15	41 43 49 0	WXY+WXZ+WYZ+W※X※Y※Z※
52	5 5 7 7 7 7 11 11 11 9 5 9 9 9 9 5 9 7 7	4 10 11 13 15	43 49 32 9	WXZ+WYZ+WXY※+W※XY※Z※
53	5 5 7 7 7 7 7 11 11 9 5 5 9 9 9 11 7	3 9 11 13 14	46 34 66	WY※Z+WX※Z+XYZ※
54	5 5 7 7 7 7 7 7 11 9 5 5 9 9 9 5 7 11	6 9 11 12 15	49 34 36 12	WYZ+WX※Z+WXY※Z※+W※XYZ※
55	5 5 7 7 7 7 7 7 11 9 9 5 9 9 5 5 11 7	6 8 11 13 15	43 49 27 12	WXZ+WYZ+WX※Y※Z※+W※XYZ※
56	5 7 7 7 7 7 5 5 5 9 9 5 9 11 11 7 7 9	6 7 9 11 12	34 14 36	W※Z+W※XY+WXY※Z※
57	5 7 7 7 7 5 5 9 9 9 9 9 11 11 7 7 11 5	6 7 8 11 13	14 37 31 27	W※XY+WXY※Z+WX※YZ+WXY※Z※
58	5 7 7 7 7 9 9 9 9 9 9 11 11 11 11 5	0 7 11 13 14	0 13 31 37 39	W※X※Y※Z※+W※XYZ+WX※YZ+WXY※Z+WXYZ※
59	6 2 6 6 8 10 10 8 8 6 8 8 10 8 8 8 6 8	10 11 12 13 14 15	44 50	WX+WY
60	6 2 6 8 8 10 8 8 8 8 6 8 8 10 6 10	9 10 12 13 14 15	44 46 48	WX+WY※Z+WYZ※

61	6	2	8	8	8	8	8	8	6	6	6	10	10	10	8	8	9 10 11 12 13 14	42 38 48 32 46 34	WXZ※+WXY※+WYZ※+WX※Y+WY※Z+WX※Z
62	6	6	6	6	8	6	6	8	14	8	8	6	8	8	8	8	6 7 8 9 14 15	68 29	XY+WX※Y※
63	6	6	6	6	8	6	6	8	6	8	8	14	8	8	8	8	6 7 10 11 12 13	38 32 14	WXY※+WX※Y+W※XY
64	6	6	6	8	8	14	8	8	8	8	6	8	8	6	6	6	1 2 12 13 14 15	44 3 1	WX+W※X※YZ※+W※X※Y※Z
65	6	6	6	8	8	6	8	8	8	8	2	8	8	10	10	10	5 6 9 10 13 14	48 46 66 64	WYZ※+WY※Z+XYZ※+XY※Z
66	6	6	6	8	8	6	8	8	8	8	6	8	8	6	14	6	5 6 8 11 13 14	66 64 31 27	XYZ※+XY※Z+WX※YZ+WX※Y※Z※
67	6	6	6	8	8	6	8	8	8	8	6	8	8	6	6	14	5 6 9 10 12 15	10 12 28 30 36 40	W※XY※Z+W※XYZ※+WX※Y※Z+WX※YZ※+WXY※Z※+WXYZ
68	6	6	8	8	8	8	8	8	2	6	10	10	6	10	8	8	3 4 10 11 12 13	38 32 63 58	WXY※+WX※Y+XY※Z※+X※YZ
69	6	6	8	8	8	8	8	8	6	6	6	6	6	14	8	8	3 4 9 10 13 14	48 46 9 4	WYZ※+WY※Z+W※XY※Z※+W※X※YZ
70	6	8	8	8	8	2	6	6	10	10	6	8	8	8	8	10	5 6 7 8 9 10	33 29 14 16	WX※Z※+WX※Y※+W※XY+W※XZ
71	6	8	8	8	8	6	6	6	6	6	6	8	8	8	8	14	3 5 6 9 10 12	4 10 12 28 30 36	W※X※YZ+W※XY※Z+W※XYZ※+WX※Y※Z+WX※YZ※+WXY※Z※
72	6	4	4	6	6	10	8	8	8	8	10	10	10	8	8	6	7 11 12 13 14 15	44 67 49	WX+XYZ+WYZ
73	6	4	4	6	8	10	8	6	8	10	8	10	8	10	6	8	7 10 12 13 14 15	44 67 48	WX+XYZ+WYZ※
74	6	4	4	8	8	10	6	6	10	10	10	8	8	8	8	6	7 8 12 13 14 15	44 67 45	WX+XYZ+WY※Z※
75	6	4	6	6	6	8	8	12	10	6	6	8	8	8	10	8	6 9 11 13 14 15	52 66 41	WZ+XYZ※+WXY
76	6	4	6	6	6	8	8	8	6	10	10	12	8	8	6	8	7 10 11 12 13 15	43 38 49 32 67	WXZ+WXY※+WYZ+WX※Y+XYZ
77	6	4	6	6	6	8	8	8	10	10	10	8	8	8	10	4	7 8 11 13 14 15	41 43 49 67 27	WXY+WXZ+WYZ+XYZ+WX※Y※Z※
78	6	4	6	6	8	8	12	6	6	8	8	8	10	6	8	10	5 10 11 12 14 15	50 42 10	WY+WXZ※+W※XY※Z
79	6	4	6	6	8	8	8	6	10	8	12	8	10	6	8	6	7 8 11 12 14 15	41 42 49 45 67	WXY+WXZ※+WYZ+WY※Z※+XYZ
80	6	4	6	6	8	8	8	6	6	8	8	12	10	10	8	6	7 10 11 12 13 14	42 38 48 32 13	WXZ※+WXY※+WYZ※+WX※Y+W※XYZ
81	6	4	6	6	8	8	8	6	10	8	8	8	10	10	4	10	7 9 10 12 14 15	41 42 48 67 28	WXY+WXZ※+WYZ※+XYZ+WX※Y※Z
82	6	4	6	8	8	12	6	6	8	8	10	6	6	8	10	8	3 8 12 13 14 15	44 45 4	WX+WY※Z※+W※X※YZ
83	6	4	6	8	8	8	6	6	8	12	10	10	6	8	6	8	7 8 10 12 13 15	43 38 45 33 67	WXZ+WXY※+WY※Z※+WX※Z※+XYZ
84	6	4	6	8	8	8	6	6	8	8	6	10	10	12	6	8	7 9 10 12 13 14	42 38 48 46 13	WXZ※+WXY※+WYZ※+WY※Z+W※XYZ
85	6	4	6	8	8	8	6	6	8	8	10	10	10	8	10	4	7 8 11 12 13 14	42 38 45 31 13	WXZ※+WXY※+WY※Z※+WX※YZ+W※XYZ
86	6	4	8	8	8	6	6	6	6	10	10	12	8	8	8	6	7 8 10 11 12 13	38 32 45 33 13	WXY※+WX※Y+WY※Z※+WX※Z※+W※XYZ
87	6	4	8	8	8	6	6	6	10	10	10	8	8	8	4	10	7 8 9 10 12 15	45 33 29 67	WY※Z※+WX※Z※+WX※Y※+XYZ
88	6	6	6	6	8	6	10	4	10	12	8	6	8	8	8	8	5 7 8 10 14 15	41 48 33 67 16	WXY+WYZ※+WX※Z※+XYZ+W※XZ
89	6	6	6	6	8	6	6	8	10	4	8	10	12	8	8	8	6 7 9 11 12 14	42 34 66 14	WXZ※+WX※Z+XYZ※+W※XY
90	6	6	6	6	8	10	10	4	10	8	8	10	8	8	4	8	1 7 10 12 14 15	41 42 48 67 1	WXY+WXZ※+WYZ※+XYZ+W※X※Y※Z
91	6	6	6	6	8	6	10	8	10	8	4	6	8	8	8	12	5 6 9 10 14 15	41 48 66 28 10	WXY+WYZ※+XYZ※+WX※Y※Z+W※XY※Z
92	6	6	6	6	8	6	10	8	10	8	8	6	8	4	12	8	5 6 8 11 14 15	41 49 66 27 10	WXY+WYZ+XYZ※+WX※Y※Z※+W※XY※Z
93	6	6	6	6	8	6	6	8	10	8	8	10	8	8	4	12	6 7 9 10 12 15	67 14 36 30 28	XYZ+W※XY+WXY※Z※+WX※YZ※+WX※Y※Z
94	6	6	6	8	8	10	4	4	8	8	10	8	8	10	10	6	3 7 8 12 13 14	42 38 45 22	WXZ※+WXY※+WY※Z※+W※YZ
95	6	6	6	8	8	6	4	8	12	8	6	8	8	10	10	6	6 7 8 9 13 14	46 29 66 14	WY※Z+WX※Y※+XYZ※+W※XY
96	6	6	6	8	8	10	4	8	8	4	6	8	8	10	10	10	3 6 9 12 13 14	42 38 46 66 4	WXZ※+WXY※+WY※Z+XYZ※+W※X※YZ
97	6	6	6	8	8	6	4	8	8	8	6	12	8	10	6	10	6 7 9 10 12 13	38 46 14 30	WXY※+WY※Z+W※XY+WX※YZ※
98	6	6	6	8	8	10	4	8	8	8	6	8	12	10	6	6	2 7 9 12 13 14	42 38 46 13 3	WXZ※+WXY※+WY※Z+W※XYZ+W※X※YZ※
99	6	6	6	8	8	10	8	8	8	8	6	4	12	6	6	10	2 5 9 12 14 15	41 42 28 10 3	WXY+WXZ※+WX※Y※Z+W※XY※Z+W※X※YZ※
100	6	6	8	8	8	4	4	8	10	6	10	10	10	6	8	8	6 7 8 9 11 12	34 45 29 14	WX※Z+WY※Z※+WX※Y※+W※XY
101	6	6	8	8	8	4	8	8	6	6	10	10	10	10	4	8	4 7 9 10 11 12	32 34 63 13	WX※Y+WX※Z+XY※Z※+W※XYZ
102	6	6	8	8	8	4	8	8	6	6	6	10	10	6	8	12	5 6 9 10 11 12	32 34 36 12 10	WX※Y+WX※Z+WXY※Z※+W※XYZ※+W※XY※Z
103	6	6	8	8	8	8	8	8	6	6	10	6	6	10	4	12	3 4 9 10 12 15	63 40 30 28 4	XY※Z※+WXYZ+WX※YZ※+WX※Y※Z+W※X※YZ
104	6	8	8	8	8	6	6	6	6	6	10	8	8	4	12	10	3 5 6 8 11 12	45 58 12 10	WY※Z※+X※YZ+W※XYZ※+W※XY※Z
105	6	6	6	6	6	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	6	0 7 11 13 14 15	41 43 49 67 0	WXY+WXZ+WYZ+XYZ+W※X※Y※Z※
106	6	6	6	6	6	6	6	10	10	10	10	10	6	6	10	6	6 7 8 11 13 15	43 49 67 14 27	WXZ+WYZ+XYZ+W※XY+WX※Y※Z※
107	6	6	6	6	6	6	6	10	10	6	10	10	10	6	6	10	6 7 9 11 12 15	49 34 67 14 36	WYZ+WX※Z+XYZ+W※XY+WXY※Z※
108	6	6	6	6	6	6	6	10	10	6	6	10	10	10	10	6	6 7 9 11 13 14	46 34 66 14	WY※Z+WX※Z+XYZ※+W※XY
109	7	1	7	7	7	9	9	9	7	7	7	9	9	9	7	9	9 10 11 12 13 14 15	44 50 52	WX+WY+WZ
110	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	15	7	7	7	7	7	3 4 7 8 11 12 15	76 63 45	YZ+XY※Z※+WY※Z※
111	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	15	7	3 5 6 8 11 13 14	66 64 58 27	XYZ※+XY※Z+X※YZ+WX※Y※Z※
112	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	15	3 5 6 9 10 12 15	4 10 12 28 30 36 40	W※X※YZ+W※XY※Z+W※XYZ※+WX※Y※Z+WX※YZ※+WXY※Z※+WXYZ
113	7	3	5	5	7	9	9	7	7	9	9	11	9	9	7	7	7 10 11 12 13 14 15	44 50 67	WX+WY+XYZ
114	7	3	5	7	7	9	7	11	9	5	7	9	9	7	9	9	6 9 11 12 13 14 15	44 52 66	WX+WZ+XYZ※
115	7	3	5	7	7	9	7	7	9	9	11	9	9	7	9	5	7 8 11 12 13 14 15	44 67 45 49	WX+XYZ+WY※Z※+WYZ
116	7	3	5	7	7	9	7	7	9	9	7	9	9	11	5	9	7 9 10 12 13 14 15	44 67 46 48	WX+XYZ+WY※Z+WYZ※
117	7	3	7	7	7	7	11	11	7	7	7	7	7	11	7	7	4 9 10 11 13 14 15	50 52 9	WY+WZ+W※XY※Z※
118	7	3	7	7	7	7	7	11	11	7	7	7	7	7	11	7	6 8 9 11 13 14 15	52 66 29 41	WZ+XYZ※+WX※Y※+WXY
119	7	3	7	7	7	7	7	7	7	11	11	11	7	7	7	7	7 8 10 11 12 13 15	43 38 49 32 45 33 67	WXZ+WXY※+WYZ+WX※Y+WY※Z※+WX※Z※+XYZ
120	7	3	7	7	7	7	7	11	7	7	7	11	7	7	7	11	6 9 10 11 12 13 15	52 32 38 12	WZ+WX※Y+WXY※+W※XYZ※



181	8	6	8	8	8	6	6	6	8	8	8	6	6	6	8	14	3	5	6	8	9	10	12	15	45	33	29	40	12	10	4	WYWZ※+WXWZ※+WXWY※+WXYZ+W※XYZ※+W※XYWZ+W※XWYZ
182	8	4	4	4	8	8	8	8	8	8	8	12	8	8	8	8	3	7	10	11	12	13	14	15	44	50	68					WX+WY+XY
183	8	4	4	8	8	8	8	4	8	12	8	8	8	8	8	8	3	7	8	9	12	13	14	15	44	47	68					WX+WY※+XY
184	8	4	4	8	8	8	8	8	8	8	4	8	8	8	8	12	5	6	9	10	12	13	14	15	44	64	66	46	48			WX+XY※Z+XYZ※+WY※Z+WYZ※
185	8	4	4	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	4	12	5	6	8	11	12	13	14	15	44	64	66	45	49			WX+XY※Z+XYZ※+WY※Z※+WYZ
186	8	4	8	8	8	8	8	8	8	8	8	12	8	8	8	8	5	7	8	9	10	11	12	13	35	47	14					WX※+WY※+WXY
187	8	4	8	8	8	4	4	8	8	8	8	8	4	8	12	8	5	6	8	9	10	11	13	14	35	64	66	46	48			WX※+XY※Z+XYZ※+WY※Z+WYZ※
188	8	4	8	8	8	8	3	8	8	8	4	4	8	8	8	12	3	4	9	10	11	12	13	14	42	38	48	32	46	34	63	58	WXZ※+WXY※+WYZ※+WXY+WY※Z+WXZ+XY※Z※+X※YZ
189	8	4	8	8	8	8	4	8	8	8	8	8	8	4	8	12	5	6	8	9	10	11	12	15	35	45	49	12	10			WX※+WY※Z※+WYZ+WXYZ※+WX※YZ
190	8	4	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	4	4	12	3	4	8	9	10	13	14	15	41	43	49	45	33	29	9	4	WXY+WZ+WYZ※+WY※Z+WXZ※+WX※Y※+WXYZ※+WX※YZ
191	8	8	8	8	8	4	4	8	8	4	12	8	8	8	8	8	3	4	6	7	8	9	11	12	34	45	29	14	63	15	58	22	WXZ+WY※Z※+WX※Y※+WXY+XY※Z※+WXZ※+X※YZ+WY※Z
192	8	8	8	8	8	4	4	4	8	8	8	8	8	8	8	12	3	5	6	7	8	9	10	12	45	33	29	14	16	22		WY※Z※+WX※Z※+WX※Y※+WXY+WXZ+WY※Z
193	8	8	8	8	8	4	4	8	8	8	8	8	4	12	8	8	3	4	6	7	8	9	10	13	45	33	29	14	15	22		WY※Z+WX※Z※+WX※Y※+WXY+WXZ※+WY※Z
194	8	8	8	8	8	4	8	8	8	8	8	4	4	8	8	12	3	4	5	6	8	9	10	15	33	29	15	11	40	4		WX※Z※+WY※Y※+WXZ※+WX※Y+WXYZ+WX※YZ
195	8	4	4	3	6	8	6	10	10	6	8	10	10	8	8	8	3	7	9	11	12	13	14	15	44	52	68					WX+WZ+XY
196	8	4	4	6	3	8	6	8	10	8	8	10	8	10	6	10	3	7	9	10	12	13	14	15	44	38	46	48				WX+XY+WY※Z+WYZ※
197	8	6	6	4	6	8	10	4	6	8	10	8	8	10	8	10	3	5	7	10	11	12	14	15	50	76	16	42				WY+YZ+W※XZ+WXZ※
198	8	4	6	5	3	6	6	6	10	12	8	8	8	8	8	10	3	7	8	9	11	13	14	15	52	68	29					WZ+XY+WX※Y※
199	8	6	4	5	6	6	6	8	8	10	10	8	8	8	8	12	5	6	7	8	11	13	14	15	32	70	49	27				XY+XZ+WY※Z+WX※Y※Z※
200	8	4	5	6	6	6	6	10	8	8	8	12	8	8	6	10	3	7	9	10	11	12	13	15	52	14	37	32	38			WZ+W※XY+XYZ+WX※Y+WXY※
201	8	4	6	6	8	6	10	4	8	10	10	8	10	6	8	8	5	7	8	10	11	12	14	15	50	51	16	37				WY+WZ※+W※XZ+XYZ
202	8	4	6	6	8	10	10	8	4	6	10	8	8	10	8	8	3	4	10	11	12	13	14	15	44	50	58	63				WX+WY+XY※Z+XY※Z※
203	8	4	6	6	8	6	6	8	12	6	10	8	8	10	8	8	3	7	8	9	11	12	14	15	32	29	45	34	49	42		XY+WX※Y※+WY※Z※+W※XY+WXZ+WY※Z※
204	8	4	6	6	8	10	10	8	8	10	10	12	10	10	10	8	0	7	10	11	12	13	14	15	44	50	37	0				WX+WY+XYZ+W※XY※Z※
205	8	4	6	6	8	6	6	8	8	6	6	12	10	10	8	8	3	7	9	10	11	12	13	14	42	32	48	32	46	34	66	14	WXZ※+WXY※+WYZ※+WX※Y+WY※Z+WX※Z+XYZ※+W※XY
206	8	4	6	6	8	6	10	8	8	6	10	8	8	10	10	4	4	7	9	10	11	12	14	15	50	33	37	34	42			WY+XY※Z※+YYZ+W※XZ+WXZ※
207	8	4	6	6	8	6	10	8	8	6	6	8	10	6	8	12	5	6	9	10	11	12	14	15	50	66	34	42	10			WY+XYZ※+WX※Z+WXZ※+W※XYZ
208	8	4	6	8	8	10	4	8	10	6	8	6	6	8	10	10	3	7	8	9	12	13	14	15	44	47	66	4				WX+WY※+XYZ※+W※XYZ
209	8	4	6	8	8	8	6	4	8	10	6	8	10	6	8	10	3	7	8	9	11	12	13	14	47	14	66	34	42			WY※+W※XY+XYZ※+WX※Z+WXZ※
210	8	4	6	8	8	10	8	8	6	10	4	6	10	8	6	10	2	5	9	10	12	13	14	15	44	57	64	46	42			WX+XYZ※+XY※Z+WY※Z+WYZ※
211	8	4	6	8	8	6	8	8	6	6	4	10	10	8	10	10	5	6	9	10	11	12	13	14	42	32	48	32	46	34	66	64	WXZ※+WXY※+WYZ※+WX※Y+WY※Z+WX※Z+XYZ※+XY※Z
212	8	4	6	8	8	10	8	8	6	6	8	12	6	6	12	6	3	4	9	10	12	13	14	15	44	33	46	48	4			WX+XY※Z※+WY※Z+WYZ※+WX※YZ
213	8	4	6	8	8	6	8	8	6	6	8	10	10	12	6	6	4	7	9	10	11	12	13	14	42	38	48	32	46	34	63	13	WXZ※+WXY※+WYZ※+WX※Y+WY※Z+WX※Z+XYZ※+W※XYZ
214	8	6	6	6	6	4	8	8	8	8	4	10	10	10	10	8	5	6	7	8	10	11	13	15	70	33	14	32	49	27		XZ+WX※Z※+WXY+WX※Y+WYZ
215	8	6	6	6	6	8	8	12	12	8	8	10	10	10	10	8	0	6	7	9	11	13	14	15	52	68	0					WZ+XY+WX※Y※Z※
216	8	6	6	6	6	4	8	8	8	8	4	10	10	10	10	8	5	6	7	9	10	11	13	14	48	32	46	34	66	14	64	16	WYZ※+WX※Y+WY※Z+WX※Z+XYZ※+WX※Y+XY※Z+WX※Z
217	8	6	6	6	6	8	8	8	8	8	12	6	6	10	10	4	3	4	7	8	11	13	14	15	76	43	41	27	9			YZ+WXZ+WXY+WX※Y※Z※+WX※YZ※
218	8	6	6	6	6	8	4	8	8	8	8	8	10	10	6	8	5	6	7	9	10	11	12	15	49	32	34	67	14	16	36	WYZ+WX※Y+WX※Z+XYZ+WX※Y+WX※Z+WX※YZ※
219	8	6	6	6	6	8	4	8	8	8	8	12	10	6	8	10	5	6	7	8	9	10	14	15	68	16	29	33	48			XY+WX※Z+WX※Y※+WX※Z※+WYZ※
220	8	6	6	6	6	8	8	8	6	12	6	6	10	8	8	4	1	6	7	9	10	12	14	15	68	55	48	42				XY+XWYZ+WYZ※+WXZ※
221	8	6	6	6	8	4	8	6	8	6	6	10	12	8	8	10	5	6	7	9	10	11	12	14	42	48	32	34	66	14	16	WXZ※+WYZ※+WX※Y+WX※Z+XYZ※+WX※Y+WX※Z
222	8	6	6	6	8	8	8	6	12	10	6	10	4	8	8	6	1	6	7	8	10	13	14	15	68	33	48	43	1			XY+WX※Z※+WYZ※+WXZ+WX※YZ
223	8	6	6	6	8	4	8	8	6	8	10	6	10	8	8	12	5	6	7	8	10	11	13	14	48	32	33	66	14	64	16	WYZ※+WX※Y+WX※Z※+XYZ※+WX※Y+XY※Z+WX※Z
224	8	6	6	6	8	8	8	6	8	6	10	6	8	8	4	12	3	5	6	8	11	12	14	15	41	42	49	45	66	58	10	WXY+WXZ※+WYZ+WX※Z※+XYZ※+X※YZ+WX※YZ
225	8	6	4	8	10	10	6	8	12	10	10	10	8	8	8	8	0	6	7	8	12	13	14	15	44	68	54	45				WX+XY+X※YZ※+WY※Z※
226	8	6	6	8	8	4	6	8	10	10	4	8	8	10	10	8	5	6	7	8	9	10	13	14	48	46	33	29	63	14	64	16	WYZ※+WY※Z+WX※Z※+WX※Y※+XYZ※+WX※Y+XY※Z+WX※Z
227	8	6	6	10	6	12	12	8	8	8	10	10	6	10	8	8	0	1	5	11	12	13	14	15	44	2	19	64	49			WX+WX※Y※+W※YZ+XY※Z+WYZ
228	8	6	6	8	8	4	6	6	6	10	8	8	12	8	6	10	5	6	7	8	10	11	12	13	38	32	45	33	14	64	16	WXY※+WX※Y+WY※Z+WX※Z+WX※Y+XY※Z+WX※Z
229	8	6	6	8	8	8	6	6	6	10	4	8	12	10	6	8	2	5	7	9	10	12	13	14	42	38	48	46	64	16	57	WXZ※+WX※Y+WY※Z+WX※Z+XY※Z+WX※Z+X※YZ※
230	8	6	6	8	8	8	12	6	6	10	10	8	8	8	6	6	1	2	7	8	12	13	14	15	44	67	45	3	1			WX+XYZ+WY※Z※+WX※YZ※+WX※YZ
231	8	6	6	8	8	4	6	6	10	10	8	8	8	6	6	12	5	6	7	8	9	10	12	15	45	33	29	37	14	16		WY※Z※+WX※Z※+W※XY※+XYZ+WX※Y+WX※Z
232	8	6	6	8	8	8	6	6	6	6	12	8	8	10	10	4	3	4	7	8	11	12	13	14	42	38	45	33	58	22		WXZ※+WX※Y+WY※Z※+XY※Z※+X※YZ+WY※Z
233	8	6	6	8	8	8	6	6	6	6	4	8	8	10	10	12	3	5	6	9	10	12	13	14	42	38	48	46	66	64	4	WXZ※+WX※Y+WY※Z※+WY※Z+XY※Z+XY※Z+WX※YZ
234	8	6	6	8	8	8	6	6	10	10	8	4	12	6	6	8	2	5	7	8	9	12	14	15	67	41	16	42	45	29	3	XYZ+WX※Y+W※XZ+WXZ※+WY※Z※+WX※Y※+WX※YZ※
235	8	6	6	8	8	8	6	6	6	10	8	8	4	6	10	12	3	5	6	8	10	12	13	15	43	38	45	33	64	12	4	WXZ+WX※Y※+WY※Z※+WX※Z※+XY※Z+WX※YZ※+WX※YZ
236	8	6	8	8	8	8	6	6	6	4	8	12	10	6	10	8	3	4	7	8	10	11	12	13	38	32	45	33	63	58	22	WXY※+WX※Y+WY※Z※+WX※Z※+XY※Z※+X※YZ+WY※Z
237	8	8	6	8	8	6	4	8	10	6	8	6	6	12	10	6	3	4	6	7	8	9	13	14	45	29	36	14	15	22		WY※Z+WX※Y※+XYZ※+WX※Y+WX※Z※+WXYZ
238	8	6	8	8	8	6	6	6	4	8	8	10	6	6	12	10	3	5	6	8	10	11	12	13	38	32	45	33	64	58	12	WXY※+WX※Y+WY※Z※+WX※Z※+XY※Z+X※YZ+WX※YZ※

(注) 1. 1-頂点，関数については第3表の（注）に同じ．
2. 関数の 10 進表示は，各論理積の3進表示を 10 進化した数で示す．

この手順では，用意する代表関数が最簡であれば得られる関数は最簡の，またハザードがなければハザードがない関数が得られる．

5.2. ハザードのない代表関数

5.1. の設計手順を用いるには，すべての正規形の関数をしらべ，それらをハザードのない最簡形にしておくことが必要である．そこで正規形の関数をとり出し，その invariant と，ハザードのない最簡形を 2，3，4 節で述べてきた手順にしたがって NEAC 2203 を用いて求めた．その結果を**第 3，4 表**に示す．第3表は冗長入力のある3変数，第4表は冗長入力のない4変数のすべての代表関数の表である．なお冗長入力のない 4 変数の場合には L.P. を使うには至らなかった．NEAC 2203 は小形で，あまり高速ではないので，4変数関数 238 個の invariant と最簡形を求めるのに約2時間要した．

5.3. 例題（冗長入力のある3変数問題）

$f=\Sigma_1 0, 1, 3+\Sigma_d 7$ をハザードのない最簡形にせよ．

重みの系列 $w_d(f)$, $w_d(f\oplus X)$, $w_d(f\oplus Y)$, $w_d(f\oplus Z)$, $w_d(f\oplus X\oplus Y)$, $w_d(f\oplus X\oplus Z)$, $w_d(f\oplus Y\oplus Z)$, $w_d(f\oplus X\oplus Y\oplus Z)$（以下 w_1 についても同じ）を作ると

46426464 37535355

これに，変数 X の否定，変数 Y, Z の置換をすると

42244264 31355353

これは第3表の 129 番 $XY+XZ'$ の invariant に等しい．したがって

$$f_{129}=(23)(100)f(X, Y, Z)$$

$$f(X, Y, Z)=(100)^{-1}(23)^{-1}f_{129}$$

$$=(100)(23)(XY+XZ')$$

$$=(100)(XZ+XY')=X'Z+X'Y'$$

よって求める最簡形は，$f=X'Z+X'Y'$.

6. むすび

本論文の結果として，積和2段回路で入力変化が一つのとき，線形計画法を用いてハザードが存在しない最簡形—AND-OR パッケージ数，またはダイオードの総数最小の意味で—を求める設計手順がえられた．さらにハザードのない回路に同族変換を施しても，ハザードがないことが示され，同族類の個数，代表関数をきめる方法が冗長入力のある関数に対しても拡張できた．ここで得られた手順に従って，冗長入力のある3変数，冗長入力のない場合の4変数関数に対して，ハザードのない最簡形と，変換に対する invariant が求められた．またこの表を用いて最簡論理関数を設計する手順も示した．しかし，この設計方法は5変数以上では代表関数の個数が多すぎて扱い得ない．また整数解，とくに 0，1 解の L.P. の解法にも考えるべきことが多く残されているが，これらのことはまた別の機会に論じたい．

7. 謝 辞

日頃，御指導頂く本学池谷和夫教授，また熱心な御討論いただく研究室の皆さんに感謝します．

参考文献

1) Huffman, D.A.: Design of hazard-free switching circuits, J.A.C.M., **4**, Jan. 1957.
2) McCluskey, Jr., E.J.: Transient in combinational logic circuit, in Redundancy technique for computing system, pp. 9～46 Spartan Books, Washington D.C., 1962.
3) McCluskey, Jr., E.J.: Minimization of Boolean functions, Bell Syst. tech. J., **11**, 1956, pp. 1417-1442.
4) Gomory, R.E.: An Algorithm for integer solutions to linear programs, Princeton-IBM Mathematical Research Project, Tech. Rept. 1, Nov. 1958.
5) Balas, E.: An additive algorithm for solving linear programs with 0, 1 variables, Operations Research, July～Angust, 1965.
6) Phister, M. 尾崎弘訳：ディジタル回路の論理設計，朝倉書店，東京，1958，pp. 66～118.
7) Roth, J.P.: Algebraic topological methods for synthesis of switching system I, Trans. of American Mathematical Society, **88**, July, 1958, pp. 301～326.
8) Gimpel, J.F.: Reduction technique for prime implicant table, IEEE Trans. **EC-15**, August. 1965, pp. 535～541
9) 宇田川銈久；論理数学とディジタル回路，朝倉書店，東京，1963.
10) Harrison, M.A.: Introduction to switching and automata theory, pp. 123～167 McGraw Hill, New York, 1965.
11) Polya, G.: Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und Chemishe Verbindungen, Acta Mathematica, **68**, 1937.

（昭和42年3月2日受付）