

6802. 不完全ベータ函数 $I(x, a, b)$ の計算とその応用例 (F 検定の検出力 (母数模型) の表を計算するプログラム)

戸田英雄 (電試プログラム研)

1. 次の問題を解くプログラムを報告する:

α, β を parameter として (たとえば $\alpha=0.05, \beta=0.10$ など), さらに $a=n_1/2, b=n_2/2$ を与える, x と λ についての次の連立方程式を解き, n_1, n_2 に対して $\phi=\sqrt{2\lambda/n_1}$ の値をプリントせよ. ただし n_2 は偶数とする.

$$I(x, a, b) = 1 - \alpha \quad (1)$$

$$e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} I(1-x, b, a+i) = 1 - \beta \quad (2)$$

ここで

$$I(x, a, b) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt, \quad (a > 0, b > 0) \quad (3)$$

なる不完全ベータ函数である.

問題の意味 母数模型の分散分析で, 級間の不偏分散の自由度 n_1 , 級内の不偏分散の自由度 n_2 とし, ($a=n_1/2, b=n_2/2$ とおく) この二つの不偏分散の比を F 検定する. このときの検出力水準の表の計算に必要となった問題である. n_2 が偶数の場合 (b が整数) は簡単で, たとえば, 第一種の過誤 $\alpha=0.05$, 第二種の過誤 $\beta=0.10$ のときは, 浦 昭二氏 (慶大工) が不完全ベータ函数の漸近展開を用いて数値計算を行ない, 1954年に文献¹⁾で発表している (浦の表ともいう). また増山元三郎氏は $\alpha=0.05$ で $\beta=0.30, 0.20$ の場合と, $\alpha=0.01$ で $\beta=0.30, 0.20$ の場合を Tang の表から換算して表に与えている²⁾. 最近までの多くの数理統計の書物や数表には, 原著者の許可を得て, これらの表が引用されている.

筆者のプログラムを用いれば, α と β を任意に与えるだけで, 誰でも, たちどころに*, これらの表を打ち出すことができる. 数表の価値が下った! のは電子計算機のハード及びソフトの進歩のおかげである.

2. 解法の方針

b が整数のときは, (2) は山内の式 (未発表) で

$$e^{-\lambda(1-x)} \sum_{i=0}^{b-1} \frac{(\lambda(1-x))^i}{i!} I(x, a+i, b-i) = \beta \quad (2)'$$

と変形される.

不完全ベータ函数の計算には, 次の漸化式が便利である. (b は整数)

$$I(x, a, b) = x^a + \sum_{j=1}^{b-1} K(x, a, j) \quad (3)$$

ここで

$$K(x, a, j) = K(x, a, j-1) * \frac{a+j-1}{j} (1-x) \quad (4)$$

である. また

$$\frac{dI}{dx} = \frac{a+b-1}{x} K(x, a, b-1) \quad (5)$$

が成り立つ.

3. プログラムの方針

real procedure $I(X, A, B)$:

a, b, x を外から与えて, (3), (4) 式で $I(x, a, b)$ を計算するサブルーチン.

procedure FIRST: x を未知数とし (1) を Newton 法でとく. dI/dx の計算には (5) を用いた.

real procedure SUM(B, LMD):

$$(2)'$$
 の左辺の $\sum_{i=0}^{b-1} \frac{(\lambda(1-x))^i}{i!} I(x, a+i, b-i)$

の値を計算するサブルーチンである.

procedure SECOND: λ を未知数として (2)' 式を “はさみうち法” でとく.

main: α, β を与えて, 各サブルーチンをよび ϕ の値をプリントする.

4. プログラムとその結果

FACOM 230/50 ALGOL によるプログラムと, 参考のため $\alpha=0.05, \beta=0.10$ の場合の結果をあげる.

(41, 42 ページ参照)

参考文献

- 1) Shoji Ura: A Table of the power function of the analysis of variance tests, Rep. Stat. Appl. Res., JUSE, Vol. 1, No. 3 pp. 23-28. (1954)
- 2) 増山元三郎: 推計紙の使い方, 日本規格協会 (1952)

* FACOM 230/50 ALGOL のオンラインプリント方式で約 8 分

FACOM 230-50 ALGOL によるプログラムとその結果

```

'BEGIN 'COMMENT NON CENTRAL F 1966/10/27 ETL H.TODA ',
'INTEGER N1,N2,,
'INTEGER KAZU,,
'REAL X,ALFA,BETA,EPS,LAMDA,PH1,F,,
'ARRAY I(X(0..200)),
'REAL 'PROCEDURE I(X,A,B), 'VALUE X,A,B,, 'INTEGER B,,
'BEGIN 'INTEGER J,,
'REAL P,,
'ARRAY K(0..200),
K(O) = X ** A ,,
'FOR J=1 'STEP 1 'UNTIL R=1 'DO
K(J) = K(J-1) *(A-J-1)/(1-X),,
P = K(O), 'STEP 1 'UNTIL B=1 'DO P=P*K(J) ,,
RETURN,, I = P,,
'END I(X,A,B),
'PROCEDURE FIRST,,
'BEGIN 'REAL FX,FX2,XN1,DFX,DELTA,,
LOOP,, FX = I(X,N1/2,N2/2),,
XN1 = X**(N1/2 -1),,
'IF N2 'EOL 2 'THEN
'BEGIN DFX =(N1/2)*XN1,, 'GO TO SKIP 'END,,
FX2 = I(X,N1/2,N2/2 -1),,
DFX = (FX-FX2)/(N1-N2)*0.5 -1.0/2,X,,
SKIP,, DELTA =(FX-FX2)/DFX,,
'IF ABS(DELTA) 'LQ EPS 'THEN 'GO TO RETURN,,
X = X-DELTA,,
'IF X 'GQ 1.0 'THEN X =(X-1.0)/2.0,,
'IF X 'LQ 0.0 'THEN X = ABS(X),,
'GO TO LOOP ,,
RETURN,,
F = N2*X/(N1*(1-X)),,
'IF N1 'EOL 1 'THEN *X=X,,
'END,,
'REAL 'PROCEDURE SUM(B,LMD),
'VALUE B,LMD,, 'INTEGER S,, 'REAL LMD,,
'BEGIN 'REAL Y,SS,,
'REAL A,,
'INTEGER B1,J,,
'IF B 'EOL 0 'THEN 'BEGIN SUM=0.0,'GO TO RETURN '
Y = 1-X,, A= N1/2,,
'IF KAZU 'NG 1 'THEN 'GO TO SKIP,,
'FOR J=0 'STEP 1 'UNTIL R=1 'DO
I(X(B-J) = I(X,A+J,B-J),,
KAZU = 2,,
SKIP,,
SS = I(X(1),,
B1 = B-1 ,,
'FOR J=2 'STEP 1 'UNTIL R 'DO
'BEGIN
SS = I(X(J) +SS *LMD *Y/Y1 ,,
B1 = B1-1 ,,
'END,,
SUM = SS,,
RETURN,, 'END,,
'PROCEDURE SECOND,,
'BEGIN 'REAL PH1,PH2,LA,LA1,LA2,FLA,FL1,F2,,
'REAL S,SUMB,EXPLY,,
'REAL ROOT,H,,
PH1 = 0.5,,
H = 0.2,,
LA1 = N1/2 * PH1**2,,
SUMB = SUM(N2//2,LA1),,
EXPLY = EXP(-(LA1*(1-X)),,
F1 = EXPLY*SUMB -BETA,,
NEXT,, PH2 = PH1 + H,,
LA2 = N1/2 * PH2**2,,
SUMB = SUM(N2//2,LA2),,
EXPLY = EXP(-(LA2*(1-X)),,
F2 = EXPLY*SUMB -BETA,,
'IF F1#F2 'GR 0.0 'THEN 'BEGIN F1=F2 ,, PH1=PH2,
'GO TO NEXT,,
'END,,
TEST,, 'IF ABS(F1) 'LQ EPS 'THEN 'BEGIN ROOT =PH1,'GO TO CONV,,
'END,,
'IF ABS(F2) 'LQ EPS 'THEN 'BEGIN ROOT =PH2,'GO TO CONV,,
'END,,
PH =(PH2*F1 -PH1*F2)/(F1-F2),,
LA = N1/2 *PH**2,,
LAMDA =LA,,
SUMB = SUM(N2//2,LA),,
EXPLY = EXP(-(LA*(1-X)),,
FLA = EXPLY*SUMB -BETA,,
'IF FLA 'GQ 0.0 'THEN 'BEGIN PH1= PH, F1=FLA,'END
'GO TO TEST,,
CONV,, PH=ROOT,,
'END,,
PREP,, PRINTSTRING('TABLE OF THE POWER FUNCTION OF THE '),,
PRINTSTRING('ANALYSIS OF VARIANCE TESTS '),,
PRINTSTRING('1966/11/3 ETL H.TODA '),.CRLF,.CRLF,,
CRLF,,
ALFA = 0.05 ,,
BETA = 0.10 ,,
EPS = 1e-6,,
PRINTSTRING('ALFA='),, PRINT(ALFA),,
SPACE(3),,
PRINTSTRING('BETA='),, PRINT(BETA),,
CRLF,.CRLF,.CRLF,.CRLF,.CRLF,,
X = 0.5,,
*X = X,,
'FOR N2=2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,24,30,40,50,60,
'BEGIN PRINT(N2),
'FOR N1=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,15,20,24,30,40,60,
80,100,120 'DO
'BEGIN
'IF N1 'EOL 1 'THEN X=*X,,
FIRST,,
KAZU = 1,,
SFCOND,,
OUTPUT(1,200,*Z,DU*,PH1),,
'END,, CRLF,.CRLF,,
'END
'END

```

TABLE OF THE POWER FUNCTION OF THE ANALYSIS OF VARIANCE TESTS 1966/11/3 ETL H.TODA

ALFA = .500000⁻⁰¹ BETA = .100000⁺⁰⁰

(): 補の表である

$\frac{\eta_1}{\eta_2}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	80	100	120
2	6.80	6.71	6.68	6.67	6.66	6.65	6.65	6.65	6.64	6.64	6.64	6.64	6.63	6.63	6.63	6.63	6.63	6.63	6.63	6.63
4	4.40	3.90	3.69	3.58	3.50	3.45	3.41	3.38	3.36	3.34	3.31	3.28	3.25	3.23	3.22	3.20	3.19	3.18	3.17	3.17
6	3.91	3.32	3.07	2.92	2.83	2.76	2.71	2.67	2.64	2.61	2.57	2.53	2.49	2.46	2.44	2.42	2.40	2.38	2.38	2.31
8	3.71	3.08	2.81	2.64	2.54	2.46	2.40	2.35	2.32	2.29	2.24	2.19	2.14	2.12	2.09	2.06	2.03	2.02	2.01	2.00
10	3.60	2.95	2.66	2.49	2.37	2.29	2.23	2.18	2.14	2.11	2.06	2.00	1.94	1.91	1.88	1.85	1.82	1.80	1.79	1.78
12	3.54	2.87	2.57	2.39	2.27	2.19	2.12	2.07	2.02	1.99	1.93	1.88	1.81	1.78	1.75	1.71	1.68	1.66	1.64	1.64
14	3.49	2.81	2.51	2.33	2.20	2.11	2.04	1.99	1.94	1.91	1.85	1.79	1.72	1.69	1.65	1.61	1.57	1.55	1.54	1.53
16	3.46	2.77	2.46	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.88	1.85	1.79	1.72	1.65	1.61	1.58	1.54	1.49	1.47	1.46	1.45
18	3.43	2.74	2.43	2.24	2.11	2.02	1.94	1.89	1.84	1.80	1.74	1.67	1.60	1.56	1.52	1.48	1.43	1.41	1.39	1.38
20	3.41	2.72	2.40	2.21	2.08	1.98	1.91	1.85	1.80	1.76	1.70	1.63	1.55	1.51	1.47	1.43	1.38	1.35	1.34	1.33
24	3.38	2.68	2.36	2.17	2.03	1.94	1.86	1.80	1.75	1.71	1.64	1.57	1.49	1.45	1.40	1.35	1.30	1.27	1.26	1.24
30	3.35	2.65	2.32	2.12	1.99	1.89	1.81	1.75	1.70	1.65	1.58	1.51	1.42	1.38	1.33	1.28	1.22	1.19	1.17	1.16
40	3.32	2.61	2.28	2.08	1.94	1.84	1.76	1.70	1.64	1.60	1.52	1.44	1.36	1.31	1.25	1.20	1.13	1.10	1.08	1.06
50	3.31	2.59	2.26	2.06	1.92	1.81	1.73	1.67	1.61	1.56	1.49	1.41	1.31	1.26	1.21	1.15	1.08	1.04	1.02	1.00
60	3.29	2.58	2.25	2.04	1.90	1.79	1.71	1.64	1.59	1.54	1.47	1.38	1.29	1.23	1.18	1.11	1.04	1.00	.97	.95
70	3.29	2.57	2.24	2.03	1.89	1.78	1.70	1.63	1.57	1.53	1.45	1.36	1.27	1.21	1.15	1.09	1.01	.97	.94	.92
80	3.28	2.56	2.23	2.02	1.88	1.77	1.69	1.62	1.56	1.51	1.44	1.35	1.25	1.20	1.14	1.07	.99	.95	.92	.90
90	3.28	2.56	2.22	2.01	1.87	1.76	1.68	1.61	1.55	1.51	1.43	1.34	1.24	1.18	1.12	1.05	.97	.93	.90	.87
100	3.27	2.55	2.22	2.01	1.87	1.76	1.67	1.60	1.55	1.50	1.42	1.33	1.23	1.17	1.11	1.04	.96	.91	.88	.86
110	3.27	2.55	2.21	2.01	1.86	1.75	1.67	1.60	1.54	1.49	1.41	1.32	1.22	1.17	1.10	1.03	.95	.90	.87	.84
120	3.27	2.55	2.21	2.00	1.86	1.75	1.66	1.59	1.54	1.49	1.41	1.32	1.22	1.16	1.09	1.02	.94	.89	.85	.83