プログラムのページ

担当 和 田 英 一

6704. Bernoulli 数の生成

一松 信（立教大学理学部）

Bernoulli 数の定義はいろいろあるが，ここでは

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{B_n x^{2n}}{(2n)!},\quad |x|<2\pi \qquad (1)$$

とする．B_n を漸化式

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{2n+1}{2k}B_k=n \qquad (2)$$

で順次生成しようとすると，有理数として計算すればよいが，普通にやったのでは，つぎつぎに桁落ちを生じて，よい精度がえられない．そこで級数

$$B_n=\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}(1-2^{-2n})}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^{2n}} \qquad (3)$$

を使って計算する．奇数項だけの級数にしたのは，必要項数をへらすためだったが，n が大きいと

$$B_n=\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}} \qquad (3')$$

を使ったほうがかえって早そうである．ただし n が小さいと収束が悪いので，$n\geqq 5$ について（3）を使った．$n=5$ となれば，（3）の級数は $k=10$ までで 10^{-13} の精度が得られ，とくに変換や加速は必要ない．

$n\leqq 4$ については，直接に数値

プログラム

```
      FUNCTION BERNOU(N)
      COMMON N
C     SUBROUTINE FOR GENERATING BERNOULLI NUMBERS
      M = N
      IF (N-4)  990,991,992
  991 M=2
  990 TM = FLOAT(M)
      BERNOU = 1,0/(6,0*(1,0+(TM-1,0)*(6,0-TM)))
      RETURN
  992 M = N+N
      SUM = 1,0
      FAC = 2,0
      TM = 1,0
      DO 995 I=1,M
      FAC = FAC*FLOAT(I)/6,28318530717959
      TM = TM * 0,5
  995 CONTINUE
      FAC = FAC/(1,0 - TM)
      I = 1
  993 I = I + 2
      TM = 1,0/(FLOAT(I)**M)
      SUM = SUM + TM
      IF (TM .GE. 1,0E-15) GO TO 993
      BERNOU = SUM * FAC
      RETURN
      END
```

$$B_1=1/6,\ B_2=1/30,\ B_3=1/42,\ B_4=1/30 \qquad (4)$$

を求める．表をひいてもよいが，（4）の逆数の値は，$n=1, 2, 3$ については2次式

$$6(1+(n-1)(6-n)) \qquad (5)$$

と一致するので，これを使い，$n=4$ は $n=2$ と直して（5）を使う．$n=1, 2, 3, 4$ について3次式で合わせることもできるが，式が繁雑すぎる．（5）は定数が1と6とだけですむという特長をもつ．

下記のプログラムは，これによるサブルーチンを，FUNCTION の形で FORTRAN IV で書いてある．結果は，これを使った $n=1\sim 20$ の B_n と，検算として漸化式（2）の左辺を値とを示した（この主プログ

結果

N	BERNOULLI NUMBER	SUM
1	1,66666666666667E-01	1,0000000000E+00
2	3,33333333333333E-02	2,0000000000E+00
3	2,38095238095240E-02	3,0000000000E+00
4	3,33333333333333E-02	4,0000000000E+00
5	7,57575757575768E-02	5,0000000000E+00
6	2,53113553113553E-01	6,0000000000E+00
7	1,16666666666666E+00	7,0000000000E+00
8	7,09215686274444E+00	7,9999999999E+00
9	5,49711779448856E+01	8,9999999998E+00
10	5,29124242424218E+02	9,9999999988E+00
11	6,19212318840580E+03	1,1000000001E+01
12	8,65802531135441E+04	1,2000000030E+01
13	1,42551716666664E+06	1,3000002384E+01
14	2,72982310678611E+07	1,3999961853E+01
15	6,01580873900553E+08	1,4999389648E+01
16	1,51163157670889E+10	1,5976562500E+01
17	4,29614643061108E+11	1,6750000000E+01
18	1,37116552050885E+13	-4,8000000000E+01
19	4,88332318973348E+14	-8,9600000000E+02
20	1,92965793419335E+16	8,1920000000E+03

ラムは省略する). Brookhaven 国立研究所の計算センターの CDC 6600 による計算時間は(コンパイルを含み入出力を除く) 0.32 秒であった. Bernoulli 数は, 末尾の2桁を除いて正確であるが, (2) の左辺の和は $n \geqq 18$ になると, ひどい桁落ちでまったく異なっている (10^{14} あまりの数の差から 10^{1} 程度の答を出すのだから, 当然かもしれない).

なお岩波の数学辞典の付録の数表 (1960 年増訂版, 757 ページ) で, B_{30} (われわれの記号で B_{15}) の分母は, $14322=2\times 3\times 7\times 11\times 31$ であるべきが, 14332 と誤植されている. この数値を信用してひどいめにあったのが, このプログラムを作った動機であった.